dr Lidija Stefanović

INTEGRALI: KRIVOLINIJSKI, DVOJNI, TROJNI, POVRŠINSKI

ZA STUDENTE TEHNIČKIH FAKULTETA;

II DEO

SKC Niš, 2009.

dr Lidija Stefanović
INTEGRALI: KRIVOLINIJSKI, DVOJNI, TROJNI, POVRŠINSKI
ZA STUDENTE TEHNIČKIH FAKULTETA; II DEO
I izdanje, Niš, 2009.

Recenzenti:
dr Slađana Marinković, docent Elektronskog fakulteta u Nišu,
dr Vladimir Pavlović, docent PMFa u Nišu

Izdavač:
Studentski kulturni centar Niš

Za izdavača:
Miroslav Jović, direktor

Urednik:
Aleksandar Blagojević

Tehnička obrada:
dr Lidija Stefanović,
dipl. ing. Biljana Đorđević

Štampa:
"Petrograf" Niš

Tiraž:
100 primeraka

ISBN 978–86–7757–154–2

PREDGOVOR

Ovo je zbirka zadataka koja je prvobitno zamišljena kao sastavni i poslednji deo knjige "Integrali: krivolinijski, dvojni, trojni, površinski za studente tehničkih fakulteta; I deo", autora prof. dr Lidije Stefanović (Studentski kulturni centar Niš, Niš, 2008). Iako sa knjigom čini skoro neraskidivu celinu, oformljena je kao posebna celina zbog obimnosti i značaja prezentovane materije.

Zbirka u potpunosti podržava istoimenu knjigu, kako u pogledu sadržine, tako i u svakom drugom pogledu (navođenje oznaka formula i teorema, pozivanje na primere i napomene, citiranje bibliografskih jedinica i slično). Primedbe iznete u Predgovoru knjige, koje se odnose na prikazivanje prostornih objekata, važe i u ovom slučaju.

Tekst zbirke je urađen pomoću programskog paketa MIKTEX (verzija Amstex 2.0), a slike pomoću programskog paketa Corel Draw (verzija 11). Svi zadaci su testirani pomoću programskog paketa MATHEMATICA (verzija 6.0).

Autor se zahvaljuje asistentu Elektronskog fakulteta u Nišu, mr Marjanu Matejiću, koji je zadatke testirao i formulisao Prilog. Takođe se zahvaljuje recenzentima, doc. dr Slađani Marinković i doc. dr Vladimiru Pavloviću, a posebno prvom od njih, na predanom isčitavanju i ispravljanju materijalnih grešaka u tekstu, kao i na pomoći u izboru zadataka.

Niš, 2009. g. Autor

SADRŽAJ

KRIVOLINIJSKI INTEGRALI 1

Krivolinijski integrali po luku (I vrste) 1
Zadaci 1 – 7
Krivolinijski integrali po koordinatama (II vrste) 9
Zadaci 8 – 18

VIŠESTRUKI INTEGRALI 27

Dvojni integrali 27
Zadaci 19 – 21
Trojni integrali 32
Zadaci 22 – 23
Smena promenljivih u dvojnim integralima 35
Zadaci 24 – 37
Smena promenljivih u trojnim integralima 53
Zadaci 38 – 48
Green–Riemannova teorema 65
Zadaci 49 – 52

POVRŠINSKI INTEGRALI 71

Površinski integrali po površi (I vrste) 71
Zadaci 53 – 62
Površinski integrali po koordinatama (II vrste) 85
Zadaci 63 – 67
Veza između površinskih integrala I i II vrste 95
Zadaci 68 – 70
Teorema Ostrogradskog 102
Zadaci 71 – 77

Stokesova teorema 117
Zadaci 78 – 85
Nezavisnost krivolinijskog integrala od puta integracije 126
Zadaci 86 – 90

PRILOG 133

KRIVOLINIJSKI INTEGRALI

Krivolinijski integrali po luku (I vrste)

Ako je

$$L: \quad x = x(t)\ ,\ y = y(t)\ ,\ z = z(t)\ ; \quad t \in [\alpha, \beta]\ ,$$

tada je

$$\int_L H(x,y,z)\, d\lambda = \int_\alpha^\beta H\big(x(t), y(t), z(t)\big) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\ dt\ .$$

$\boxed{\mathbf{1.}}$ Izračunati dužinu dela krive L_1, koja je presek površi

$$S_1: \quad (x-y)^2 = 3(x+y)\ , \qquad S_2: \quad x^2 - y^2 = \frac{9}{8}\, z^2\ ,$$

između tačaka $O(0,0,0)$ i $B(3,0,\sqrt{8})$.

Rešenje. Neka je $L = \overset{\frown}{OB}$ deo krive L_1 i l dužina za L.

Prvo nalazimo parametarske jednačine krive L. Svaka tačka $X(x,y,z) \in L_1$ pripada istovremeno i površi S_1 i površi S_2, pa njene koordinate zadovoljavaju sistem jednačina

$$(x-y)^2 = 3(x+y)\ ,\ x^2 - y^2 = \frac{9}{8}\, z^2\ .$$

Smenom

$$u = x - y\ ,\ v = x + y$$

u prethodni sistem, dobija se novi sistem

$$u^2 = 3v\ ,\ uv = \frac{9}{8}\, z^2\ .$$

Stavljajući $u = t$, iz prethodnog sistema je

$$v = \frac{1}{3}\,t^2 \ , \ z = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\,t\sqrt{t}$$

i, prema uvedenoj smeni,

$$x = \frac{1}{2}(u+v) = \frac{1}{6}\big(3t+t^2\big) \ , \ y = \frac{1}{2}(v-u) = \frac{1}{6}\big(t^2-3t\big) \ , \ z = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\,t\sqrt{t} \ ,$$

pa je

$$X\Big(\frac{1}{6}\big(3t+t^2\big), \frac{1}{6}\big(t^2-3t\big), \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\,t\sqrt{t}\Big) \ .$$

Za tačku $O(0,0,0)$ je $t = u = x - y = 0 - 0 = 0$, a za tačku $B(3,0,\sqrt{8})$ je $t = u = x - y = 3 - 0 = 3$. Zato za tačke $X \in L \subset L_1$ važi $t \in [0,3]$ i parametarske jednačine krive L glase

$$L: \quad x = \frac{1}{6}\big(3t+t^2\big) \ , \ y = \frac{1}{6}\big(t^2-3t\big) \ , \ z = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\,t\sqrt{t} \ ; \quad t \in [0,3] \ .$$

Kako je

$$x'(t) = \frac{1}{6}(3+2t) \ , \ y'(t) = \frac{1}{6}(2t-3) \ , \ z'(t) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\sqrt{t} \ ;$$
$$x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) = \frac{1}{18}(2t+3)^2 \ ,$$

dužina l krive L je

$$\begin{aligned} l &= \int_L d\lambda = \int_0^3 \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\ dt \\ &= \int_0^3 \sqrt{\frac{1}{18}(2t+3)^2}\ dt = \frac{1}{3\sqrt{2}}\int_0^3 (2t+3)\,dt = \frac{1}{3\sqrt{2}}\big(t^2+3t\big)\Big|_0^3 = 3\sqrt{2} \ . \end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{2.}}$ Izračunati dužinu dela krive L_1, koja je presek površi

$$S_1: \quad x^2 = 3y \ , \qquad S_2: \quad 2xy = 9z \ ,$$

između tačaka $O(0,0,0)$ i $B(3,3,2)$.

Rešenje. Neka je $L = \overset{\frown}{OB}$ deo krive L_1, čiju dužinu l treba izračunati.
Stavljajući $x = t$, iz jednačina površi S_1 i S_2 sledi

$$y = \frac{1}{3}\,t^2 \ , \ z = \frac{2}{27}\,t^3 \ .$$

Za tačku $O(0,0,0)$ je $t = x = 0$, a za tačku $B(3,3,2)$ je $t = x = 3$. Zato su parametarske jednačine krive

$$L: \quad x = t \ , \ y = \frac{1}{3}\,t^2 \ , \ z = \frac{2}{27}\,t^3 \ ; \quad t \in [0,3]$$

ili, što je isto,

$$L: \quad y = \frac{1}{3}\,x^2\ ,\ z = \frac{2}{27}\,x^3\ ; \quad x \in [0,3]\ .$$

Kako je

$$\begin{aligned} &y'(x) = \frac{2}{3}\,x\ ,\ z'(x) = \frac{2}{9}\,x^2\ ;\\ &1 + {y'}^2(x) + {z'}^2(x) = 1 + \frac{4}{9}\,x^2 + \frac{4}{81}\,x^4 = \frac{1}{81}\big(2x^2+9\big)^2\ , \end{aligned}$$

dužina l krive L je

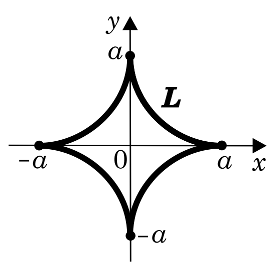
$$\begin{aligned} l &= \int_L d\lambda = \int_0^3 \sqrt{1 + {y'}^2(x) + {z'}^2(x)}\ dx\\ &= \frac{1}{9}\int_0^3 \big(2x^2+9\big)\,dx = \frac{1}{9}\Big(2\frac{x^3}{3} + 9x\Big)\Big|_0^3 = 5\ . \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{3}.}$ Izračunati dužinu krive (*astroida*)

$$L: \quad x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}\ ,\ z = 0\ ,$$

gde je $a > 0$.

Rešenje. Zamenom $y = 0$ u implicitnu jednačinu krive L sledi $x = \pm a$, pa L seče x–osu u tačkama $(a,0,0)$, $(-a,0,0)$ i analogno, L seče y–osu ($x = 0$, $z = 0$) u tačkama $(0,a,0)$, $(0,-a,0)$. Astroida L je prikazana na sledećoj slici. Zbog simetrije u odnosu na x i y–osu, posmatramo samo deo u I kvadrantu xy–ravni ($z = 0$) za koji je $x, y \geq 0$.



Da bismo odredili parametarske jednačine krive L, prelazimo na uopštene polarne koordinate pomoću

$$x = r\cos^3\varphi\ ,\ y = r\sin^3\varphi\ .$$

Smena je oblika (1.4.6) sa neparnim brojem $n = 3$, pa je $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ maksimalni raspon koordinate φ. Zamenom ovako iskazanih x i y u zadatu implicitnu jednačinu krive, nalazimo $r^{2/3} = a^{2/3}$, $r^2 = a^2$ i $r = a > 0$, što ne nameće ograničenja koordinati φ. Zato su parametarske jednačine krive

$$L: \quad x = a\cos^3\varphi\ ,\ y = a\sin^3\varphi\ ,\ z = 0\ ; \quad \varphi \in [0,2\pi]\ .$$

Kako je

$$x'(\varphi) = -3a\cos^2\varphi\sin\varphi\ ,\ y'(\varphi) = 3a\sin^2\varphi\cos\varphi\ ,\ z'(\varphi) = 0\ ;$$
$$x'^2(\varphi) + y'^2(\varphi) + z'^2(\varphi) = 9a^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi$$

i kako za $x, y \geq 0$ iz uvedene smene sledi $\cos\varphi \geq 0$, $\sin\varphi \geq 0$, to je $\varphi \in [0, \pi/2]$ u I kvadrantu i za dužinu l krive L se dobija

$$\begin{aligned} l &= \oint_L d\lambda = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{x'^2(\varphi) + y'^2(\varphi) + z'^2(\varphi)}\ d\varphi \\ &= 4\int_0^{\pi/2} 3a\,|\cos\varphi\sin\varphi|\,d\varphi = 12a\int_0^{\pi/2} \cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi \\ &= 12a\int_0^{\pi/2} \sin\varphi\,d(\sin\varphi) = 12a\frac{\sin^2\varphi}{2}\Big|_0^{\pi/2} = 6a\ . \end{aligned}$$

Vrednosti parametra φ za deo krive L u I kvadrantu smo mogli da dobijemo kao u Zadacima 1 i 2, na osnovu graničnih tačaka $(a, 0, 0)$, $(0, a, 0)$ tog dela. Preciznije, za tačku $(a, 0, 0)$ iz parametarskih jednačina krive L sledi $a = a\cos^3\varphi$, $0 = a\sin^3\varphi$, tj. $1 = \cos^3\varphi$, $0 = \sin^3\varphi$ i $\cos\varphi = 1$, $\sin\varphi = 0$, pa ovoj tački odgovara $\varphi = 0$. Analogno, za tačku $(0, a, 0)$ je $\cos\varphi = 0$, $\sin\varphi = 1$ i $\varphi = \pi/2$.

$\boxed{\textbf{4.}}$ Izračunati dužinu dela krive L_1, koja je presek površi

$$S_1:\quad x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}\ ,\qquad S_2:\quad z = a^{1/3}\big(x^{2/3} + y^{2/3}\big)\ ,$$

za $x, y \geq 0$ i $a > 0$.

Rešenje. Neka je L deo krive L_1, čiju dužinu l treba izračunati. Zbog uslova $x, y \geq 0$, iz jednačine površi S_2 sledi $z \geq 0$, pa se kriva L nalazi u I oktantu. Površ S_1 je cilindrična, sa direktrisom u xy–ravni ($z = 0$) i izvodnicama paralelnim z–osi. Direktrisa ima "istu" jednačinu kao S_1, pa je to astroida iz Zadatka 3. Čitava cilindrična površ, a time i kriva L koja joj pripada, projektuje se na direktrisu (3° iz Napomene 2.3.5). Zato je projekcija L_{xy} krive L na xy–ravan deo astroide u I kvadrantu te ravni.

Prema Zadatku 3, parametarske jednačine projekcije su

$$L_{xy}:\quad x = a\cos^3\varphi\ ,\ y = a\sin^3\varphi\ ,\ z = 0\ ;\quad \varphi \in \Big[0, \frac{\pi}{2}\Big]\ .$$

Tačke sa krive L i njihove projekcije sa krive L_{xy} imaju iste koordinate x i y. Kako kriva L pripada površi S_2, koordinate njenih tačaka zadovoljavaju jednačinu ove površi. Zamenom x, y iz parametarskih jednačina za L_{xy} u jednačinu za S_2 dobija se

$$z = a^{1/3}\big(a^{2/3}\cos^2\varphi + a^{2/3}\sin^2\varphi\big) = a\ ,$$

što je treća koordinata z tačaka sa krive L, pa su parametarske jednačine

$$L:\quad x = a\cos^3\varphi\ ,\ y = a\sin^3\varphi\ ,\ z = a\ ;\quad \varphi \in \Big[0, \frac{\pi}{2}\Big]\ .$$

Budući da je $z = a$ konstanta, to je $z'(\varphi) = 0$ i dužina

$$l = \frac{3}{2}\, a$$

se izračunava kao u Zadatku 3.

Prema rezultatu iz Zadatka 3, dužina projekcije L_{xy} je $6a/4 = 3a/2$. Sve tačke sa krive L imaju istu treću koordinatu $z = a$, što znači da se L nalazi u ravni $z = a$, koja je paralelna xy–ravni. Zato kriva L i njena projekcija L_{xy} imaju istu dužinu.

$\boxed{\mathbf{5}.}$ Izračunati površinu dela cilindrične površi

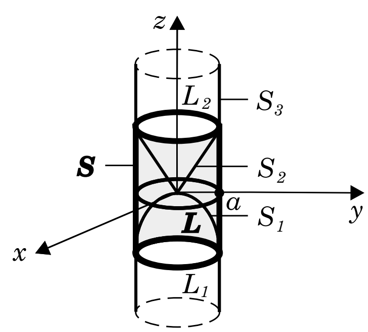
$$S_3 : \quad x^2 + y^2 = a^2$$

koji se nalazi između površi

$$S_1 : \quad z = -\left(x^2 + y^2\right) , \qquad S_2 : \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}\ ,$$

pri čemu je $a > 0$.

Rešenje. Neka je cilindrična površ S deo zadate cilindrične površi S_3, čiju površinu m treba izračunati. Takođe, neka je L direktrisa, a L_1 i L_2 bazisi površi S koji nastaju u preseku S_3 sa S_1 i S_3 sa S_2 redom. Površ S_1 je paraboloid, a S_2 konus sa z–osom kao osovinom.



Površinu m izračunavamo kao zbir

$$m = m_1 + m_2\ ,$$

gde je m_1 površina onog dela površi S koji se nalazi ispod xy–ravni $(z \leq 0)$, a m_2 površina dela iznad xy–ravni $(z \geq 0)$. Kako je bazis L_1 na paraboloidu, a bazis L_2 na konusu, uz oznake

$$S_1 : \quad z = f_1(x,y) = -\left(x^2 + y^2\right) \leq 0\ , \qquad S_2 : \quad z = f_2(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$$

i prema geometrijskom tumačenju krivolinijskog integrala I vrste, dobijamo

$$m_1 = \left|\oint_L f_1(x,y)\, d\lambda\right| = \oint_L \left(x^2 + y^2\right) d\lambda\ ,\ m_2 = \oint_L f_2(x,y)\, d\lambda = \oint_L \sqrt{x^2 + y^2}\ d\lambda\ .$$

Direktrisa

$$L: \quad x^2 + y^2 = a^2 \ , \ z = 0$$

je centralna kružnica u xy–ravni ($z = 0$) poluprečnika a. Uvođenjem polarnih koordinata sa

$$x = r\cos\varphi \ , \ y = r\sin\varphi \ ,$$

iz jednačine kružnice sledi $r = a$ i njene parametarske jednačine glase

$$L: \quad x = a\cos\varphi \ , \ y = a\sin\varphi \ , \ z = 0 \ ; \quad \varphi \in [0, 2\pi] \ .$$

Određujući

$$\begin{aligned}
&x^2(\varphi) + y^2(\varphi) = a^2 \ ; \\
&x'(\varphi) = -a\sin\varphi \ , \ y'(\varphi) = a\cos\varphi \ , \ z'(\varphi) = 0 \ ; \\
&{x'}^2(\varphi) + {y'}^2(\varphi) + {z'}^2(\varphi) = a^2 \ ,
\end{aligned}$$

nalazimo dalje

$$\begin{aligned}
m_1 &= \int_0^{2\pi} \bigl[x^2(\varphi) + y^2(\varphi)\bigr] \sqrt{{x'}^2(\varphi) + {y'}^2(\varphi) + {z'}^2(\varphi)} \ d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} a^2\sqrt{a^2} \ d\varphi = a^3 \ \varphi \Big|_0^{2\pi} = 2a^3\pi \ , \\
m_2 &= \int_0^{2\pi} \sqrt{x^2(\varphi) + y^2(\varphi)} \sqrt{{x'}^2(\varphi) + {y'}^2(\varphi) + {z'}^2(\varphi)} \ d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2} \sqrt{a^2} \ d\varphi = a^2 \ \varphi \Big|_0^{2\pi} = 2a^2\pi \ ,
\end{aligned}$$

pa je

$$m = 2a^3\pi + 2a^2\pi = 2a^2(a+1)\pi \ .$$

$\boxed{\mathbf{6}}$. Izračunati krivolinijski integral I vrste

$$I = \oint_L |y| \, d\lambda \ ,$$

gde je L kriva (*lemniskata*)

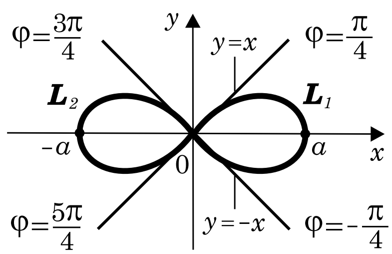
$$L: \quad \bigl(x^2 + y^2\bigr)^2 = a^2\bigl(x^2 - y^2\bigr) \ , \ z = 0$$

i $a > 0$.

Rešenje. U implicitnoj jednačini krive L je $\bigl(x^2 + y^2\bigr)^2 \geq 0$, pa mora da bude i $x^2 - y^2 \geq 0$, odakle je redom: $y^2 \leq x^2$, $|y| \leq |x|$, $-|x| \leq y \leq |x|$ i

$$-x \leq y \leq x \ , \ x \geq 0 \ ; \ x \leq y \leq -x \ , \ x \leq 0 \ .$$

Dakle, kriva L se nalazi u xy–ravni $(z=0)$ "iznad" prave $y=-x$ i "ispod" prave $y=x$ za $x \geq 0$, a obrnuto za $x \leq 0$. Dalje, za $y=0$ iz jednačine krive L sledi $x^2\big(x^2-a^2\big)=0$ i $x=0$, $x=\pm a$, pa L seče y–osu u tačkama $(0,0,0)$, $(a,0,0)$, $(-a,0,0)$. Za $x=0$ se dobija $y^4=-a^2y^2$ i $y=0$, pa je $(0,0,0)$ presečna tačka krive L i y–ose. Kriva L je dobro poznata Bernoullieva lemniskata.



Sa slike vidimo da lemniskata L nije zatvorena prosta kriva u smislu Definicije 1.1.9. U stvari, lemniskata se sastoji od dve zatvorene krive L_1 i L_2 sa zajedničkom tačkom $(0,0,0)$. Ova tačka je singularna tačka implicitne jednačine i to *dvostruka tačka* ([**2**], str. 97).

Uvođenjem polarnih koordinata sa

$$x = r\cos\varphi\ ,\ \ y = r\sin\varphi\ ,$$

iz jednačine krive L sledi $r^2 = a^2\cos 2\varphi$. Kako je $r^2 \geq 0$, to mora da bude $\cos 2\varphi \geq 0$, a ovo važi za $2\varphi \in [-\pi/2, \pi/2] \cup [3\pi/2, 5\pi/2]$, tj.

$$\varphi \in \Big[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\Big] \cup \Big[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\Big]\ ,$$

što je u skladu sa prethodnim zaključkom o položaju krive L u xy–ravni. Zbog $a>0$, u navedenim segmentima je

$$r = a\sqrt{\cos 2\varphi}\ ,$$

pa je $L = L_1 \cup L_2$, gde L_1 i L_2 imaju parametarske jednačine

$$L_1:\quad x = a\cos\varphi\sqrt{\cos 2\varphi}\ ,\ y = a\sin\varphi\sqrt{\cos 2\varphi}\ ,\ z=0\ ;\quad \varphi \in \Big[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\Big]\ ,$$

$$L_2:\quad x = a\cos\varphi\sqrt{\cos 2\varphi}\ ,\ y = a\sin\varphi\sqrt{\cos 2\varphi}\ ,\ z=0\ ;\quad \varphi \in \Big[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\Big]\ .$$

Objedinjene, ove jednačine se smatraju parametarskim jednačinama krive

$$L:\quad x = a\cos\varphi\sqrt{\cos 2\varphi}\ ,\ y = a\sin\varphi\sqrt{\cos 2\varphi}\ ,\ z=0\ ;\quad \varphi \in \Big[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\Big] \cup \Big[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\Big]\ .$$

Integral I postaje

$$I = I_1 + I_2\ ,$$

gde je

$$I_1 = \oint_{L_1} |y|\, d\lambda\ ,\ I_2 = \oint_{L_2} |y|\, d\lambda\ .$$

Kako je

$$x'^2(\varphi)+y'^2(\varphi)+z'^2(\varphi)=\frac{a^2}{\cos 2\varphi}\ ;\ d\lambda=\sqrt{x'^2(\varphi)+y'^2(\varphi)+z'^2(\varphi)}\ d\varphi=\frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\ d\varphi$$

i $|y|=a|\sin\varphi|\sqrt{\cos 2\varphi}$,

$$\sin\varphi\ge 0\ ,\quad \varphi\in\Big[0,\frac{\pi}{4}\Big]\cup\Big[\frac{3\pi}{4},\pi\Big]\ ;\qquad \sin\varphi\le 0\ ,\quad \varphi\in\Big[-\frac{\pi}{4},0\Big]\cup\Big[\pi,\frac{5\pi}{4}\Big]\ ,$$

to je

$$\begin{aligned}
I_1&=\int_{-\pi/4}^{0}-a\sin\varphi\sqrt{\cos 2\varphi}\,\frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\,d\varphi+\int_0^{\pi/4}a\sin\varphi\sqrt{\cos 2\varphi}\,\frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\,d\varphi\\
&=-a^2\int_{-\pi/4}^{0}\sin\varphi\,d\varphi+a^2\int_0^{\pi/4}\sin\varphi\,d\varphi=a^2\cos\varphi\,\Big|_{-\pi/4}^{0}-a^2\cos\varphi\,\Big|_0^{\pi/4}\\
&=(2-\sqrt{2})a^2\ ,\\
I_2&=\int_{3\pi/4}^{\pi}a\sin\varphi\sqrt{\cos 2\varphi}\,\frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\,d\varphi+\int_{\pi}^{5\pi/4}-a\sin\varphi\sqrt{\cos 2\varphi}\,\frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\,d\varphi\\
&=a^2\int_{3\pi/4}^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi-a^2\int_{\pi}^{5\pi/4}\sin\varphi\,d\varphi=-a^2\cos\varphi\,\Big|_{3\pi/4}^{\pi}+a^2\cos\varphi\,\Big|_{\pi}^{5\pi/4}\\
&=(2-\sqrt{2})a^2
\end{aligned}$$

i konačno

$$I=I_1+I_2=2(2-\sqrt{2})a^2\ .$$

7. Izračunati krivolinijski integral I vrste

$$I=\oint_L\sqrt{x^2+y^2}\ d\lambda\ ,$$

gde je L kriva

$$L:\quad x^2+y^2=ax\ ,\ z=0$$

i $a>0$.

Uputstvo. U Primeru 2.3.2 smo već našli parametarske jednačine krive

$$L:\quad x=a\cos^2\varphi\ ,\ y=a\cos\varphi\sin\varphi\ ,\ z=0\ ;\quad \varphi\in\Big[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\Big]$$

i odredili

$$x^2(\varphi)+y^2(\varphi)=a^2\cos^2(\varphi)\ ;\ x'^2(\varphi)+y'^2(\varphi)+z'^2(\varphi)=a^2\ .$$

Zato je

$$I=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}a|\cos\varphi|\,a\,d\varphi=a^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\varphi\,d\varphi=a^2\sin\varphi\,\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}=2a^2\ .$$

Krivolinijski integrali po koordinatama (II vrste)

Ako je

$$L: \quad x = x(t)\ ,\ y = y(t)\ ,\ z = z(t)\ ; \quad t \in [\alpha, \beta]\ ,$$

tada je

$$\begin{aligned}
&\int_{L^+} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz \\
&= \int_\alpha^\beta \Big[P\big(x(t),y(t),z(t)\big)\,x'(t) + Q\big(x(t),y(t),z(t)\big)\,y'(t) \\
&+ R\big(x(t),y(t),z(t)\big)\,z'(t)\Big]\,dt\ .
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{8.}}$ Izračunati potpuni krivolinijski integral II vrste

$$I = \int_L x^3\,dx + 3y^2z\,dy - x^2y\,dz\ ,$$

gde je L deo prave između tačaka $A(1,2,3)$ i $B(-1,2,1)$, orijentisan od tačke A ka tački B.

Rešenje. Neka je L_1 prava koja prolazi kroz tačke A i B. Simetrični oblik jednačine prave kroz dve tačke (x_1,y_1,z_1) i (x_2,y_2,z_2) je ([**3**], str. 274)

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}\ .$$

Stavljajući $(x_1,y_1,z_1) = (1,2,3)$, $(x_2,y_2,z_2) = (-1,2,1)$ i označavajući razlomke sa t, dobija se

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{-2} = t\ ,$$

odakle slede parametarske jednačine prave

$$L_1: \quad x = 1-2t\ ,\ y = 2\ ,\ z = 3-2t\ ; \quad t \in \mathbb{R}\ .$$

Za tačku A je $x = 1$, $z = 3$, pa je $t = 0$. Za tačku B je $x = -1$, $z = 1$, pa je $t = 1$. Zato L ima parametarske jednačine

$$L: \quad x = 1-2t\ ,\ y = 2\ ,\ z = 3-2t\ ; \quad t \in [0,1]\ .$$

S obzirom na orijentaciju od A ka B, parametar t se menja od $t = 0$ do $t = 1$.

Nalazeći

$$x'(t) = -2\ ,\ y'(t) = 0\ ,\ z'(t) = -2\ ,$$

integral I postaje

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left[x^3(t)x'(t) + 3y^2(t)z(t)y'(t) - x^2(t)y(t)z'(t)\right] dt \\ &= \int_0^1 \left[-2(1-2t)^3 + 4(1-2t)^2\right] dt = 2\int_0^1 \left(1 - 2t - 4t^2 + 8t^3\right) dt = \frac{4}{3} \ . \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{9.}}$ Izračunati potpuni krivolinijski integral II vrste

$$I = \int_L \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + (y-6)^2} \ ,$$

gde je L deo kružnice

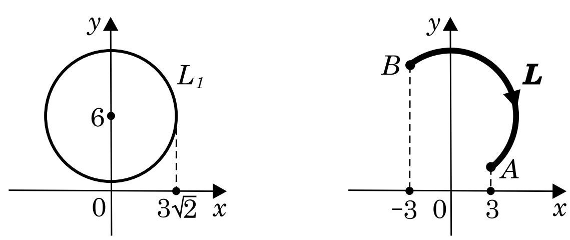
$$L_1 : \quad x^2 + y^2 - 12y + 18 = 0 \ , \ z = 0$$

između tačaka $A(3,3,0)$ i $B(-3,9,0)$, orijentisan od tačke B ka tački A.

Rešenje. Integral I je potpuni krivolinijski (2.2.3) sa $R(x,y,z) \equiv 0$. Kružnica

$$L_1 : \quad x^2 + (y-6)^2 = 18 \ , \ z = 0$$

je u xy–ravni $(z = 0)$, sa centrom u tački $(0,6,0)$ i poluprečnika $3\sqrt{2}$.



Kako je L_1 "pomerena" kružnica, uvodimo smenu

$$x = r\cos\varphi \ , \ y - 6 = r\sin\varphi$$

i dobijamo $r = 3\sqrt{2}$, kao i parametarske jednačine

$$L_1 : \quad x = 3\sqrt{2}\,\cos\varphi \ , \ y = 6 + 3\sqrt{2}\,\sin\varphi \ , \ z = 0 \ ; \quad \varphi \in [-\pi, \pi] \ .$$

Za tačku $A(3,3,0)$ je

$$3 = 3\sqrt{2}\,\cos\varphi \ , \ 3 = 6 + 3\sqrt{2}\,\sin\varphi \ ,$$

odakle je $\cos\varphi = \sqrt{2}/2$, $\sin\varphi = -\sqrt{2}/2$, pa je $\varphi = -\pi/4$. Za tačku $B(-3,9,0)$ je

$$-3 = 3\sqrt{2}\,\cos\varphi \ , \ 9 = 6 + 3\sqrt{2}\,\sin\varphi \ ,$$

odakle je $\cos\varphi = -\sqrt{2}/2$, $\sin\varphi = \sqrt{2}/2$ i $\varphi = 3\pi/4$. Dakle, parametarske jednačine krive L su

$$L: \quad x = 3\sqrt{2}\cos\varphi \ , \ y = 6 + 3\sqrt{2}\sin\varphi \ , \ z = 0 \ ; \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right] \ ,$$

pri čemu se za zadatu orijentaciju parametar φ menja od $\varphi = 3\pi/4$ do $\varphi = -\pi/4$.

Nalazeći

$$x'(\varphi) = -3\sqrt{2}\sin\varphi \ , \ y'(\varphi) = 3\sqrt{2}\cos\varphi \ , \ z'(\varphi) = 0$$

i sređujući podintegralni izraz, dobija se

$$I = \int_{3\pi/4}^{-\pi/4} \frac{-y(\varphi)x'(\varphi) + x(\varphi)y'(\varphi)}{x^2(\varphi) + \big[y(\varphi) - 6\big]^2}\, d\varphi = \int_{3\pi/4}^{-\pi/4} (1 + \sqrt{2}\sin\varphi)\, d\varphi = -(2+\pi) \ .$$

$\boxed{\mathbf{10}}$. Izračunati potpuni krivolinijski integral II vrste

$$I = \oint_L y\,dx - 2x\,dy \ ,$$

gde je $L = L_1 \cup L_2$, kriva L_1 je deo kružnice

$$L_3: \quad x^2 + y^2 = 2x \ , \ z = 0$$

koji se nalazi van kruga ograničenog kružnicom

$$L_4: \quad x^2 + y^2 = 2y \ , \ z = 0 \ ,$$

a kriva L_2 je deo kružnice L_4 koji je van kruga ograničenog sa L_3. Posmatrano sa pozitivnog dela z–ose, L je negativno orijentisana.

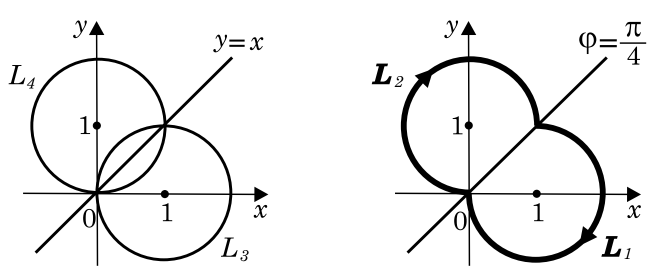
Rešenje. Kružnice L_3 i L_4 pripadaju xy–ravni ($z = 0$). Rešavanjem sistema

$$x^2 + y^2 = 2x \ , \ x^2 + y^2 = 2y$$

nalazimo njihove presečne tačke $(0,0,0)$, $(1,1,0)$, koje leže na pravoj $y = x$. S obzirom na

$$L_3: \quad (x-1)^2 + y^2 = 1 \ , \qquad L_4: \quad x^2 + (y-1)^2 = 1 \ ,$$

kružnica L_3 ima centar u tački $(1,0,0)$ na x–osi, a L_4 ima centar u tački $(0,1,0)$ na y–osi.



Obe kružnice imaju centar na nekoj od koordinatnih osa i prolaze kroz koordinatni početak, pa mogu direktno da se uvedu polarne koordinate smenom

$$x = r\cos\varphi \ , \ \ y = r\sin\varphi \ ,$$

posle koje se iz jednačina kružnica dobija $r = 2\cos\varphi$ za L_3 i $r = 2\sin\varphi$ za L_4. Kako je L_1 deo kružnice L_3 "ispod", a L_2 deo kružnice L_4 "iznad" prave $y = x$ i kako pravoj $y = x$ odgovara ugao $\varphi = \pi/4$, dobijamo parametarske jednačine

$$\begin{aligned}
L_1 : &\quad x = 2\cos^2\varphi \ , \ \ y = 2\cos\varphi\sin\varphi \ , \ \ z = 0 \ ; \quad \varphi \in \Big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\Big] \ , \\
L_2 : &\quad x = 2\cos\varphi\sin\varphi \ , \ \ y = 2\sin^2\varphi \ , \ \ z = 0 \ ; \quad \varphi \in \Big[\frac{\pi}{4}, \pi\Big] \ .
\end{aligned}$$

Zbog negativne orijentacije krive L, ugao φ se menja od $\varphi = \pi/4$ do $\varphi = -\pi/2$ za krivu L_1 i od $\varphi = \pi$ do $\varphi = \pi/4$ za krivu L_2.

Kriva $L = L_1 \cup L_2$ nema jedinstvenu parametrizaciju. Zato integral I rastavljamo na dva integrala po delovima krive

$$I = I_1 + I_2 \ ,$$

gde je

$$I_1 = \int_{L_1} y\,dx - 2x\,dy \ , \ \ I_2 = \int_{L_2} y\,dx - 2x\,dy \ .$$

Za krivu L_1 je

$$x'(\varphi) = -4\cos\varphi\sin\varphi \ , \ \ y'(\varphi) = -2\sin^2\varphi + 2\cos^2\varphi \ ,$$

a za krivu L_2 je

$$x'(\varphi) = -2\sin^2\varphi + 2\cos^2\varphi \ , \ \ y'(\varphi) = 4\cos\varphi\sin\varphi \ ,$$

pa sređivanjem podintegralnih izraza sledi

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\pi/4}^{-\pi/2} \big[y(\varphi)x'(\varphi) - 2x(\varphi)y'(\varphi)\big]\,d\varphi = -8\int_{\pi/4}^{-\pi/2} \cos^4\varphi\,d\varphi \ , \\
I_2 &= -4\int_{\pi}^{\pi/4} \big(\sin^4\varphi + 3\cos^2\varphi\sin^2\varphi\big)\,d\varphi \ .
\end{aligned}$$

Sukcesivnom primenom jednakosti

$$\cos^2\varphi = \frac{1+\cos 2\varphi}{2} \ , \ \sin^2\varphi = \frac{1-\cos 2\varphi}{2}$$

transformišemo izraze

$$\begin{aligned}
\cos^4\varphi &= \big(\cos^2\varphi\big)^2 = \Big(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\Big)^2 = \frac{1}{4}\big(1 + 2\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi\big) \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2\varphi + \frac{1}{4}\,\frac{1+\cos 4\varphi}{2} = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2\varphi + \frac{1}{8}\cos 4\varphi \ , \\
\sin^4\varphi &= \big(\sin^2\varphi\big)^2 = \Big(\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\Big)^2 = \frac{1}{4}\big(1 - 2\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi\big) \\
&= \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2\varphi + \frac{1}{8}\cos 4\varphi \ , \\
\cos^2\varphi\sin^2\varphi &= \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\,\frac{1-\cos 2\varphi}{2} = \frac{1}{4}\big(1 - \cos^2 2\varphi\big) = \frac{1}{4}\sin^2 2\varphi \\
&= \frac{1}{4}\,\frac{1-\cos 4\varphi}{2} = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 4\varphi
\end{aligned}$$

i za integrale I_1, I_2 dobijamo

$$\begin{aligned}
I_1 &= -8\int_{\pi/4}^{-\pi/2}\Big(\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2\varphi+\frac{1}{8}\cos 4\varphi\Big)\,d\varphi \\
&= -3\int_{\pi/4}^{-\pi/2} d\varphi - 4\int_{\pi/4}^{-\pi/2}\cos 2\varphi\,d\varphi - \int_{\pi/4}^{-\pi/2}\cos 4\varphi\,d\varphi \\
&= -3\varphi\,\Big|_{\pi/4}^{-\pi/2} - 2\int_{\pi/4}^{-\pi/2}\cos 2\varphi\,d(2\varphi) - \frac{1}{4}\int_{\pi/4}^{-\pi/2}\cos 4\varphi\,d(4\varphi) \\
&= \frac{9}{4}\,\pi - 2\sin 2\varphi\,\Big|_{\pi/4}^{-\pi/2} - \frac{1}{4}\sin 4\varphi\,\Big|_{\pi/4}^{-\pi/2} = 2+\frac{9}{4}\,\pi\ , \\
I_2 &= -4\int_{\pi}^{\pi/4}\Big(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\cos 2\varphi-\frac{1}{4}\cos 4\varphi\Big)\,d\varphi \\
&= -4\Big(\frac{3}{4}\,\varphi-\frac{1}{4}\sin 2\varphi-\frac{1}{16}\sin 4\varphi\Big)\,\Big|_{\pi}^{\pi/4} = 1+\frac{9}{4}\,\pi\ .
\end{aligned}$$

Konačno je

$$I = I_1 + I_2 = 3 + \frac{9}{2}\,\pi\ .$$

$\boxed{\mathbf{11}}$. Izračunati potpuni krivolinijski integral II vrste

$$I = \oint_L y^2\,dx - x^2\,dy + z^2\,dz\ ,$$

gde je kriva L presek površi

$$S: \quad x^2 + y + z^2 = 1$$

sa koordinatnim ravnima za $x, y, z \geq 0$. Posmatrano sa pozitivnog dela x–ose, L je pozitivno orijentisana.

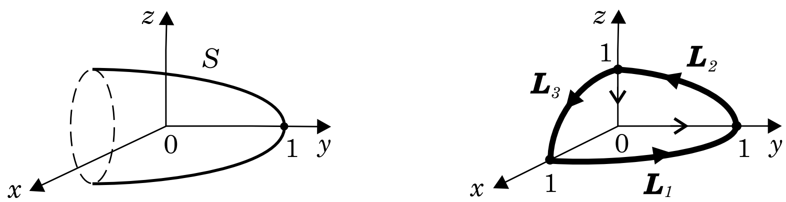
Rešenje. Ako jednačinu površi S zapišemo u obliku

$$S: \quad y = -\big(x^2 + z^2\big) + 1\ ,$$

vidimo da je S paraboloid sa y–osom kao osovinom, pomeren "udesno" za 1 duž y–ose. Kako su jednačine y–ose $x = 0$, $z = 0$, rešavanjem sistema

$$x^2 + y + z^2 = 1\ ,\ x = 0\ ,\ z = 0\ ,$$

tj. zamenom $x = 0$, $z = 0$ u jednačinu $x^2 + y + z^2 = 1$, sledi $y = 1$ i presečna (zajednička) tačka y–ose i paraboloida $(0, 1, 0)$. Analogno, smenama $y = 0$, $z = 0$ i $x = 0$, $y = 0$ u $x^2 + y + z^2 = 1$ slede presečne tačke $(1, 0, 0)$ i $(0, 0, 1)$ paraboloida sa x i z–osom redom. Neka su L_1, L_2 i L_3 presečne krive paraboloida S sa xy, yz i zx–koordinatnom ravni redom u I oktantu ($x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$). Paraboloid S i zatvorena kriva $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3$ su prikazani na sledećim slikama. Zadata orijentacija krive L se odnosi, u stvari, na orijentaciju njene projekcije na yz–ravan, a kriva L je orijentisana samo saglasno projekciji (Slika 1.2.9 i komentar uz nju).



Jednačina xy–ravni je $z = 0$, pa se jednačina krive L_1 nalazi zamenom $z = 0$ u jednačinu paraboloida $x^2 + y + z^2 = 1$. Pri tome je $x \geq 0$, $y \geq 0$. Takođe, zamenom $x = 0$ i $y = 0$ u $x^2 + y + z^2 = 1$, slede jednačine krivih L_2 za $y \geq 0$, $z \geq 0$ i L_3 za $x \geq 0$, $z \geq 0$. Dobijaju se implicitne jednačine:

$$L_1 : \quad x^2 + y = 1 \ , \ z = 0 \ , \qquad L_2 : \quad y + z^2 = 1 \ , \ x = 0 \ , \qquad L_3 : \quad x^2 + z^2 = 1 \ , \ y = 0 \ .$$

Eksplicitne jednačine krivih L_1 i L_2 su

$$L_1 : \quad y = 1 - x^2 \ , \ z = 0 \ , \qquad L_2 : \quad y = 1 - z^2 \ , \ x = 0 \ ,$$

što znači da se radi o delovima parabola u xy i yz–koordinatnoj ravni redom. Kriva L_3 je deo centralne kružnice u zx–ravni. Imajući u vidu poslednju sliku i ograničenja $x \in [0, 1]$, $z \in [0, 1]$, kao i Napomenu 1.4.3, parametarske jednačine krivih L_1 i L_2 su

$$L_1 : \quad y = 1 - x^2 \ , \ z = 0 \ ; \quad x \in [0, 1] \ ,$$
$$L_2 : \quad x = 0 \ , \ y = 1 - z^2 \ ; \quad z \in [0, 1] \ ,$$

pri čemu je za parametar izabrana Descartesova koordinata x u slučaju L_1 i z u slučaju L_2. Uvodeći polarne koordinate u zx–ravni sa

$$z = r \cos \varphi \ , \ x = r \sin \varphi$$

i poštujući ograničenje $\varphi \in [0, \pi/2]$ u posmatranoj situaciji, iz jednačine krive L_3 sledi $r = 1$ i njene parametarske jednačine glase

$$L_3 : \quad x = \sin \varphi \ , \ y = 0 \ , \ z = \cos \varphi \ ; \quad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \ .$$

Za zadatu orijentaciju krive L, izabrani parametri x, z i φ se menjaju od $x = 1$ do $x = 0$, od $z = 0$ do $z = 1$ i od $\varphi = 0$ do $\varphi = \pi/2$.

Za krivu L_1 je

$$y'(x) = -2x \ , \ z'(x) = 0 \ ,$$

za krivu L_2

$$x'(z) = 0 \ , \ y'(z) = -2z$$

i za krivu L_3

$$x'(\varphi) = \cos \varphi \ , \ y'(\varphi) = 0 \ , \ z'(\varphi) = -\sin \varphi \ .$$

Zato je

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{L_1} y^2\,dx - x^2\,dy + z^2\,dz \\
&= \int_1^0 \big(y^2(x) - x^2\,y'(x) + z^2(x)\,z'(x)\big)\,dx = \int_1^0 \big(1 - 2x^2 + x^4 + 2x^3\big)\,dx = -\frac{31}{30}\ , \\
I_2 &= \int_{L_2} y^2\,dx - x^2\,dy + z^2\,dz \\
&= \int_0^1 \big(y^2(z)\,x'(z) - x^2(z)\,y'(z) + z^2\big)\,dz = \int_0^1 z^2\,dz = \frac{1}{3}\ , \\
I_3 &= \int_{L_3} y^2\,dx - x^2\,dy + z^2\,dz \\
&= \int_0^{\pi/2} \big(y^2(\varphi)\,x'(\varphi) - x^2(\varphi)\,y'(\varphi) + z^2(\varphi)\,z'(\varphi)\big)\,d\varphi \\
&= \int_0^{\pi/2} -\cos^2\varphi\sin\varphi\,d\varphi = \int_0^{\pi/2} \cos^2\varphi\,d(\cos\varphi) = \frac{\cos^3\varphi}{3}\,\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

i, s obzirom na $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3$,

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = -\frac{31}{30}\ .$$

Krivu L_3 smo mogli da parametrizujemo kao i krive L_1, L_2, pomoću neke od Descartesovih koordinata x ili z, npr.

$$L_3:\quad x = \sqrt{1-z^2}\ ,\ \ y = 0\ ;\quad z \in [0,1]\ ,$$

pri čemu se parametar z za zadatu orijentaciju menja od $z = 1$ do $z = 0$.

Posmatrana u celini, kriva L je prostorna. Sastavljana je od delova L_1, L_2, L_3 sa različitom parametrizacijom (4° iz Napomene 2.3.5). Svaki od delova pripada nekoj od koordinatnih ravni i poklapa se sa svojom projekcijom na tu koordinatnu ravan.

$\boxed{\mathbf{12.}}$ Izračunati potpuni krivolinijski integral II vrste

$$I = \oint_L y^2\,dx - x^2\,dy + z^2\,dz\ ,$$

gde je kriva L presek površi

$$S:\quad y = 1 - \sqrt{x^2+z^2}$$

sa koordinatnim ravnima za $x, y, z \geq 0$. Posmatrano sa pozitivnog dela x–ose, L je pozitivno orijentisana.

Uputstvo. Koristeći iste oznake i postupajući kao u Zadatku 11, dobija se

$$\begin{aligned}
&L_1: \quad y = 1 - x\ ,\ z = 0\ ;\quad x \in [0,1]\ ,\\
&L_2: \quad z = 1 - y\ ,\ x = 0\ ;\quad y \in [0,1]\ ,\\
&L_3: \quad z = \cos\varphi\ ,\ x = \sin\varphi\ ,\ y = 0\ ;\quad \varphi \in \Big[0, \frac{\pi}{2}\Big]\ ,
\end{aligned}$$

pri čemu se izabrani parametri menjaju od $x=1$ do $x=0$, od $y=1$ do $y=0$ i od $\varphi=0$ do $\varphi=\pi/2$. Dobija se

$$I_1=-\frac{2}{3}\ ,\ I_2=\frac{1}{3}\ ,\ I_3=-\frac{1}{3}\ ;\ I=-\frac{2}{3}\ .$$

13. Izračunati potpuni krivolinijski integral II vrste

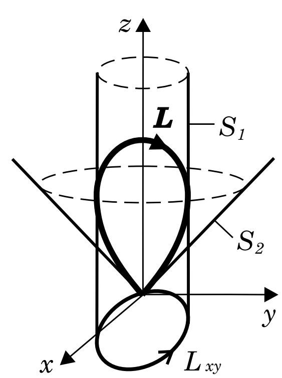
$$I=\oint_L y\,dx+x^2\,dy+z\,dz\ ,$$

gde je kriva L presek površi

$$S_1:\quad x^2+y^2=2(x+y)\ ,\qquad S_2:\quad z=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x^2+y^2}\ .$$

Posmatrano sa pozitivnog dela z–ose, L je pozitivno orijentisana.

Rešenje. Površ S_1 je cilindrična sa direktrisom u xy–ravni ($z=0$) i izvodnicama paralelnim z–osi. Površ S_2 je konus sa z–osom kao osovinom.



Direktrisa cilindrične površi je istovremeno i projekcija L_{xy} krive L na xy–ravan (3° iz Napomene 2.3.5). Zato je

$$L_{xy}:\quad x^2+y^2=2(x+y)\ ,\ z=0\ ,$$

što je "pomerena" kružnica

$$L_{xy}:\quad (x-1)^2+(y-1)^2=2\ ,$$

sa centrom u tački $(1,1,0)$ i poluprečnika $\sqrt{2}$. Uvođenjem smene

$$x-1=r\cos\varphi\ ,\ y-1=r\sin\varphi\ ,$$

sledi $r=\sqrt{2}$ i parametarske jednačine glase

$$L_{xy}:\quad x=1+\sqrt{2}\cos\varphi\ ,\ y=1+\sqrt{2}\sin\varphi\ ,\ z=0\ ;\quad \varphi\in[0,2\pi]\ .$$

Kriva L pripada konusu S_2, pa koordinate njenih tačaka zadovoljavaju jednačinu konusa. Takođe, tačke na krivoj L i njihove projekcije na L_{xy} imaju iste koordinate x i y. Zamenom x, y iz parametarskih jednačina projekcije u jednačinu konusa dobijamo i z–koordinatu

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{2+\sqrt{2}\,(\cos\varphi+\sin\varphi)}\ .$$

Parametarske jednačine krive L su

$$L:\quad x = 1+\sqrt{2}\,\cos\varphi\ ,\ y = 1+\sqrt{2}\,\sin\varphi\ ,\ z = \sqrt{2+\sqrt{2}\,(\cos\varphi+\sin\varphi)}\ ;\quad \varphi\in[0,2\pi]\ .$$

Zadata orijentacija krive L, kao saglasna pozitivnoj orijentaciji njene projekcije L_{xy}, nameće promenu parametra φ od $\varphi=0$ do $\varphi=2\pi$.

Nalazeći

$$x'(\varphi) = -\sqrt{2}\,\sin\varphi\ ,\ y'(\varphi) = \sqrt{2}\,\cos\varphi\ ,\ z'(\varphi) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\cos\varphi-\sin\varphi}{\sqrt{2+\sqrt{2}\,(\cos\varphi+\sin\varphi)}}$$

i sređujući podintegralni izraz, integral I postaje

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi}\big[y(\varphi)x'(\varphi)+x^2(\varphi)y'(\varphi)+z(\varphi)z'(\varphi)\big]\,d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi}\Big(\frac{3\sqrt{2}}{2}\cos\varphi-\frac{3\sqrt{2}}{2}\sin\varphi+4\cos^2\varphi-2\sin^2\varphi+2\sqrt{2}\,\cos^3\varphi\Big)\,d\varphi\ . \end{aligned}$$

Kako je

$$\cos^3\varphi = \big(1-\sin^2\varphi\big)\cos\varphi = \cos\varphi-\cos\varphi\sin^2\varphi$$

i, prema formulama navedenim u Zadatku 10,

$$4\cos^2\varphi-2\sin^2\varphi = 1+3\cos 2\varphi\ ,$$

dobija se

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi}\Big(1+\frac{7\sqrt{2}}{2}\cos\varphi-\frac{3\sqrt{2}}{2}\sin\varphi+3\cos 2\varphi-2\sqrt{2}\,\cos\varphi\sin^2\varphi\Big)\,d\varphi \\ &= \Big(\varphi+\frac{7\sqrt{2}}{2}\sin\varphi+\frac{3\sqrt{2}}{2}\cos\varphi+\frac{3}{2}\sin 2\varphi\Big)\Big|_0^{2\pi}-2\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,d(\sin\varphi) \\ &= 2\pi-2\sqrt{2}\,\frac{\sin^3\varphi}{3}\Big|_0^{2\pi} = 2\pi\ . \end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{14}.}$ Izračunati potpuni krivolinijski integral II vrste

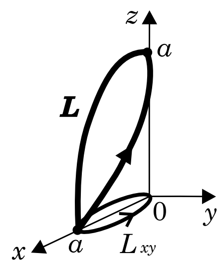
$$I = \oint_L y^2\,dx+z^2\,dy+x^2\,dz\ ,$$

gde je kriva L (*Vivianieva*) presek površi

$$S_1:\quad x^2+y^2 = ax\ ,\qquad S_2:\quad x^2+y^2+z^2 = a^2$$

za $z \geq 0$ i $a > 0$. Posmatrano sa pozitivnog dela z–ose, L je pozitivno orijentisana.

Rešenje. Površi S_1 i S_2 su iste kao u Primeru 2.3.2, pa je na sledećoj slici izdvojen samo onaj deo sa Slike 2.3.4 koji je značajan za ovaj zadatak. Sa L_{xy} je označena projekcija krive L na xy–ravan, koja je istovremeno i direktrisa cilindrične površi S_1 (3° iz Napomene 2.3.5).



Parametarske jednačine projekcije (kriva L iz Primera 2.3.2 i Zadatka 7) smo već odredili

$$L_{xy}: \quad x = a\cos^2\varphi\ ,\ y = a\cos\varphi\sin\varphi\ ,\ z = 0\ ; \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] .$$

Ovako iskazane x, y smenjujemo u jednačinu sfere i dobijamo

$$z^2 = a^2 - a^2\cos^4\varphi - a^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi = a^2 - a^2\cos^2\varphi = a^2\sin^2\varphi\ ,$$

odakle je $z = a|\sin\varphi|$ zbog uslova $z \geq 0$. Parametarske jednačine krive L su

$$L: \quad x = a\cos^2\varphi\ ,\ y = a\cos\varphi\sin\varphi\ ,\ z = a|\sin\varphi|\ ; \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] .$$

Za zadatu orijentaciju krive L, tj. orijentaciju projekcije L_{xy}, parametar φ se menja od $\varphi = -\pi/2$ do $\varphi = \pi/2$.

Radi jednostavnosti zapisivanja, potpuni krivolinijski integral II vrste rastavljamo na integrale po koordinatama

$$I = I_1 + I_2 + I_3\ ,$$

gde je

$$I_1 = \oint_L y^2\,dx\ ,\ I_2 = \oint_L z^2\,dy\ ,\ I_3 = \oint_L x^2\,dz\ .$$

Kako je

$$x'(\varphi) = -2a\cos\varphi\sin\varphi\ ,\ y'(\varphi) = a\big(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\big)\ ,$$

integrali I_1, I_2 postaju

$$I_1 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} y^2(\varphi)\,x'(\varphi)\,d\varphi = -2a^3\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^3\varphi\sin^3\varphi\,d\varphi\ ,$$

$$I_2 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} z^2(\varphi)\,y'(\varphi)\,d\varphi = a^3\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\big(\cos^2\varphi\sin^2\varphi - \sin^4\varphi\big)\,d\varphi\ .$$

Funkcija $\cos^3\varphi\sin^3\varphi$ je neparna, funkcije $\cos^2\varphi\sin^2\varphi$ i $\sin^4\varphi$ su parne, a segment $[-\pi/2,\pi/2]$ je simetričan. Zato je

$$\begin{aligned} I_1 &= 0\ , \\ I_2 &= 2a^3\int_0^{\pi/2}\left(\cos^2\varphi\sin^2\varphi-\sin^4\varphi\right)d\varphi\ . \end{aligned}$$

Koristeći formule izvedene u Zadatku 10, za integral I_2 dobijamo

$$I_2 = 2a^3\int_0^{\pi/2}\Big(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 2\varphi-\frac{1}{4}\cos 4\varphi\Big)\,d\varphi = -\frac{1}{4}\,a^3\pi\ .$$

Iz $z=a|\sin\varphi|$, $\varphi\in[-\pi/2,\pi/2]$ sledi $z=-a\sin\varphi$ ako je $\varphi\in[-\pi/2,0]$ i $z=a\sin\varphi$ ako je $\varphi\in[0,\pi/2]$. Još je

$$z'(\varphi)=-a\cos\varphi\ ,\quad \varphi\in\Big[-\frac{\pi}{2},0\Big]\ ;\qquad z'(\varphi)=a\cos\varphi\ ,\quad \varphi\in\Big[0,\frac{\pi}{2}\Big]\ ,$$

pa integral I_3 postaje

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{-\pi/2}^{0}x^2(\varphi)\,z'(\varphi)\,d\varphi+\int_0^{\pi/2}x^2(\varphi)\,z'(\varphi)\,d\varphi \\ &= -a^3\int_{-\pi/2}^{0}\cos^5\varphi\,d\varphi+a^3\int_0^{\pi/2}\cos^5\varphi\,d\varphi=0\ . \end{aligned}$$

Poslednja jednakost je posledica činjenice da za parnu funkciju $\cos^5\varphi$ važi

$$\int_{-\pi/2}^{0}\cos^5\varphi\,d\varphi=\int_0^{\pi/2}\cos^5\varphi\,d\varphi\ .$$

Konačno je

$$I=I_1+I_2+I_3=-\frac{1}{4}\,a^3\pi\ .$$

$\boxed{\mathbf{15.}}$ Izračunati potpuni krivolinijski integral II vrste

$$I=\oint_L z\,dx+x\,dy+y\,dz\ ,$$

gde je kriva L presek površi

$$S_1:\quad x^2+y^2+z=4\ ,\qquad S_2:\quad x^2+y^2+z^2=4z\ .$$

Posmatrano sa pozitivnog dela z–ose, L je pozitivno orijentisana.

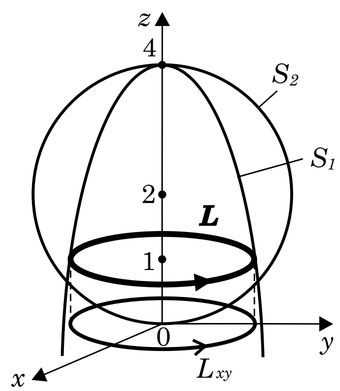
Rešenje. Površ S_1 je paraboloid

$$S_1:\quad z=-\left(x^2+y^2\right)+4$$

sa z–osom kao osovinom, koji z–osu seče u tački $(0,0,4)$. Površ S_2 je sfera

$$S_2: \quad x^2+y^2+(z-2)^2=4$$

sa centrom u tački $(0,0,2)$ i poluprečnika 2.



Kriva L se bijektivno projektuje samo na xy–ravan (1° iz Napomene 2.3.5). Jednačinu projekcije L_{xy} krive L na xy–ravan dobijamo eliminacijom z–koordinate iz jednačina površi S_1 i S_2 (Napomena 2.3.3). Iz jednačine paraboloida je

$$z-2=2-\left(x^2+y^2\right),$$

što zamenom u jednačinu sfere daje

$$-3\left(x^2+y^2\right)+\left(x^2+y^2\right)^2=0$$

i, deobom sa $x^2+y^2\neq 0$, jednačinu projekcije

$$L_{xy}: \quad x^2+y^2=3\,,\ z=0\,.$$

Parametarske jednačine kružnice L_{xy} su

$$L_{xy}: \quad x=\sqrt{3}\cos\varphi\,,\ y=\sqrt{3}\sin\varphi\,,\ z=0\,; \quad \varphi\in[0,2\pi]\,,$$

gde je $r=\sqrt{3}$ polarni radijus i φ polarni ugao. Povratkom u bilo koju od jednačina sfere ili paraboloida sledi $z=1$, pa su parametarske jednačine krive

$$L: \quad x=\sqrt{3}\cos\varphi\,,\ y=\sqrt{3}\sin\varphi\,,\ z=1\,; \quad \varphi\in[0,2\pi]\,,$$

pri čemu se za zadatu orijentaciju krive L parametar φ menja od $\varphi=0$ do $\varphi=2\pi$.

Kako je

$$x'(\varphi)=-\sqrt{3}\sin\varphi\,,\ y'(\varphi)=\sqrt{3}\cos\varphi\,,\ z'(\varphi)=0\,,$$

to je

$$I=\int_0^{2\pi}\left(-\sqrt{3}\sin\varphi+3\cos^2\varphi\right)d\varphi=\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}-\sqrt{3}\sin\varphi+\frac{3}{2}\cos 2\varphi\right)d\varphi=3\pi\,.$$

$\boxed{\mathbf{16}}$. Izračunati potpuni krivolinijski integral II vrste

$$I = \oint_L z\,dx + x\,dy + y\,dz \ ,$$

gde je kriva L presek površi

$$S : \quad z = x^2 + y^2$$

sa površima

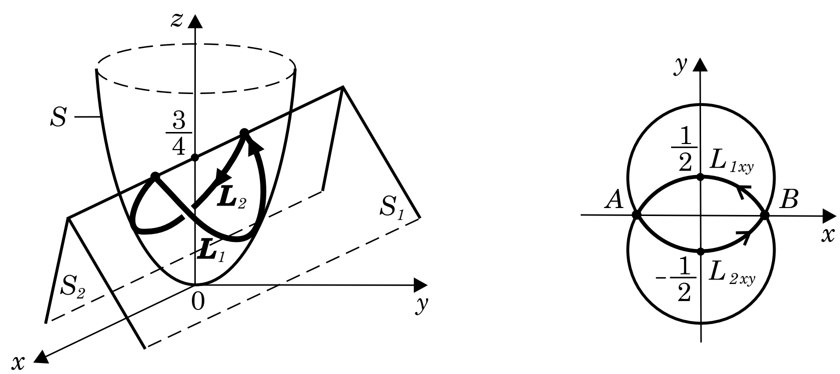
$$S_{1,2} : \quad z = \frac{3}{4} - |y| \ .$$

Posmatrano sa pozitivnog dela z–ose, L je pozitivno orijentisana.

Rešenje. Površ S je paraboloid sa z–osom kao osovinom. Iz jednačine $z = 3/4 - |y|$ slede jednačine površi S_1 za $y \geq 0$ i S_2 za $y \leq 0$,

$$S_1 : \quad z = \frac{3}{4} - y \ , \qquad S_2 : \quad z = \frac{3}{4} + y \ ,$$

pa su S_1 i S_2 poluravni (cilindrične površi) paralelne x–osi. Ako su L_1 i L_2 presečne krive poluravni S_1 i S_2 sa paraboloidom S, tada je $L = L_1 \cup L_2$ zatvorena kriva. Sa L_{1xy} i L_{2xy} označimo projekcije za L_1 i L_2 na xy–ravan ($z = 0$).



Jednačinu projekcije L_{1xy} krive L_1 na xy–ravan nalazimo eliminacijom z–koordinate iz jednačina površi S i S_1. Dobija se $3/4 - y = x^2 + y^2$, tj.

$$L_{1xy} : \quad x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 1 \ , \ z = 0 \ ,$$

pri čemu je $y \geq 0$. Analogno, iz jednačina površi S i S_2 za $y \leq 0$ sledi jednačina projekcije

$$L_{2xy} : \quad x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 1 \ , \ z = 0 \ .$$

Dakle, projekcije su delovi "pomerenih" kružnica sa centrima $(0,-1/2,0)$, $(0,1/2,0)$ na y–osi i poluprečnika 1. Za $y=0$ iz jednačina krivih L_{1xy}, L_{2xy} sledi $x^2=3/4$ i $x=\pm\sqrt{3}/2$, pa se radi o delovima između tačaka $A(-\sqrt{3}/2,0)$, $B(\sqrt{3}/2,0)$. Smenama

$$x=r\cos\varphi\ ,\ y+\frac{1}{2}=r\sin\varphi\ ;\ x=r\cos\varphi\ ,\ y-\frac{1}{2}=r\sin\varphi$$

u jednačine krivih L_{1xy} i L_{2xy} redom, dobijaju se njihove parametarske jednačine

$$\begin{aligned} L_{1xy}:&\quad x=\cos\varphi\ ,\ y=-\frac{1}{2}+\sin\varphi\ ,\ z=0\ ;\quad \varphi\in\Big[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\Big]\ ,\\ L_{2xy}:&\quad x=\cos\varphi\ ,\ y=\frac{1}{2}+\sin\varphi\ ,\ z=0\ ;\quad \varphi\in\Big[-\frac{5\pi}{6},\frac{\pi}{6}\Big]\ . \end{aligned}$$

Granice parametra φ su određene slično kao u Zadatku 9. U slučaju krive L_{1xy}, za tačku A je $\cos\varphi=-\sqrt{3}/2$, $\sin\varphi=1/2$ i $\varphi=5\pi/6$, a za tačku B je $\cos\varphi=\sqrt{3}/2$, $\sin\varphi=1/2$ i $\varphi=\pi/6$. Analogno, u slučaju krive L_{2xy}, tački A odgovara vrednost $\varphi=-5\pi/6$, a tački B vrednost $\varphi=-\pi/6$. Kako je $L_1\subset S_1$ i $L_2\subset S_2$, iz jednačina površi S_1 i S_2 dalje sledi

$$z=\frac{3}{4}-y=\frac{3}{4}-\Big(-\frac{1}{2}+\sin\varphi\Big)=\frac{5}{4}-\sin\varphi\ ,\ z=\frac{3}{4}+y=\frac{3}{4}+\Big(\frac{1}{2}+\sin\varphi\Big)=\frac{5}{4}+\sin\varphi\ ,$$

pa su parametarske jednačine krivih L_1 i L_2 date sa

$$\begin{aligned} L_1:&\quad x=\cos\varphi\ ,\ y=-\frac{1}{2}+\sin\varphi\ ,\ z=\frac{5}{4}-\sin\varphi\ ;\quad \varphi\in\Big[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\Big]\ ,\\ L_2:&\quad x=\cos\varphi\ ,\ y=\frac{1}{2}+\sin\varphi\ ,\ z=\frac{5}{4}+\sin\varphi\ ;\quad \varphi\in\Big[-\frac{5\pi}{6},\frac{\pi}{6}\Big]\ . \end{aligned}$$

Kako je $L\subset S$, z–koordinate tačaka krivih L_1 i L_2 mogu da se odrede i iz jednačine paraboloida. Zadatoj orijentaciji krive L, odnosno krivih L_1 i L_2, odgovara promena parametra φ od $\varphi=\pi/6$ do $\varphi=5\pi/6$ za L_1 i od $\varphi=-5\pi/6$ do $\varphi=\pi/6$ za L_2.

Izračunavanjem odgovarajućih izvoda i sređivanjem podintegralnih izraza, dobija se

$$\begin{aligned} I_1&=\int_{L_1} z\,dx+x\,dy+y\,dz=\int_{\pi/6}^{5\pi/6}\Big(1+\frac{1}{2}\cos\varphi-\frac{5}{4}\sin\varphi-\frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big)\,d\varphi\\ &=-\frac{5\sqrt{3}}{4}+\frac{2}{3}\pi\ ,\\ I_2&=\int_{L_2} z\,dx+x\,dy+y\,dz=\int_{-5\pi/6}^{\pi/6}\Big(\frac{1}{2}\cos\varphi-\frac{5}{4}\sin\varphi+\cos 2\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big)\,d\varphi\\ &=\frac{1}{2}+\frac{5\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

i, s obzirom na $L=L_1\cup L_2$,

$$I=I_1+I_2=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\pi\ .$$

Kriva L se sastoji od delova sa različitom parametrizacijom (4° iz Napomene 2.3.5). Delove L_1, L_2 nismo projektovali na yz–ravan iz sledećeg razloga. Projekcije krivih L_1 i L_2 na yz–ravan jesu poznate kao direktrise cilindričnih površi S_1 i S_2 (3° iz Napomene 2.3.5), ali ovo projektovanje nije bijekcija ni za jednu od krivih. Krive L_1, L_2 se bijektivno projektuju i na zx–ravan (2° iz Napomene 2.3.5). Njihove parametarske jednačine se nalaze slično kao u slučaju projektovanja na xy–ravan, samo unekoliko jednostavnije jer L_1 i L_2 imaju istu projekciju.

17. Izračunati potpuni krivolinijski integral II vrste

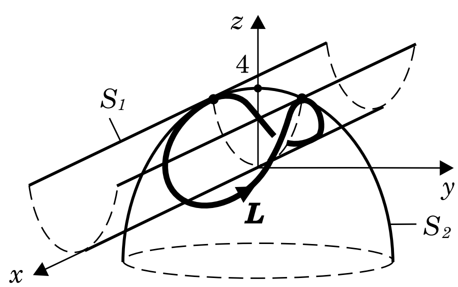
$$I = \oint_L 2\left(2y^2 + x^2\right) dx + (x+z)\, dy + y\, dz \ ,$$

gde je kriva L presek površi

$$S_1 : \quad z = y^2 \ , \qquad S_2 : \quad x^2 + y^2 = 4 - z \ .$$

Posmatrano sa pozitivnog dela z–ose, L je pozitivno orijentisana.

Rešenje. Površ S_1 je cilindrična sa direktrisom u yz–ravni i izvodnicama paralelnim x–osi, a S_2 je paraboloid sa z–osom kao osovinom, koji z–osu seče u tački $(0,0,4)$. Direktrisa površi S_1 je parabola.



Kriva L se bijektivno projektuje samo na xy–ravan (1° iz Napomene 2.3.5). Jednačinu projekcije L_{xy} nalazimo eliminacijom z–koordinate iz jednačina površi S_1 i S_2. Zamenom $z = y^2$ u $x^2 + y^2 = 4 - z$ dobija se $x^2 + 2y^2 = 4$, što je centralna elipsa

$$L_{xy} : \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$$

sa poluosama 2 i $\sqrt{2}$ po x i y–osi redom. Uvođenjem uopštenih polarnih koordinata sa

$$x = 2r\cos\varphi \ , \ y = \sqrt{2}\, r\sin\varphi \ ,$$

iz implicitne jednačine elipse sledi $r = 1$, kao i parametarske jednačine

$$L_{xy} : \quad x = 2\cos\varphi \ , \ y = \sqrt{2}\,\sin\varphi \ , \ z = 0 \ ; \quad \varphi \in [0, 2\pi] \ .$$

Dalje, npr. iz jednačine površi S_1 je $z = y^2 = 2\sin^2\varphi$, pa su parametarske jednačine krive

$$L : \quad x = 2\cos\varphi \ , \ y = \sqrt{2}\,\sin\varphi \ , \ z = 2\sin^2\varphi \ ; \quad \varphi \in [0, 2\pi] \ ,$$

pri čemu se φ menja od $\varphi = 0$ do $\varphi = 2\pi$ za zadatu orijentaciju krive L.

Određivanjem $x'(\varphi)$, $y'(\varphi)$, $z'(\varphi)$ i sređivanjem podintegralnog izraza, dobija se

$$I = \int_0^{2\pi} \left(-16\sin\varphi + 2\sqrt{2}\,\cos^2\varphi + 6\sqrt{2}\,\cos\varphi\sin^2\varphi\right) d\varphi = 2\sqrt{2}\,\pi\ .$$

18. Izračunati potpuni krivolinijski integral II vrste

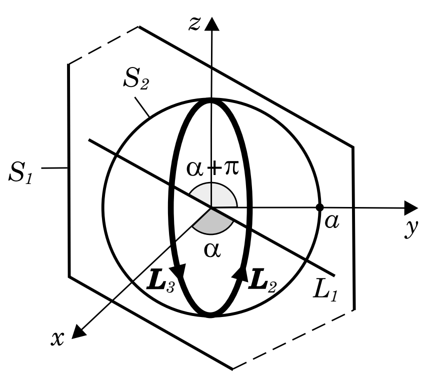
$$I = \oint_L (y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz\ ,$$

gde je kriva L presek površi

$$S_1:\quad y = x\tan\alpha\ ,\qquad S_2:\quad x^2+y^2+z^2 = a^2$$

i $\alpha \in (0, \pi/2)$ konstantan ugao. Posmatrano sa pozitivnog dela x–ose, L je pozitivno orijentisana.

Rešenje. Površ S_1 je cilindrična sa direktrisom L_1 u xy–ravni ($z=0$) i izvodnicama paralelnim z–osi, a S_2 je centralna sfera poluprečnika a. Direktrisa L_1 je prava $y = x\tan\alpha$ koja prolazi kroz koordinatni početak, pa je S_1 ravan koja prolazi kroz z–osu i seče sferu S_2 po kružnici L. Koeficijent pravca prave L_1 je $\tan\alpha$, što znači da je α ugao koji L_1 zaklapa sa pozitivnim delom x–ose.



Zadatak rešavamo na dva načina.

Eliminacijom x–koordinate iz jednačina površi S_1, S_2 i korišćenjem jednakosti

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\ ,$$

dobija se jednačina projekcije kružnice L na yz–ravan

$$L_{yz}:\quad \frac{y^2}{a^2\sin^2\alpha} + \frac{z^2}{a^2} = 1\ .$$

Kako je $\sin\alpha > 0$ za $\alpha \in (0, \pi/2)$, projekcija je centralna elipsa sa poluosama $a\sin\alpha$ i a po y i z–osi redom. Uvođenjem uopštenih polarnih koordinata sa

$$y = a\sin\alpha\, r\cos\varphi\ ,\ z = ar\sin\varphi\ ,$$

iz jednačine elipse sledi $r = 1$, pa su parametarske jednačine

$$L_{yz}:\quad y = a\sin\alpha\cos\varphi\ ,\ z = a\sin\varphi\ ;\quad \varphi \in [0, 2\pi]\ .$$

Povratkom, npr., u jednačinu ravni S_1 sledi izraz za x–koordinatu tačaka kružnice L i njene parametarske jednačine

$$L:\quad x = a\cos\alpha\cos\varphi\ ,\ y = a\sin\alpha\cos\varphi\ ,\ z = a\sin\varphi\ ;\quad \varphi \in [0, 2\pi]\ .$$

Parametar φ se menja od $\varphi = 0$ do $\varphi = 2\pi$ za zadatu orijentaciju krive L.

Određivanjem $x'(\varphi)$, $y'(\varphi)$, $z'(\varphi)$ i sređivanjem podintegralnog izraza, dobija se

$$I = \int_0^{2\pi} a^2(\cos\alpha - \sin\alpha)\, d\varphi = 2a^2(\cos\alpha - \sin\alpha)\pi\ .$$

Ako krivu L projektujemo na zx–ravan, slično se nalaze parametarske jednačine

$$L:\quad x = a\cos\alpha\sin\varphi\ ,\ y = a\sin\alpha\sin\varphi\ ,\ z = a\cos\varphi\ ;\quad \varphi \in [0, 2\pi]\ ,$$

sa promenom parametra φ od $\varphi = 2\pi$ do $\varphi = 0$ (2° iz Napomene 2.3.5). Projektovanje na xy–ravan nije bijekcija.

Kako je L_{yz} centralna elipsa, prethodni postupak je isto što i nalaženje parametarskih jednačina krive pomoću odgovarajućih uopštenih cilindričnih koordinata (Napomena 2.3.4). U ovom slučaju uopštene cilindrične koordinate se uvode sa

$$x = x\ ,\ y = a\sin\alpha\, r\cos\varphi\ ,\ z = ar\sin\varphi\ .$$

Zamenom u sistem formiran od jednačina površi S_1 i S_2, dobija se novi sistem

$$x = ar\cos\alpha\cos\varphi\ ,\ x^2 + a^2r^2\big(\sin^2\alpha\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\big) = a^2\ ,$$

čijim rešavanjem sledi $r = 1$ i $x = a\cos\alpha\cos\varphi$, a zatim i parametarske jednačine za L.

Drugi način rešavanja zadatka je zasnovan na upotrebi sfernih koordinata. Sferne koordinate uvodimo sa

$$x = r\cos\varphi\cos\theta\ ,\ y = r\sin\varphi\cos\theta\ ,\ z = r\sin\theta$$

i zamenom u jednačine površi S_1, S_2 dobijamo

$$\tan\varphi = \tan\alpha\ ,\ r = a\ .$$

Kako je $0 \le \varphi \le 2\pi$ maksimalni raspon koordinate φ i $\alpha \in (0, \pi/2)$, iz prve jednakosti je $\varphi = \alpha$ ili $\varphi = \alpha + \pi$. Do istog zaključka se dolazi i na osnovu značenja sferne koordinate φ. Dve različite vrednosti za φ nameću deobu krive L na dva dela. Neka je $L = L_2 \cup L_3$, pri čemu $\varphi = \alpha$ odgovara delu L_2, a $\varphi = \alpha + \pi = \beta$ delu L_3. S obzirom na značenje sferne koordinate θ, za oba dela θ uzima vrednosti iz maksimalnog raspona $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$, pa parametarske jednačine krivih L_2, L_3 glase

$$\begin{aligned} L_2: &\quad x = a\cos\alpha\cos\theta\ ,\ y = a\sin\alpha\cos\theta\ ,\ z = a\sin\theta\ ; \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\ , \\ L_3: &\quad x = a\cos\beta\cos\theta\ ,\ y = a\sin\beta\cos\theta\ ,\ z = a\sin\theta\ ; \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\ . \end{aligned}$$

Prema zadatoj orijentaciji krive L, parametar θ se menja od $\theta = -\pi/2$ do $\theta = \pi/2$ za L_2 i od $\theta = \pi/2$ do $\theta = -\pi/2$ za L_3.

Imajući u vidu

$$\cos\beta = \cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha\ ,\ \sin\beta = \sin(\alpha + \pi) = -\sin\alpha\ ,$$

iz nađenih parametarskih jednačina sledi

$$x'(\theta) = -a\cos\alpha\sin\theta\ ,\ y'(\theta) = -a\sin\alpha\sin\theta\ ,\ z'(\theta) = a\cos\theta$$

u slučaju krive L_2 i

$$x'(\theta) = a\cos\alpha\sin\theta\ ,\ y'(\theta) = a\sin\alpha\sin\theta\ ,\ z'(\theta) = a\cos\theta$$

u slučaju krive L_3. Zato je, posle sređivanja podintegralnog izraza,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{L_2} (y - z)\,dx + (z - x)\,dy + (x - y)\,dz \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a^2(\cos\alpha - \sin\alpha)\,d\theta = a^2(\cos\alpha - \sin\alpha)\pi\ , \\ I_2 &= \int_{L_3} (y - z)\,dx + (z - x)\,dy + (x - y)\,dz \\ &= \int_{\pi/2}^{-\pi/2} -a^2(\cos\alpha - \sin\alpha)\,d\theta = a^2(\cos\alpha - \sin\alpha)\pi \end{aligned}$$

i, zbog $L = L_2 \cup L_3$,

$$I = I_1 + I_2 = 2a^2(\cos\alpha - \sin\alpha)\pi\ .$$

VIŠESTRUKI INTEGRALI

Dvojni integrali

Ako je

$$D: \quad a \le x \le b\ ,\ y_1(x) \le y \le y_2(x)\ ,$$

tada je

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy\ .$$

$\boxed{\mathbf{19}}$. Izračunati površinu manjeg dela kruga u xy–ravni $(z=0)$

$$D_1: \quad x^2+y^2 \le 2x\ ,$$

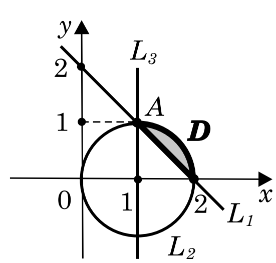
koji odseca prava

$$L_1: \quad y = 2-x\ .$$

Rešenje. Neka je D manji od dva kružna odsečka, čiju površinu d treba izračunati i

$$L_2: \quad x^2+y^2 = 2x\ , \qquad L_3: \quad x = 1\ .$$

Kriva L_2 je kružnica $(x-1)^2+y^2=1$, a L_3 je prava paralelna y–osi. Zamenom $y=0$ u jednačinu prave L_1 sledi $x=2$, pa je $(2,0)$ presečna tačka prave L_1 sa x–osom. Analogno, za $x=0$ se dobija presečna tačka $(0,2)$ prave L_1 sa y–osom, a za $x=1$ presečna tačka $A(1,1)$ pravih L_1 i L_3. Koordinate tačke A zadovoljavaju jednačinu kružnice L_2, pa je $A \in L_2$, što je prikazano na sledećoj slici.



Prvo nalazimo opis oblasti D. Iz jednačine kružnice L_2 sledi $y = \pm\sqrt{2x - x^2}$ ili $x = 1 \pm \sqrt{1 - y^2}$. Za deo kružnice, koji ulazi u sastav granice oblasti D, važi $y \geq 0$ i $x \geq 1$, pa taj deo L_2 ima eksplicitne jednačine

$$L_2 : \quad y = \sqrt{2x - x^2} \ , \qquad L_2 : \quad x = 1 + \sqrt{1 - y^2} \ .$$

Uzimajući, npr., promenljivu x u konstantnim, a promenljivu y u funkcionalnim granicama, opis oblasti D je

$$D : \quad 1 \leq x \leq 2 \ , \ 2 - x \leq y \leq \sqrt{2x - x^2} \ .$$

Prelaskom sa dvojnog na dvostruki integral, za površinu d oblasti D se dobija

$$\begin{aligned} d &= \iint_D dxdy = \int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} dy = \int_1^2 \left(\sqrt{2x - x^2} - 2 + x\right) dx \\ &= \int_1^2 \sqrt{2x - x^2}\, dx - 2x \Big|_1^2 + \frac{x^2}{2} \Big|_1^2 = -\frac{1}{2} + \int_1^2 \sqrt{2x - x^2}\, dx \\ &= -\frac{1}{2} + \int_1^2 \sqrt{1 - (x-1)^2}\, dx \ . \end{aligned}$$

Poslednji određeni integral se rešava smenom

$$x - 1 = \sin t \ .$$

Kako je $\sin t = 0$ i $t = 0$ za $x = 1$, $\sin t = 1$ i $t = \pi/2$ za $x = 2$ i $\cos t \geq 0$ za $t \in [0, \pi/2]$, to je

$$\begin{aligned} \int_1^2 \sqrt{1 - (x-1)^2}\, dx &= \int_0^{\pi/2} |\cos t| \cos t\, dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2t}{2}\, dt = \frac{1}{2}\, t \Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{4} \sin 2t \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{4}\, \pi \ , \end{aligned}$$

pa je tražena površina

$$d = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\, \pi = \frac{1}{4}(\pi - 2) \ .$$

Ako je y u konstantnim, a x u funkcionalnim granicama, oblast D se opisuje sa

$$D : \quad 2 - y \leq x \leq 1 + \sqrt{1 - y^2} \ , \ 0 \leq y \leq 1 \ ,$$

pri čemu je $x = 2 - y$ jednačina prave L_1. Odgovarajući dvostruki integral se rešava na isti način.

$\boxed{\mathbf{20.}}$ Izračunati dvojni integral

$$I = \iint_D \left|\sin(x + y)\right| dxdy \ ,$$

gde je D oblast u xy–ravni ($z = 0$) opisana sa

$$D: \quad 0 \le x \le \pi \ , \ 0 \le y \le 2\pi \ .$$

Rešenje. Za tačke $(x, y) \in D$ je $0 \le x + y \le 3\pi$, pa za funkciju $\sin(x + y)$ važi

$$\begin{aligned} &\sin(x+y) \ge 0 \ , \quad x+y \in [0,\pi] \cup [2\pi, 3\pi] \ ; \\ &\sin(x+y) \le 0 \ , \quad x+y \in [\pi, 2\pi] \ . \end{aligned}$$

Pošto funkcija $\sin(x+y)$ menja znak na oblasti D, zavisno od njenog znaka podintegralna funkcija je $|\sin(x+y)| = \pm\sin(x+y)$. Zato oblast D delimo na podoblasti tako da na svakoj od njih $\sin(x+y)$ ima stalan znak.

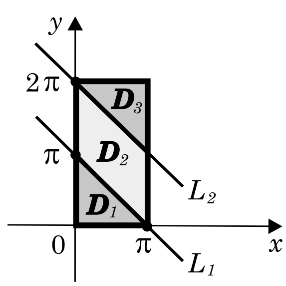
Neka je $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$, gde je D_1 onaj deo oblasti D za koji je $0 \le x+y \le \pi$, D_2 deo za $\pi \le x+y \le 2\pi$ i D_3 deo za $2\pi \le x+y \le 3\pi$. Delovi D_1 i D_2 imaju zajedničke tačke $(x, y) \in D$ za koje je $x + y = \pi$, a to su tačke sa prave

$$L_1: \quad y = -x + \pi \ .$$

Analogno, zajedničke tačke delova D_2 i D_3 pripadaju pravoj

$$L_2: \quad y = -x + 2\pi \ .$$

Kako je, još, $y \le -x+\pi$ za D_1, $-x+\pi \le y \le -x+2\pi$ za D_2 i $y \ge -x+2\pi$ za D_3, deo D_1 je ispod prave L_1, deo D_2 između pravih L_1 i L_2, a D_3 je iznad prave L_2.



Prema prethodnom, opisi oblasti D_1, D_2 i D_3 su:

$$\begin{aligned} D_1: &\quad 0 \le x \le \pi \ , \ 0 \le y \le -x+\pi \ , \\ D_2: &\quad 0 \le x \le \pi \ , \ -x+\pi \le y \le -x+2\pi \ , \\ D_3: &\quad 0 \le x \le \pi \ , \ -x+2\pi \le y \le 2\pi \ . \end{aligned}$$

Za podintegralnu funkciju važi

$$\begin{aligned} &\big|\sin(x+y)\big| = \sin(x+y) \ , \quad (x,y) \in D_1 \cup D_3 \ ; \\ &\big|\sin(x+y)\big| = -\sin(x+y) \ , \quad (x,y) \in D_2 \ , \end{aligned}$$

pa je

$$I = I_1 + I_2 + I_3 \ ,$$

gde je

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \iint_{D_1} \sin(x+y)\,dxdy = \int_0^{\pi} dx \int_0^{-x+\pi} \sin(x+y)\,dy \ , \\
I_2 &= \iint_{D_2} -\sin(x+y)\,dxdy = -\int_0^{\pi} dx \int_{-x+\pi}^{-x+2\pi} \sin(x+y)\,dy \ , \\
I_3 &= \iint_{D_3} \sin(x+y)\,dxdy = \int_0^{\pi} dx \int_{-x+2\pi}^{2\pi} \sin(x+y)\,dy \ .
\end{aligned}
$$

Kako je

$$
\begin{aligned}
&\int \sin(x+y)\,dy = \int \sin(x+y)\,d(x+y) = -\cos(x+y) \ , \\
&\quad \cos(x+2\pi) = \cos x \ ,
\end{aligned}
$$

dalje je

$$
\begin{aligned}
I_1 &= -\int_0^{\pi} \cos(x+y)\Big|_{y=0}^{y=-x+\pi} dx = -\int_0^{\pi} (\cos\pi - \cos x)\,dx \\
&= \int_0^{\pi} (1+\cos x)\,dx = (x+\sin x)\Big|_0^{\pi} = \pi \ , \\
I_2 &= \int_0^{\pi} \cos(x+y)\Big|_{y=-x+\pi}^{y=-x+2\pi} dx = \int_0^{\pi} (\cos 2\pi - \cos\pi)\,dx = 2\int_0^{\pi} dx = 2\pi \ , \\
I_3 &= -\int_0^{\pi} \cos(x+y)\Big|_{y=-x+2\pi}^{y=2\pi} dx = -\int_0^{\pi} \big[\cos(x+2\pi) - \cos 2\pi\big]\,dx \\
&= \int_0^{\pi} (1-\cos x)\,dx = (x-\sin x)\Big|_0^{\pi} = \pi
\end{aligned}
$$

i konačno

$$
I = 4\pi \ .
$$

$\boxed{\textbf{21}.}$ Izračunati dvostruki integral

$$
I = \int_0^a dy \int_0^{a-\sqrt{a^2-y^2}} \frac{xy\ln(x+a)}{(x-a)^2}\,dx \ ,
$$

gde je $a > 0$.

Rešenje. Unutrašnji integral u zadatom dvostrukom integralu se teško rešava, pa prelazimo na odgovarajući dvojni integral.

Neka je D oblast u xy–ravni ($z = 0$) opisana sa

$$
D: \quad 0 \le x \le a - \sqrt{a^2-y^2} \ , \ 0 \le y \le a \ .
$$

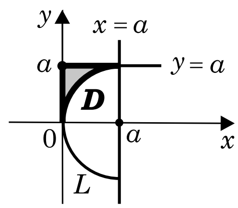
Tada važi jednakost

$$
I = \iint_D \frac{xy\ln(x+a)}{(x-a)^2}\,dxdy \ .
$$

Iz prethodnog opisa vidimo da je oblast D ograničena y–osom ($x = 0$), krivom

$$L: \quad x = a - \sqrt{a^2 - y^2}\ ,$$

x–osom ($y = 0$) i pravom $y = a$. Kako iz $x = a - \sqrt{a^2 - y^2}$ sledi $(x-a)^2 + y^2 = a^2$, kriva L je polukružnica za koju je $x \le a$.



Oblast D opisujemo drugačije, tako što promenljivu x uzimamo u konstantnim, a promenljivu y u funkcionalnim granicama. Za deo polukružnice L, koji ulazi u sastav granice oblasti D, važi $y \ge 0$, pa taj deo ima jednačinu

$$L: \quad y = \sqrt{2ax - x^2}$$

i opis oblasti D glasi

$$D: \quad 0 \le x \le a\ ,\ \sqrt{2ax - x^2} \le y \le a\ .$$

Prema novom opisu, dvojni integral postaje

$$\begin{aligned} I &= \int_0^a dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^a \frac{xy\ln(x+a)}{(x-a)^2}\, dy \\ &= \int_0^a \frac{x\ln(x+a)}{(x-a)^2}\, \frac{y^2}{2}\Big|_{y=\sqrt{2ax-x^2}}^{y=a} dx = \frac{1}{2}\int_0^a x\ln(x+a)\, dx\ . \end{aligned}$$

Poslednji određeni integral se rešava metodom parcijalne integracije

$$\int_0^a u\, dv = uv\Big|_0^a - \int_0^a v\, du$$

sa $u = \ln(x+a)$, $dv = x\, dx$, odakle je $du = dx/(x+a)$, $v = x^2/2$. Dobija se

$$\begin{aligned} \int_0^a x\ln(x+a)\, dx &= \frac{x^2}{2}\ln(x+a)\Big|_0^a - \int_0^a \frac{x^2}{2(x+a)}\, dx \\ &= \frac{1}{2}\, a^2\ln 2a - \frac{1}{2}\int_0^a \frac{(x+a-a)^2}{x+a}\, dx \\ &= \frac{1}{2}\, a^2\ln 2a - \frac{1}{2}\int_0^a \frac{(x+a)^2 - 2a(x+a) + a^2}{x+a}\, dx \\ &= \frac{1}{2}\, a^2\ln 2a - \frac{1}{2}\int_0^a \Big(x - a + \frac{a^2}{x+a}\Big)\, dx \\ &= \frac{1}{2}\, a^2\ln 2a - \frac{1}{2}\Big[\frac{x^2}{2} - ax + a^2\ln(x+a)\Big]\Big|_0^a \\ &= \frac{1}{4}\, a^2 + \frac{1}{2}\, a^2\ln a = \frac{1}{4}\, a^2(1 + 2\ln a) \end{aligned}$$

i konačno

$$I = \frac{1}{8}\,a^2(1 + 2\ln a)\ .$$

Dakle, dvostruki integral koji se teško rešava smo mnogo jednostavnije rešili kao drugi dvostruki integral, sa izmenjenim redosledom integracije. Zahvaljujući dvojnom integralu i njegovoj vezi sa dvostrukim integralima, jedan dvostruki uvek može da se zameni odgovarajućim dvostrukim integralom (integralima) sa promenjenim redosledom integracije (Napomena 3.3.3). Međutim, to ne dovodi uvek i do jednostavnijeg rešavanja, što zavisi od oblika oblasti integracije u dvojnom integralu (Primer 3.3.3).

Trojni integrali

Ako je

$$D:\quad a \le x \le b\ ,\ y_1(x) \le y \le y_2(x)\ ,\ z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)\ ,$$

tada je

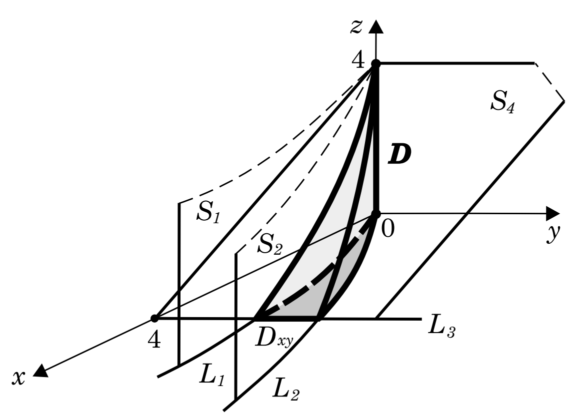
$$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\ .$$

$\boxed{\textbf{22}}$. Izračunati zapreminu prostorne oblasti ograničene površima

$$S_1:\quad y^2 = x\ ,\qquad S_2:\quad y^2 = 4x\ ,\qquad S_3:\quad z = 0\ ,\qquad S_4:\quad x + z = 4$$

za $y \ge 0$.

Rešenje. Neka je D prostorna oblast čiju zapreminu d treba izračunati. Površi S_1 i S_2 su cilindrične sa izvodnicama paralelnim z–osi. Direktrise ovih površi su parabole L_1, L_2 u xy–ravni, simetrične u odnosu na x–osu. Površ S_3 je xy–ravan, dok je S_4 ravan paralelna y–osi. Ravan S_4 seče x i z–osu u tačkama $(4,0,0)$, $(0,0,4)$, a xy–ravan duž prave L_3. Od dve ograničene oblasti između S_1, S_2, S_3 i S_4, oblast D je ona za koju je $y \ge 0$. Projekcija oblasti D na xy–ravan je ravna oblast D_{xy} između L_1, L_2 i L_3.



S obzirom na uslov $y \geq 0$, delovi parabola L_1, L_2 koji ograničavaju oblast D_{xy} i prava L_3 iz xy–ravni ($z = 0$) imaju jednačine

$$L_1 : \quad y = \sqrt{x} \ , \qquad L_2 : \quad y = 2\sqrt{x} \ , \qquad L_3 : \quad x = 4 \ ,$$

pa je oblast D_{xy} opisana sa

$$D_{xy} : \quad 0 \leq x \leq 4 \ , \ \sqrt{x} \leq y \leq 2\sqrt{x} \ .$$

Zapisujući jednačinu ravni S_4 u obliku

$$S_4 : \quad z = -x + 4 \ ,$$

dobijamo i opis oblasti D,

$$D : \quad 0 \leq x \leq 4 \ , \ \sqrt{x} \leq y \leq 2\sqrt{x} \ , \ 0 \leq z \leq -x + 4 \ .$$

Prelaskom sa trojnog na trostruki integral, zapremina d oblasti D postaje

$$\begin{aligned} d &= \iiint_D dxdydz = \int_0^4 dx \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} dy \int_0^{-x+4} dz \\ &= \int_0^4 dx \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} z \Big|_{z=0}^{z=-x+4} dy = \int_0^4 dx \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} (-x+4)\, dy \\ &= \int_0^4 (-x+4) y \Big|_{y=\sqrt{x}}^{y=2\sqrt{x}} dx = \int_0^4 (-x+4)\sqrt{x}\ dx \ . \end{aligned}$$

Poslednji određeni integral se rešava smenom

$$x = t^2 \ ,$$

za koju je $dx = 2t\,dt$ i $t = 0$ kad je $x = 0$, $t = 2$ kad je $x = 4$, pa je dalje

$$d = 2\int_0^2 (-t^2 + 4) t^2\, dt = 2\Big(-\frac{t^5}{5} + 4\frac{t^3}{3}\Big)\Big|_0^2 = \frac{2^7}{15} = \frac{128}{15} \ .$$

Tražena zapremina može da se odredi i na osnovu geometrijskog tumačenja dvojnog integrala

$$d = \iint_{D_{xy}} f(x,y)\, dxdy = \iint_{D_{xy}} (-x+4)\, dxdy = \int_0^4 dx \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} (-x+4)\, dy \ ,$$

gde je $z = f(x,y) = -x + 4$ jednačina ravni S_4.

23. Izračunati trojni integral

$$I = \iiint_D y\, dxdydz \ ,$$

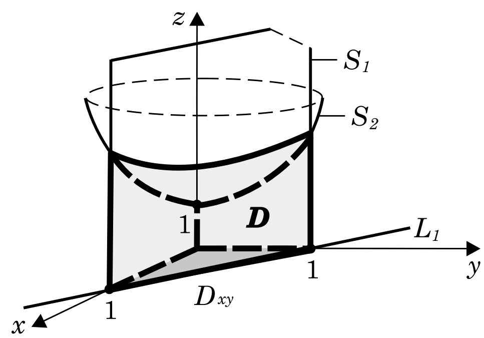
gde je D prostorna oblast ograničena koordinatnim ravnima i površima

$$S_1: \quad x+y=1 \ , \qquad S_2: \quad z=2x^2+y^2+1 \ .$$

Rešenje. Površ S_1 je cilindrična površ čije su izvodnice paralelne z–osi, a direktrisa je prava

$$L_1: \quad x+y=1 \ , \ z=0 \ .$$

Dakle, S_1 je ravan paralelna z–osi, a L_1 je presek S_1 sa xy–ravni. Još, L_1 seče x i y–osu u tačkama $(1,0,0)$ i $(0,1,0)$. Površ S_2 je *eliptički paraboloid* sa z–osom kao osovinom ([**4**], str. 204–206). Paraboloid seče z–osu u tački $(0,0,1)$, pa za sve tačke $(x,y,z) \in S_2$ važi $z \geq 1$.



Projekcija oblasti D na xy–ravan je

$$D_{xy}: \quad 0 \leq x \leq 1 \ , \ 0 \leq y \leq -x+1 \ ,$$

gde je $y=-x+1$ jednačina prave L_1. Imajući u vidu jednačinu površi S_2, oblast D ima opis

$$D: \quad 0 \leq x \leq 1 \ , \ 0 \leq y \leq -x+1 \ , \ 0 \leq z \leq 2x^2+y^2+1 \ .$$

Prevođenjem trojnog na trostruki integral i rešavanjem sledi

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dx \int_0^{-x+1} y\,dy \int_0^{2x^2+y^2+1} dz = \int_0^1 dx \int_0^{-x+1} y\big(2x^2+y^2+1\big)\,dy \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 dx \int_0^{-x+1} \big(2x^2+y^2+1\big)\, d\big(2x^2+y^2+1\big) \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\big(2x^2+y^2+1\big)^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=-x+1} dx = \frac{1}{4}\int_0^1 \Big[\big(3x^2-2x+2\big)^2-\big(2x^2+1\big)^2\Big]\,dx \ . \end{aligned}$$

Sređivanjem podintegralne funkcije, za integral I se dobija

$$I = \frac{1}{4}\int_0^1 \big(5x^4-12x^3+12x^2-8x+3\big)\,dx = \frac{1}{4}\big(x^5-3x^4+4x^3-4x^2+3x\big)\Big|_0^1 = \frac{1}{4} \ .$$

Smena promenljivih u dvojnim integralima

Ako je

$$x = x(u,v)\ ,\ y = y(u,v)\ ;\ J = J(u,v) = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}\ ,$$

tada je

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D^*} f\big(x(u,v), y(u,v)\big)\big|J(u,v)\big|\,dudv\ .$$

Najčešće su polarne i uopštene polarne koordinate $u = r$, $v = \varphi$, za koje je redom:

$$x = r\cos\varphi\ ,\ y = r\sin\varphi\ ;\ J = r\ ,$$
$$x = ar\cos\varphi\ ,\ y = br\sin\varphi\ ;\ J = abr\ .$$

$\boxed{\mathbf{24}.}$ Izračunati dvojni integral

$$I = \iint_D xy\,dxdy\ ,$$

gde je D oblast u xy–ravni ($z = 0$) ograničena krivama

$$L_1:\quad xy = 1\ ,\qquad L_2:\quad xy = 2\ ,\qquad L_3:\quad y = x\ ,\qquad L_4:\quad y = 4x$$

za $x > 0$.

Rešenje. Krive L_1, L_2 su hiperbole, a L_3, L_4 prave. Zbog uslova $x > 0$, iz jednačina krivih sledi $y > 0$, pa je oblast D u I kvadrantu.

Jednačine hiperbola L_1, L_2 s jedne i pravih L_3, L_4 s druge strane sugerišu smenu

$$u = xy\ ,\ v = \frac{y}{x}\ .$$

Iz ove smene je

$$x = \sqrt{\frac{u}{v}}\ ,\ y = \sqrt{uv}\ ,$$

i jakobijan postaje

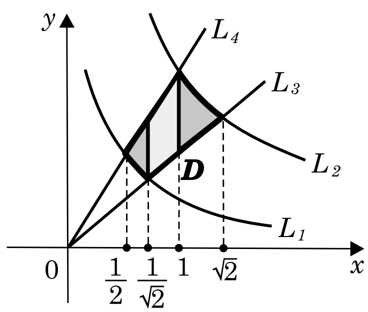
$$J = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2\sqrt{uv}} & -\dfrac{1}{2v}\sqrt{\dfrac{u}{v}} \\ \dfrac{v}{2\sqrt{uv}} & \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{u}{v}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2v}\ .$$

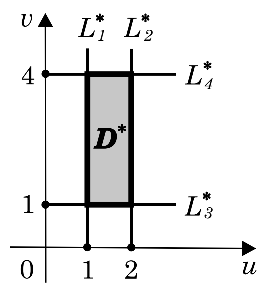
Zbog $x, y > 0$ je $u, v > 0$, pa je J neprekidna funkcija i važi $J > 0$. Zato se granica $L = \bigcup_{i=1}^{4} L_i$ oblasti D iz xy–ravni preslikava u granicu $L^* = \bigcup_{i=1}^{4} L_i^*$ oblasti D^* iz uv–ravni, gde je

$$L_1^*: \quad u = 1 , \qquad L_2^*: \quad u = 2 , \qquad L_3^*: \quad v = 1 , \qquad L_4^*: \quad v = 4 .$$

Oblast D^* je pravougaona, sa opisom

$$D^*: \quad 1 \le u \le 2 , \ 1 \le v \le 4 .$$





Prelazeći prvo na dvojni integral po novoj oblasti D^*, a zatim na odgovarajući dvostruki integral, sledi

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \iint_{D^*} \frac{u}{v} \, dudv = \frac{1}{2} \int_1^2 u \, du \int_1^4 \frac{1}{v} \, dv \\ &= \frac{1}{2} \frac{u^2}{2} \Big|_1^2 \ln |v| \Big|_1^4 = \frac{1}{4}(4-1)(\ln 4 - \ln 1) = \frac{3}{4} \ln 4 = \frac{3}{4} \ln 2^2 = \frac{3}{2} \ln 2 . \end{aligned}$$

Zadatak može da se reši i direktno, pomoću promenljivih x, y, ali tada oblast D mora da se deli na $D = \bigcup_{i=1}^{3} D_i$, što zahteva dodatna izračunavanja radi opisa oblasti D_i $(i = 1, 2, 3)$, kao i rešavanje većeg broja dvostrukih integrala.

25. Izračunati dvojni integral

$$I = \iint_D \arctan \frac{y}{x} \, dxdy ,$$

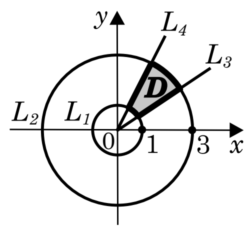
gde je D oblast u xy–ravni $(z = 0)$ ograničena krivama

$$L_1: \quad x^2 + y^2 = 1 , \qquad L_2: \quad x^2 + y^2 = 9 ,$$

$$L_3: \quad y = \frac{1}{\sqrt{3}} \, x , \qquad L_4: \quad y = \sqrt{3} \, x$$

za $x > 0$.

Rešenje. Krive L_1, L_2 su kružnice, a L_3, L_4 prave. Iz jednačina pravih za $x > 0$ sledi $y > 0$, pa je oblast D deo kružnog isečka u I kvadrantu.



Zadatak rešavamo na dva načina.

Jednačine krivih L_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ sugerišu smenu

$$u = x^2 + y^2 \ , \ v = \frac{y}{x} \ ,$$

za koju je

$$x = \sqrt{\frac{u}{1+v^2}} \ , \ y = v\sqrt{\frac{u}{1+v^2}} \ ; \ J = \frac{1}{2\left(1+v^2\right)} > 0 \ .$$

Zbog $J > 0$, granica oblasti D prelazi u granicu oblasti D^*, sastavljenu od

$$L_1^* : \quad u = 1 \ , \qquad L_2^* : \quad u = 9 \ , \qquad L_3^* : \quad v = \frac{1}{\sqrt{3}} \ , \qquad L_4^* : \quad v = \sqrt{3} \ ,$$

a oblast D u pravougaonu oblast

$$D^* : \quad 1 \le u \le 9 \ , \ \frac{1}{\sqrt{3}} \le v \le \sqrt{3} \ .$$

Integral I postaje

$$I = \iint_{D^*} \arctan v \, \frac{1}{2\left(1+v^2\right)} \, dudv = \frac{1}{2} \int_1^9 du \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \arctan v \, \frac{1}{1+v^2} \, dv$$
$$= 4 \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \arctan v \, d(\arctan v) = 2 \arctan^2 v \Big|_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = 2\Big[\Big(\frac{\pi}{3}\Big)^2 - \Big(\frac{\pi}{6}\Big)^2\Big] = \frac{1}{6}\,\pi^2 \ .$$

Zadatak sada rešavamo pomoću polarnih koordinata, tj. pomoću smene

$$x = r\cos\varphi \ , \ y = r\sin\varphi \ ,$$

za koju je $J = r$. Oblast D ne sadrži tačku $(0, 0)$, kojoj odgovara $r = 0$, pa je $J > 0$.

Granica oblasti D prelazi u granicu oblasti D^*. Krive L_1, L_2 se preslikavaju u

$$L_1^* : \quad r = 1 \ , \qquad L_2^* : \quad r = 3 \ .$$

Za pravu L_3 je koeficijent pravca $\tan\varphi = y/x = 1/\sqrt{3}$ i $\varphi = \pi/6$, a za pravu L_4 je $\tan\varphi = \sqrt{3}$ i $\varphi = \pi/3$, pa je

$$L_3^* : \quad \varphi = \frac{\pi}{6} \ , \qquad L_4^* : \quad \varphi = \frac{\pi}{3}$$

i oblast D prelazi u pravougaonu oblast

$$D^* : \quad 1 \le r \le 3 \ , \ \frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{3} \ .$$

Integral I postaje

$$I = \iint_{D^*} \arctan \frac{r \sin\varphi}{r\cos\varphi}\, r\, dr d\varphi = \iint_{D^*} \arctan(\tan\varphi) r\, dr d\varphi = \iint_{D^*} r\varphi\, dr d\varphi$$
$$= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \varphi\, d\varphi \int_1^3 r\, dr = \frac{\varphi^2}{2}\Big|_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{r^2}{2}\Big|_1^3 = \frac{1}{6}\,\pi^2 \ .$$

Radeći sa Descartesovim koordinatama x, y, oblast D bi morala da se deli na $D = \bigcup_{i=1}^{3} D_i$, a svaki od unutrašnjih integrala u odgovarajućim dvostrukim integralima da se rešava metodom parcijalne integracije.

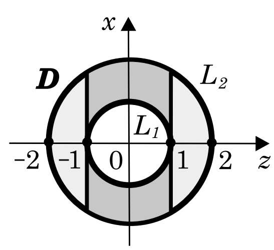
$\boxed{\textbf{26}}$. Izračunati dvojni integral

$$I = \iint_D x^2 z^2\, dz dx \ ,$$

gde je D oblast u zx–ravni $(y = 0)$ ograničena krivama

$$L_1 : \quad x^2 + z^2 = 1 \ , \qquad L_2 : \quad x^2 + z^2 = 4 \ .$$

Rešenje. Oblast D je kružni prsten između kružnica L_1 i L_2.



Zamenjujemo Descartesove z, x polarnim r, φ koordinatama pomoću

$$z = r\cos\varphi \ , \ x = r\sin\varphi$$

i utvrđujemo $J = r > 0$ jer $(0,0) \notin D$.

Kružnice L_1, L_2 se preslikavaju u

$$L_1^* : \quad r = 1 \ , \qquad L_2^* : \quad r = 2 \ ,$$

a oblast D iz zx–ravni u pravougaonu oblast D^* iz $r\varphi$–ravni,

$$D^* : \quad 1 \le r \le 2 \ , \ 0 \le \varphi \le 2\pi \ .$$

Prelaskom na dvojni integral po oblasti D^* i rešavanjem odgovarajućeg dvostrukog integrala, uz upotrebu formula izvedenih u Zadatku 10, dobija se

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D^*} (r\sin\varphi)^2 (r\cos\varphi)^2 r\,dr d\varphi = \iint_{D^*} r^5 \cos^2\varphi \sin^2\varphi\,dr d\varphi \\ &= \int_1^2 r^5\,dr \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi = \frac{r^6}{6}\Big|_1^2 \int_0^{2\pi} \Big(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 4\varphi\Big)\,d\varphi \\ &= \frac{21}{16}\int_0^{2\pi} (1-\cos 4\varphi)\,d\varphi = \frac{21}{8}\,\pi\ . \end{aligned}$$

Kružni prsten D je dvostruko povezana oblast (Slika 1.1.1). Da bi se dvojni integral po ovakvoj oblasti rešavao bez smene promenljivih, oblast mora da se deli na više prosto povezanih podoblasti, konkretno na $D = \bigcup_{i=1}^4 D_i$. Smenom promenljivih je dvostruko povezana oblast D transformisana u prosto povezanu D^*. Takođe, smena promenljivih bitno pojednostavljuje rešavanje određenih integrala na koje se dvojni prevodi, u šta čitalac može i sam da se uveri. Slična je situacija i kod dvojnih integrala po višestruko povezanim oblastima.

Primećujemo da se granica $L = L_1 \cup L_2$ oblasti D preslikava u deo $L_1^* \cup L_2^*$, a ne u celu granicu $L = \bigcup_{i=1}^4 L_i^*$ oblasti D^*, gde je

$$L_3^*: \quad \varphi = 0\ , \qquad L_4^*: \quad \varphi = 2\pi\ .$$

Zato se na prvi pogled čini da uslov $J \neq 0$ kod dvostruko povezanih oblasti ne znači ništa. Međutim, oblast D možemo da tretiramo kao prosto povezanu ako je "rasečemo" duž pozitivnig dela z–ose i taj deo ose joj pridružimo kao delove L_3, L_4 granice. Tada se L_3, L_4 preslikavaju u L_3^*, L_4^*, što je omogućeno upravo uslovom $J \neq 0$. Inače, u zadatku smo do opisa oblasti D^* jednostavno došli na osnovu značenja polarnih koordinata, što ćemo i nadalje da radimo bez naglašavanja.

$\boxed{\mathbf{27}}$. Izračunati dvojni integral

$$I = \iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\ dxdy\ ,$$

gde je D deo xy–ravni ($z = 0$) ograničen lemniskatom

$$L: \quad \big(x^2 + y^2\big)^2 = a^2\big(x^2 - y^2\big)$$

za $x \geq 0$ i $a > 0$.

Rešenje. Lemniskata L je ista kao u Zadatku 6, pa koristimo već dobijene rezultate.

Uvođenjem polarnih koordinata sa

$$x = r\cos\varphi\ ,\ y = r\sin\varphi\ ,$$

za koje je $J = r \geq 0$, kriva L se preslikava u

$$L^*: \quad r = a\sqrt{\cos 2\varphi}\ ,$$

a oblast D u oblast

$$D^*: \quad 0 \le r \le a\sqrt{\cos 2\varphi}\ , \ -\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}\ .$$

Integral I postaje

$$\begin{aligned}
I &= \iint_{D^*} \sqrt{a^2-r^2}\ r\,dr d\varphi = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} \sqrt{a^2-r^2}\ r\,dr \\
&= -\frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} \sqrt{a^2-r^2}\ d\big(a^2-r^2\big) \\
&= -\frac{1}{3}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \big(a^2-r^2\big)\sqrt{a^2-r^2}\,\Big|_{r=0}^{r=a\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi \\
&= -\frac{1}{3}\,a^3\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \big(2\sqrt{2}\,\sin^2\varphi|\sin\varphi|-1\big)\,d\varphi \\
&= -\frac{4\sqrt{2}}{3}\,a^3\int_0^{\pi/4}\sin^3\varphi\,d\varphi + \frac{1}{3}\,a^3\int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi = \frac{1}{6}\,a^3\pi - \frac{4\sqrt{2}}{3}\,a^3\int_0^{\pi/4}\sin^3\varphi\,d\varphi\ .
\end{aligned}$$

Koristeći jednakost

$$\sin^3\varphi = \big(1-\cos^2\varphi\big)\sin\varphi = \sin\varphi - \cos^2\varphi\sin\varphi\ ,$$

dalje je

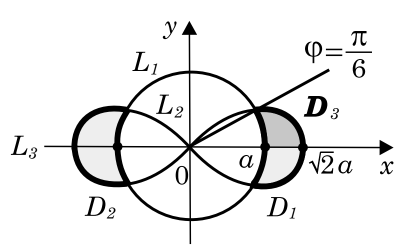
$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{6}\,a^3\pi + \frac{4\sqrt{2}}{3}\,a^3\Big(\cos\varphi\,\Big|_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4}\cos^2\varphi\,d(\cos\varphi)\Big) \\
&= \frac{1}{6}\,a^3\pi + \frac{4\sqrt{2}}{3}\,a^3\Big(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 - \frac{\cos^3\varphi}{3}\,\Big|_0^{\pi/4}\Big) = \frac{1}{6}\,a^3\pi + \frac{4\sqrt{2}}{3}\,a^3\Big(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 - \frac{\sqrt{2}}{12} + \frac{1}{3}\Big) \\
&= \frac{1}{6}\,a^3\pi + \frac{2}{9}(5-4\sqrt{2}\,)a^3 = \Big[\frac{1}{6}\,\pi + \frac{2}{9}(5-4\sqrt{2}\,)\Big]a^3\ .
\end{aligned}$$

28. Izračunati površinu dela xy–ravni ($z=0$) ograničenog krivama

$$L_1: \quad x^2+y^2=a^2\ , \qquad L_2: \quad \big(x^2+y^2\big)^2 = 2a^2\big(x^2-y^2\big)$$

za $|x| \ge a$ i $a>0$.

Rešenje. Neka je D deo xy–ravni čiju površinu d treba izračunati. Kriva L_1 je kružnica, a kriva L_2 lemniskata (Zadatak 6). Kako je $|x| \ge a$, D je van kružnice L_1 i sastoji se od oblasti D_1 za $x \ge a$ i D_2 za $x \le -a$, tj. $D = D_1 \cup D_2$. Zbog simetrije u odnosu na x i y–osu, posmatramo samo deo D_3 oblasti D_1 u I kvadrantu.



Uvođenjem polarnih koordinata sa

$$x = r\cos\varphi\ ,\ y = r\sin\varphi\ ,$$

krive L_1, L_2 se transformišu u

$$L_1^*:\quad r = a\ ,\qquad L_2^*:\quad r = \sqrt{2}\,a\sqrt{\cos 2\varphi}\ .$$

Budući da smo se ograničili na I kvadrant za koji je $0 \le \varphi \le \pi/2$, rešavanjem jednačine $a = \sqrt{2}\,a\sqrt{\cos 2\varphi}$ dobija se redom: $\cos 2\varphi = 1/2$, $2\varphi = \pi/3$, $\varphi = \pi/6$, pa se krive L_1^*, L_2^* seku u tački $(r,\varphi) = (a, \pi/6)$. Zato se oblast D_3 preslikava u oblast

$$D_3^*:\quad a \le r \le \sqrt{2}\,a\sqrt{\cos 2\varphi}\ ,\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{6}\ .$$

Vrednost $\varphi = \pi/6$ smo mogli da nađemo i u xy–ravni. Rešavanjem sistema jednačina $x^2 + y^2 = a^2$, $\big(x^2+y^2\big)^2 = 2a^2\big(x^2 - y^2\big)$ uz uslov $x, y > 0$, određuje se presečna tačka $(x,y) = (\sqrt{3}\,a/2, a/2)$ krivih L_1 i L_2 u I kvadrantu, pa je $\tan\varphi = y/x = 1/\sqrt{3}$, $\varphi = \arctan 1/\sqrt{3} = \pi/6$.

Tražena površina je sada

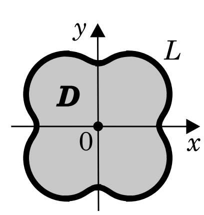
$$\begin{aligned} d &= \iint_D dxdy = 4\iint_{D_3} dxdy = 4\iint_{D_3^*} r\,drd\varphi = 4\int_0^{\pi/6} d\varphi \int_a^{\sqrt{2}\,a\sqrt{\cos 2\varphi}} r\,dr \\ &= 4\int_0^{\pi/6} \frac{r^2}{2}\Big|_{r=a}^{r=\sqrt{2}\,a\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi = 2a^2\int_0^{\pi/6} (2\cos 2\varphi - 1)\,d\varphi \\ &= 2a^2(\sin 2\varphi - \varphi)\Big|_0^{\pi/6} = 2a^2\Big(\sin\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\Big) = 2a^2\Big(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}\Big) = \frac{3\sqrt{3} - \pi}{3}\,a^2\ . \end{aligned}$$

Primetimo da $(0,0) \notin D$ i da je $J = r > 0$. Ako je L_3 oznaka x–ose, prethodni uslov garantuje da se granica $\bigcup_{i=1}^3 L_i$ oblasti D_3 preslikava u granicu $\bigcup_{i=1}^3 L_i^*$ oblasti D_3^*, gde je $\varphi = 0$ jednačina za L_3^*.

$\boxed{\textbf{29}}$. Izračunati površinu oblasti D u xy–ravni $(z = 0)$ ograničenu zatvorenom krivom

$$L:\quad \big(x^2 + y^2\big)^3 = x^4 + y^4\ ;\quad (x,y) \ne (0,0)\ .$$

Rešenje. Tačka $(0,0)$, koja zadovoljava implicitnu jednačinu, je singularna tačka jednačine i to *izolovana tačka* ([**2**], str. 96). Uklonjena je iz jednačine uslovom $(x,y) \ne (0,0)$. Implicitna jednačina nema drugih ograničenja, pa je L u svim kvadrantima, što znači da je $(0,0) \in D$, iako $(0,0) \notin L$. Kriva L i oblast D ograničena njome imaju izgled sa sledeće slike, dobijen upotrebom računara (Napomena 3.4.1).



Uvođenjem polarnih koordinata sa

$$x = r\cos\varphi\ ,\ \ y = r\sin\varphi$$

i imajući u vidu da je $r = 0$ za tačku $(0,0) \in D$, $J = r \geq 0$, kriva L se preslikava u

$$L^* : \quad r = \sqrt{\cos^4\varphi + \sin^4\varphi}\ ,$$

a oblast D u

$$D^* : \quad 0 \leq r \leq \sqrt{\cos^4\varphi + \sin^4\varphi}\ ,\ \ 0 \leq \varphi \leq 2\pi\ .$$

Tražena površina je

$$\begin{aligned} d &= \iint_D dxdy = \iint_{D^*} r\,drd\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{\cos^4\varphi+\sin^4\varphi}} r\,dr \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \big(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi\big)\,d\varphi = \frac{3}{4}\,\pi\ , \end{aligned}$$

pri čemu je poslednji određeni integral rešen pomoću formula iz Zadatka 10.

Da bismo izbegli ponavljanje u kasnijem tekstu, ovde napominjemo da su slike iz Zadataka 31–35, 37 takođe dobijene pomoću računara.

$\boxed{\textbf{30}}$. Izračunati površinu oblasti u xy–ravni $(z = 0)$ ograničenu zatvorenom krivom

$$L : \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = x + y\ ,$$

gde je $a, b > 0$.

Rešenje. Neka je D oblast čiju površinu d treba izračunati. Kriva L sadrži tačku $(x, y) = (0, 0)$, pa je $(0, 0) \in D$.

Zadatak rešavamo na dva načina.

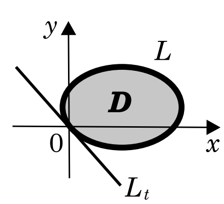
Transformišemo jednačinu krive L u

$$\frac{x^2 - a^2x}{a^2} + \frac{y^2 - b^2y}{b^2} = 0\ ,\quad \frac{\Big(x - \dfrac{a^2}{2}\Big)^2}{a^2} + \frac{\Big(y - \dfrac{b^2}{2}\Big)^2}{b^2} = \frac{1}{4}\big(a^2 + b^2\big)$$

i dobijamo

$$L : \quad \frac{\Big(x - \dfrac{a^2}{2}\Big)^2}{\Big(\dfrac{a}{2}\sqrt{a^2+b^2}\Big)^2} + \frac{\Big(y - \dfrac{b^2}{2}\Big)^2}{\Big(\dfrac{b}{2}\sqrt{a^2+b^2}\Big)^2} = 1\ .$$

Poslednja jednačina znači da je L "pomerena" elipsa koja prolazi kroz koordinatni početak.



Uvodeći smenu

$$x = \frac{a^2}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{a^2+b^2}\, r\cos\varphi \ , \ y = \frac{b^2}{2} + \frac{b}{2}\sqrt{a^2+b^2}\, r\sin\varphi \ ,$$

za koju je

$$J = \begin{vmatrix} x_r & x_\varphi \\ y_r & y_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{a}{2}\sqrt{a^2+b^2}\,\cos\varphi & -\frac{a}{2}\sqrt{a^2+b^2}\, r\sin\varphi \\ \frac{b}{2}\sqrt{a^2+b^2}\,\sin\varphi & \frac{b}{2}\sqrt{a^2+b^2}\, r\cos\varphi \end{vmatrix} = \frac{1}{4}ab\big(a^2+b^2\big)r \geq 0 \ ,$$

elipsa L se preslikava u

$$L^*: \quad r = 1 \ ,$$

a oblast D u pravougaonu oblast

$$D^*: \quad 0 \leq r \leq 1 \ , \ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \ .$$

Površina d se lako izračunava,

$$\begin{aligned} d &= \iint_D dxdy = \frac{1}{4}ab\big(a^2+b^2\big)\iint_{D^*} r\, drd\varphi = \frac{1}{4}ab\big(a^2+b^2\big)\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r\, dr \\ &= \frac{1}{4}ab\big(a^2+b^2\big)\pi \ . \end{aligned}$$

Zadatak rešavamo na drugi način. Pretpostavimo da krivu L ne prepoznajemo kao elipsu na osnovu zadate jednačine, pa jednačinu ne dovodimo na uobičajeni oblik. Zadata jednačina sugeriše smenu kojom se sa Descartesovih x, y prelazi na uopštene polarne koordinate r, φ. Kako nam značenje koordinate φ u xy–ravni nije poznato, komplikovanu diskusiju izbegavamo tako što ovu smenu realizujemo kao kompoziciju dve smene (Napomena 1.4.4).

Prva smena je

$$x = au \ , \ y = bv \ ,$$

za koju je

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = ab > 0$$

i kojom se kriva L preslikava u

$$L^*: \quad u^2 + v^2 = au + bv \ .$$

Kriva L^* prolazi kroz koordinatni početak $(u,v) = (0,0)$ i zadovoljava uslov $au + bv \geq 0$, tj. $v \geq -(a/b)u$. Tangentu L_t^* krive L^* kroz tačku $(0,0)$ tražimo u obliku $v = ku$. Neka je $v = ku$ jednačina bilo koje prave L_1 kroz tačku $(0,0)$. Zamenom $v = ku$ u jednačinu krive L^* sledi

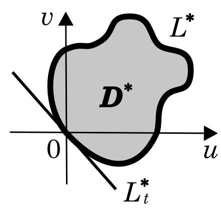
$$\big(1+k^2\big)u^2 - (a+bk)u = 0 \ ,$$

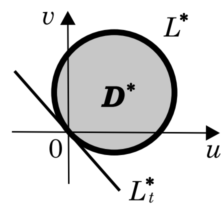
odakle su $u_1 = 0$, $u_2 = (a+bk)/\big(1+k^2\big)$ prve koordinate presečnih tačaka za L_1 i L^*. Da bi L_1 bila tangenta L_t^*, presečna tačka mora da bude dvostruka (tačka dodira), pa je $u_2 = u_1 = 0$, $a + bk = 0$ i $k = -a/b$. Dakle, jednačina tangente je

$$L_t^*: \quad v = -\frac{a}{b}\, u \ .$$

Na osnovu dosadašnjeg ispitivanja možemo da skiciramo krivu L^* i oblast D^* ograničenu njome (prva slika), što je dovoljno za dalji rad. Međutim, znamo i više. Kriva L^* je "pomerena" kružnica (druga slika)

$$L^* : \quad \Big(u - \frac{a}{2}\Big)^2 + \Big(v - \frac{b}{2}\Big)^2 = \frac{1}{4}\big(a^2 + b^2\big) \ .$$





Druga smena je

$$u = r\cos\varphi \ , \ v = r\sin\varphi \ ,$$

kojom sa promenljivih u, v prelazimo na polarne koordinate r, φ u uv–ravni i za koju je $J(r,\varphi) = r \geq 0$. Kriva L^* se preslikava u

$$L^{**} : \quad r = a\cos\varphi + b\sin\varphi \ .$$

Označavajući sa $\varphi_0 \in [-\pi/2, 0]$ ugao između L_t^* i pozitivnog dela u–ose, dobijamo $\tan\varphi_0 = v/u = -a/b$ i

$$\varphi_0 = \arctan\Big(-\frac{a}{b}\Big) = -\arctan\frac{a}{b} \ .$$

Kako je L_t^* tangenta krive L^* koja prolazi kroz $(0,0)$ i φ polarni ugao u uv–ravni, znamo da je $\varphi \in [\varphi_0, \varphi_0 + \pi]$. Još je $(u,v) = (0,0) \in L^*$, tj. $(0,0) \in D^*$, pa se oblast D^* transformiše u

$$D^{**} : \quad 0 \leq r \leq a\cos\varphi + b\sin\varphi \ , \ \varphi \in [\varphi_0, \varphi_0 + \pi] \ .$$

Tražena površina je

$$\begin{aligned} d &= \iint_D dxdy = ab \iint_{D^*} dudv = ab \iint_{D^{**}} r\,drd\varphi \\ &= ab \int_{\varphi_0}^{\varphi_0+\pi} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi + b\sin\varphi} r\,dr = \frac{1}{2}ab \int_{\varphi_0}^{\varphi_0+\pi} (a\cos\varphi + b\sin\varphi)^2\,d\varphi \\ &= \frac{1}{2}a^3b \int_{\varphi_0}^{\varphi_0+\pi} \cos^2\varphi\,d\varphi + a^2b^2 \int_{\varphi_0}^{\varphi_0+\pi} \cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi + \frac{1}{2}ab^3 \int_{\varphi_0}^{\varphi_0+\pi} \sin^2\varphi\,d\varphi \\ &= \frac{1}{4}ab\big(a^2 + b^2\big)\pi \ . \end{aligned}$$

Pri smeni granica u određenim integralima su korišćene jednakosti navedene u Zadatku 18, kao i

$$\sin(\alpha + 2\pi) = \sin\alpha \quad (\alpha = 2\varphi_0) \ .$$

Drugi način rešavanja zadatka potvrđuje zapažanja iz Napomene 1.4.1, čak i u jednostavnijem slučaju kružnice L^* koja prolazi kroz koordinatni početak.

Primetimo i ovde da polarne i uopštene polarne koordinate tačaka nemaju isto značenje, a time ni iste vrednosti u xy–ravni. Uopštena polarna koordinata φ jeste polarni ugao, ali za tačke iz uv, a ne iz xy–ravni i za krivu L uzima vrednosti $\varphi \in [-\arctan(a/b), -\arctan(a/b)+\pi]$. Ako je ψ polarni ugao u xy–ravni, za krivu L je $\psi \in [-\pi/4, 3\pi/4]$, što sledi iz jednačine njene tangente

$$L_t: \quad y = -x \ ,$$

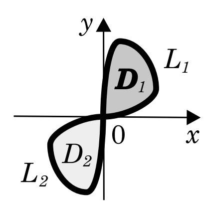
koja se dobija slično kao L_t^*. Opseg ugla ψ je isti za proizvoljne brojeve a, b, dok se opseg koordinate φ menja u zavisnosti od ovih brojeva.

$\boxed{\mathbf{31}}$. Izračunati površinu dela xy–ravni ($z=0$) ograničenog krivom

$$L: \quad \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^4 = 4xy \ ,$$

gde je $a, b > 0$.

Rešenje. Neka je D deo xy–ravni čiju površinu d treba izračunati. U jednačini krive L je $(x/a+y/b)^4 \geq 0$, pa mora da bude i $xy \geq 0$, tj. $x, y \geq 0$ ili $x, y \leq 0$. Ove nejednakosti važe u I i III kvadrantu i odnose se na dve zatvorene krive L_1 i L_2, sa zajedničkom tačkom $(0,0)$. Tačka $(0,0) \in L$ je singularna i to dvostruka tačka jednačine. Slično lemniskati (Zadatak 6), L nije zatvorena prosta kriva u smislu Definicije 1.1.9, već je $L = L_1 \cup L_2$, a D se sastoji od oblasti D_1 i D_2, tj. $D = D_1 \cup D_2$. Zbog simetrije u odnosu na koordinatni početak $(0,0)$, oblasti D_1 i D_2 imaju jednake površine, pa posmatramo samo krivu L_1 i oblast ograničenu njome D_1 u I kvadrantu. Za D_1 važi $x, y \geq 0$ i $(0,0) \in D_1$.



Uvodimo uopštene polarne koordinate sa

$$x = ar\cos^2\varphi \ , \ y = br\sin^2\varphi \ ,$$

što je moguće zbog $x, y \geq 0$. Prethodna smena je oblika (1.4.6) sa parnim brojem $n=2$, pa je $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ maksimalni raspon za φ. Zato važi $\cos\varphi \geq 0$, $\sin\varphi \geq 0$ i

$$J = \begin{vmatrix} x_r & x_\varphi \\ y_r & y_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos^2\varphi & -2ar\cos\varphi\sin\varphi \\ b\sin^2\varphi & 2br\sin\varphi\cos\varphi \end{vmatrix} = 2abr\cos\varphi\sin\varphi \geq 0 \ ,$$

pri čemu J može i odmah da se odredi pomoću (3.4.8).

Kriva L_1 se preslikava u krivu

$$L_1^*: \quad r = 2\sqrt{ab}\cos\varphi\sin\varphi \ ,$$

koja je definisana za svako $\varphi \in [0, \pi/2]$, a oblast D_1 u

$$D_1^* : \quad 0 \le r \le 2\sqrt{ab}\,\cos\varphi\sin\varphi\ ,\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\ .$$

Koristeći jednakosti

$$\begin{aligned} &2\cos\varphi\sin\varphi = \sin 2\varphi\ ,\\ &\cos^3\varphi\sin^3\varphi = \frac{1}{8}\sin^3 2\varphi = \frac{1}{8}\big(1-\cos^2 2\varphi\big)\sin 2\varphi = \frac{1}{8}\sin 2\varphi - \frac{1}{8}\cos^2 2\varphi\sin 2\varphi\ ,\end{aligned}$$

za traženu površinu se dobija

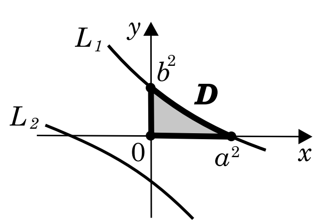
$$\begin{aligned} d &= \iint_D dxdy = 2\iint_{D_1} dxdy = 4ab\iint_{D_1^*} r\cos\varphi\sin\varphi\,drd\varphi\\ &= 4ab\int_0^{\pi/2}\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi\int_0^{2\sqrt{ab}\cos\varphi\sin\varphi} r\,dr = 8a^2b^2\int_0^{\pi/2}\cos^3\varphi\sin^3\varphi\,d\varphi\\ &= a^2b^2\Big(-\frac{1}{2}\cos 2\varphi\,\Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos^2 2\varphi\,d(\cos 2\varphi)\Big)\\ &= \frac{1}{2}\,a^2b^2\Big(2+\frac{\cos^3 2\varphi}{3}\,\Big|_0^{\pi/2}\Big) = \frac{2}{3}\,a^2b^2\ .\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{32}}$. Izračunati površinu oblasti u xy–ravni $(z = 0)$ ograničene koordinatnim osama i jednom od krivih

$$L_{1,2} : \quad \Big(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\Big)^4 = x^2 + y^2\ ; \quad (x, y) \ne (0, 0)$$

za $x, y \ge 0$ i $a, b > 0$.

Rešenje. Neka je D oblast čiju površinu d treba izračunati. Data implicitna jednačina objedinjuje jednačine dveju krivih, koje nemaju zajedničkih tačaka i simetrične su u odnosu na koordinatni početak $(0, 0)$. Tačka $(0, 0)$, koja zadovoljava implicitnu jednačinu, je singularna i to izolovana tačka jednačine. Odstranjena je uslovom $(x, y) \ne (0, 0)$. Zbog $x, y \ge 0$ treba imati u vidu samo krivu koja prolazi kroz I kvadrant, na slici označenu sa L_1. Dakle, oblast D je ograničena koordinatnim osama i krivom L_1.



Uvodimo uopštene polarne koordinate sa

$$x = ar\cos^2\varphi\ ,\ y = br\sin^2\varphi\ ,$$

što je moguće zbog $x, y \geq 0$. Smena je ista kao u Zadatku 31, pa je $\varphi \in [0, \pi/2]$, $\cos\varphi \geq 0$, $\sin\varphi \geq 0$ i

$$J = 2abr\cos\varphi\sin\varphi \geq 0\ .$$

Iz jednačine krive L_1 sledi $r^2 = a^2\cos^4\varphi + b^2\sin^4\varphi$, pa se L_1 preslikava u krivu

$$L_1^*: \quad r = \sqrt{a^2\cos^4\varphi + b^2\sin^4\varphi}\ ,$$

koja je definisana za svako $\varphi \in [0, \pi/2]$. Tački $(0,0) \in D$ odgovara $r = 0$ i oblast D prelazi u

$$D^*: \quad 0 \leq r \leq \sqrt{a^2\cos^4\varphi + b^2\sin^4\varphi}\ ,\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\ .$$

Tražena površina je

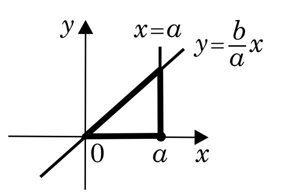
$$\begin{aligned}
d &= \iint_D dxdy = 2ab\iint_{D^*} r\cos\varphi\sin\varphi\, drd\varphi \\
&= 2ab\int_0^{\pi/2}\cos\varphi\sin\varphi\, d\varphi\int_0^{\sqrt{a^2\cos^4\varphi+b^2\sin^4\varphi}} r\, dr \\
&= ab\int_0^{\pi/2}\cos\varphi\sin\varphi\big(a^2\cos^4\varphi + b^2\sin^4\varphi\big)\, d\varphi \\
&= -a^3b\int_0^{\pi/2}\cos^5\varphi\, d(\cos\varphi) + ab^3\int_0^{\pi/2}\sin^5\varphi\, d(\sin\varphi) \\
&= -a^3b\,\frac{\cos^6\varphi}{6}\Big|_0^{\pi/2} + ab^3\,\frac{\sin^6\varphi}{6}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{6}\,a^3b + \frac{1}{6}\,ab^3 = \frac{1}{6}\,ab\big(a^2+b^2\big)\ .
\end{aligned}$$

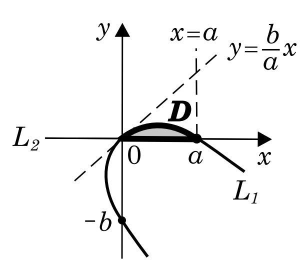
$\boxed{\textbf{33}}$. Izračunati površinu oblasti u xy–ravni $(z = 0)$ ograničene x–osom i krivom

$$L_1: \quad \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 = \frac{x}{a} - \frac{y}{b}$$

za $y \geq 0$ i $a, b > 0$.

Rešenje. Neka je D oblast čiju površinu d treba izračunati. U jednačini krive L_1 je $(x/a + y/b)^2 \geq 0$, pa mora da bude $x/a - y/b \geq 0$, tj. $y \leq (b/a)x$, odakle je $x \geq 0$ za $y \geq 0$. Kako L_1 seče x–osu $(y = 0)$ samo u tačkama $(0,0)$ i $(a,0)$, oblast D se nalazi u I kvadrantu između x–ose i prave $x = a$, a ispod prave $y = (b/a)x$. Pozicija oblasti D je prikazana na prvoj od sledećih slika, a tačan izgled na drugoj slici.





Zadatak rešavamo na dva načina.

Uvodimo uopštene polarne koordinate sa

$$x = ar\cos^2\varphi\ ,\ y = br\sin^2\varphi\ ,$$

za koje je $\varphi \in [0, \pi/2]$ i

$$J = 2abr\cos\varphi\sin\varphi \geq 0\ .$$

Kriva L_1 se preslikava u

$$L_1^*:\quad r = \cos 2\varphi$$

i definisana je za $\cos 2\varphi \geq 0$, tj. $2\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$, odnosno $\varphi \in [-\pi/4, \pi/4]$. S obzirom na maksimalni raspon $[0, \pi/2]$ promenljive φ, treba uzeti deo $\varphi \in [0, \pi/4]$. Oblast D se transformiše u

$$D^*:\quad 0 \leq r \leq \cos 2\varphi\ ,\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}\ .$$

Primenom jednakosti navedene u Zadatku 31, tražena površina postaje

$$\begin{aligned} d &= \iint_D dxdy = 2ab\iint_{D^*} r\cos\varphi\sin\varphi\, d\varphi = 2ab\int_0^{\pi/4}\cos\varphi\sin\varphi\int_0^{\cos 2\varphi} r\, dr \\ &= \frac{1}{2}\,ab\int_0^{\pi/4}\sin 2\varphi\cos^2 2\varphi\, d\varphi = -\frac{1}{4}\,ab\int_0^{\pi/4}\cos^2 2\varphi\, d(\cos 2\varphi) = \frac{1}{12}\,ab\ . \end{aligned}$$

Elegantniji, ali manje uobičajen način rešavanja zadatka se sastoji u uvođenju smene

$$u = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}\ ,\ v = \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\ ,$$

iz koje je

$$\begin{aligned} x &= \frac{a}{2}(u+v)\ ,\ y = \frac{b}{2}(u-v)\ , \\ J &= \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a/2 & a/2 \\ b/2 & -b/2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\,ab < 0 \end{aligned}$$

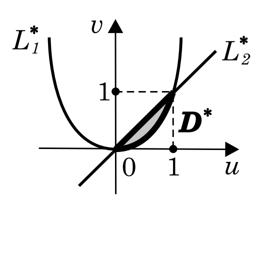
i $|J| = ab/2$.

Neka je L_2 oznaka x–ose ($y = 0$). Zbog $J \neq 0$, granica $L = L_1 \cup L_2$ oblasti D iz xy–ravni se preslikava u granicu $L^* = L_1^* \cup L_2^*$ oblasti D^* iz uv–ravni, gde je

$$L_1^*:\quad v = u^2\ ,\qquad L_2^*:\quad v = u\ .$$

Kriva L_1^* je parabola, a L_2^* je prava. Rešavanjem sistema jednačina $v = u^2$, $v = u$, dobijaju se presečne tačke ovih krivih $(u, v) = (0, 0)$ i $(u, v) = (1, 1)$, pa je opis oblasti D^* dat sa

$$D^*:\quad 0 \leq u \leq 1\ ,\ u^2 \leq v \leq u\ .$$



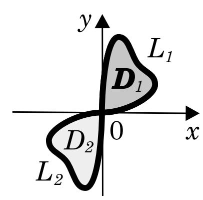
Tražena površina je

$$d = \iint_D dxdy = \frac{1}{2}\,ab \iint_{D^*} dudv = \frac{1}{2}\,ab \int_0^1 du \int_{u^2}^u dv = \frac{1}{2}\,ab \int_0^1 \big(u - u^2\big)\, du = \frac{1}{12}\,ab\ .$$

34. Izračunati površinu dela xy–ravni ($z = 0$) ograničenog krivom

$$L: \quad \big(\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}\,\big)^{12} = xy\ .$$

Rešenje. Neka je D deo xy–ravni čiju površinu d treba izračunati. Slično kao u Zadatku 31, kriva L je definisana za $x, y \geq 0$ ili $x, y \leq 0$, tj. u I i III kvadrantu. Tačka $(0,0)$ je singularna i to dvostruka tačka jednačine. Važi $L = L_1 \cup L_2$ i $D = D_1 \cup D_2$. Između L_1 i L_2, odnosno D_1 i D_2, postoji simetrija u odnosu na koordinatni početak, pa posmatramo samo D_1 u I kvadrantu za koji je $x, y \geq 0$ i $(0,0) \in D_1$.



Uvodimo uopštene polarne koordinate sa

$$x = r\cos^4\varphi\ ,\ \ y = r\sin^4\varphi\ ,$$

za koje je $\varphi \in [0, \pi/2]$, $\cos\varphi \geq 0$, $\sin\varphi \geq 0$ i

$$J = \begin{vmatrix} x_r & x_\varphi \\ y_r & y_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos^4\varphi & -4r\cos^3\varphi\sin\varphi \\ \sin^4\varphi & 4r\sin^3\varphi\cos\varphi \end{vmatrix} = 4r\cos^3\varphi\sin^3\varphi \geq 0\ .$$

Prethodna smena odgovara uslovu $x, y \geq 0$.

Za uvedenu smenu je $\big(\sqrt{x} + \sqrt{y}\,\big)^{12} = r^6 = r^2\cos^4\varphi\sin^4\varphi$, pa kriva L_1 prelazi u

$$L_1^*: \quad r = \cos\varphi\sin\varphi$$

i oblast D_1^* ima opis

$$D_1^*: \quad 0 \leq r \leq \cos\varphi\sin\varphi\ ,\ \ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\ .$$

Slično kao u Zadatku 31 nalazimo

$$\cos^5\varphi\sin^5\varphi = \frac{1}{32}\big(\sin 2\varphi - 2\cos^2 2\varphi\sin 2\varphi + \cos^4 2\varphi\sin 2\varphi\big)$$

i za površinu d dela xy–ravni D dobijamo

$$\begin{aligned} d &= \iint_D dxdy = 2\iint_{D_1} dxdy = 8\iint_{D_1^*} r\cos^3\varphi\sin^3\varphi\, d\varphi \\ &= 8\int_0^{\pi/2} \cos^3\varphi\sin^3\varphi\, d\varphi \int_0^{\cos\varphi\sin\varphi} r\, dr = 4\int_0^{\pi/2} \cos^5\varphi\sin^5\varphi\, d\varphi \\ &= \frac{1}{8}\Big(-\frac{1}{2}\cos 2\varphi\Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos^2 2\varphi\, d(\cos 2\varphi) - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos^4 2\varphi\, d(\cos 2\varphi)\Big) = \frac{1}{15}\ . \end{aligned}$$

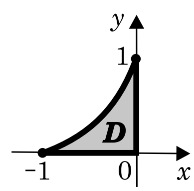
$\boxed{\mathbf{35}.}$ Izračunati dvojni integral

$$I = \iint_D \sqrt{\sqrt{-x} + \sqrt{y}}\; dxdy \ ,$$

gde je D oblast u xy–ravni $(z = 0)$ ograničena koordinatnim osama i krivom

$$L : \quad \sqrt{-x} + \sqrt{y} = 1 \ .$$

Rešenje. Kriva L je definisana za $x \leq 0$, $y \geq 0$, pa se oblast D nalazi u II kvadrantu.



Smenom Descartesovih koordinata uopštenim polarnim koordinatama pomoću

$$x = -r\cos^4\varphi \ , \ y = r\sin^4\varphi \ ,$$

dobijamo $\varphi \in [0, \pi/2]$, $\cos\varphi \geq 0$, $\sin\varphi \geq 0$,

$$J = \begin{vmatrix} x_r & x_\varphi \\ y_r & y_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\cos^4\varphi & 4r\cos^3\varphi\sin\varphi \\ \sin^4\varphi & 4r\sin^3\varphi\cos\varphi \end{vmatrix} = -4r\cos^3\varphi\sin^3\varphi \leq 0$$

i $|J| = 4r\cos^3\varphi\sin^3\varphi$. Smena odgovara uslovu $x \leq 0$, $y \geq 0$.

Za uvedenu smenu je $\sqrt{-x} + \sqrt{y} = \sqrt{r} = 1$, pa kriva L prelazi u

$$L^* : \quad r = 1$$

i oblast D^* ima opis

$$D^* : \quad 0 \leq r \leq 1 \ , \ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \ .$$

Postupajući kao u Zadatku 31, izračunavamo integral

$$I = 4\iint_{D^*} \sqrt[4]{r}\; r\cos^3\varphi\sin^3\varphi\, drd\varphi = 4\int_0^1 r^{5/4}\, dr \int_0^{\pi/2} \cos^3\varphi\sin^3\varphi\, d\varphi$$
$$= \frac{16}{9}\int_0^{\pi/2} \cos^3\varphi\sin^3\varphi\, d\varphi = \frac{4}{27} \ .$$

$\boxed{\mathbf{36}.}$ Izračunati površinu oblasti u xy–ravni $(z = 0)$ ograničene zatvorenom krivom (*petlja Descartesovog lista*)

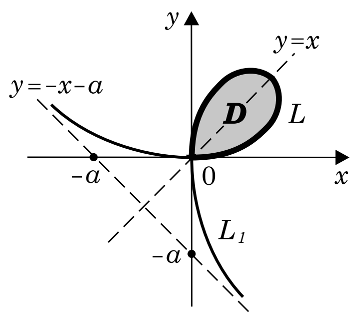
$$L : \quad x^3 + y^3 = 3axy \ ; \quad x, y \geq 0 \ ,$$

gde je $a > 0$.

Rešenje. Neka je D oblast čiju površinu d treba izračunati. Važi $(0,0) \in L$ i $(0,0) \in D$. Kriva L je deo (petlja) dobro poznatog *Descartesovog lista*

$$L_1 : \quad x^3 + y^3 = 3axy \ .$$

Descartesov list L_1 je simetričan u odnosu na pravu $y = x$, kosa asimptota mu je prava $y = -x - a$ i ima izgled sa sledeće slike.



Uvodimo uopštene polarne koordinate sa

$$x = r\cos^{2/3}\varphi \ , \ \ y = r\sin^{2/3}\varphi \ .$$

Smena je oblika (1.4.6) sa racionalnim brojem $n = 2/3$. Kako je $\cos^2\varphi \geq 0$, $\sin^2\varphi \geq 0$ za svako $\varphi \in [0, 2\pi]$, ova smena može da se uvede samo za $x, y \geq 0$ i ponaša se kao (1.4.6) sa parnim brojem $n = 2$. Zato je $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ maksimalni raspon koordinate φ i važi $\cos\varphi \geq 0$, $\sin\varphi \geq 0$. Prema (3.4.8), dalje je

$$J = \frac{2}{3}\, r\cos^{-1/3}\varphi\sin^{-1/3}\varphi \geq 0 \ .$$

Vrednost $J = 0$ se dobija za $r = 0$ i $\varphi \neq 0$, $\varphi \neq \pi/2$. Za $\varphi = 0$ ili $\varphi = \pi/2$ i istovremeno $r = 0$ jakobijan je neodređen, dok za $\varphi = 0$ ili $\varphi = \pi/2$ i $r \neq 0$ nije definisan.

Kriva L se preslikava u

$$L^* : \quad r = 3a\cos^{2/3}\varphi\sin^{2/3}\varphi$$

i definisana je za svako $\varphi \in [0, \pi/2]$, a oblast D u

$$D^* : \quad 0 \leq r \leq 3a\cos^{2/3}\varphi\sin^{2/3}\varphi \ , \ \ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \ .$$

Tačke $(r, 0)$, $(r, \pi/2)$ za $r \neq 0$, u kojima jakobijan nije definisan, nas ne interesuju jer nisu iz oblasti D^*. Tačke $(r, 0)$, $(r, \pi/2)$ za $r = 0$ pripadaju granici oblasti D^* i u njima jakobijan može neprekidno da se produži tako da je $J(0,0) = J(0, \pi/2) = 0$. Zato (3.4.5), (3.4.6) važi i u ovom slučaju ([**1**], str. 272–273), pa je površina

$$\begin{aligned} d &= \iint_D dxdy = \frac{2}{3}\iint_{D^*} r\cos^{-1/3}\varphi\sin^{-1/3}\varphi\, drd\varphi \\ &= \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2} \cos^{-1/3}\varphi\sin^{-1/3}\varphi\, d\varphi \int_0^{3a\cos^{2/3}\varphi\sin^{2/3}\varphi} r\, dr \\ &= 3a^2 \int_0^{\pi/2} \cos\varphi\sin\varphi\, d\varphi = \frac{3}{2}\, a^2 \ . \end{aligned}$$

Interesantno je da je površina dela xy–ravni između Descartesovog lista i njegove asimptote jednaka nađenoj površini $3a^2/2$ dela ograničenog petljom ([**7**], str. 104).

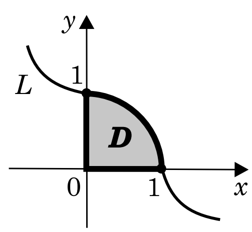
$\boxed{\mathbf{37}.}$ Izračunati dvojni integral

$$I = \iint_D x^2y^2\sqrt{1-x^3-y^3}\; dxdy \ ,$$

gde je D oblast u xy–ravni ($z=0$) ograničena koordinatnim osama i krivom

$$L: \quad x^3+y^3=1 \ .$$

Rešenje. Kriva L seče x–osu ($y=0$) u tački $(1,0)$, a y–osu ($x=0$) u tački $(0,1)$ i ima izgled sa sledeće slike. Oblast D je u I kvadrantu.



Uvodeći istu smenu i koristeći rezultate iz Zadatka 36, dobijamo

$$D^*: \quad 0 \le r \le 1 \ , \ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$$

i dalje

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{3}\iint_{D^*} r^4\cos^{4/3}\varphi\sin^{4/3}\varphi\sqrt{1-r^3}\; r\cos^{-1/3}\varphi\sin^{-1/3}\varphi\, drd\varphi \\ &= \frac{2}{3}\int_0^1 r^5\sqrt{1-r^3}\; dr\int_0^{\pi/2}\cos\varphi\sin\varphi\, d\varphi = \frac{1}{3}\int_0^1 r^5\sqrt{1-r^3}\; dr \ . \end{aligned}$$

Poslednji određeni integral se rešava smenom

$$1-r^3=t^2 \ ,$$

za koju je $r^3=1-t^2$, $-3r^2\,dr=2t\,dt$ i $r^5\,dr=r^3r^2\,dr=-(2/3)t\big(1-t^2\big)\,dt$. Još je $t=1$ za $r=0$ i $t=0$ za $r=1$, pa je

$$I = -\frac{2}{9}\int_1^0 t^2\big(1-t^2\big)\,dt = \frac{4}{135} \ .$$

Zadatak može da se reši i pomoću Descartesovih koordinata. Kako je

$$\begin{aligned} L: &\quad y = \sqrt[3]{1-x^3} \ , \\ D: &\quad 0 \le x \le 1 \ , \ 0 \le y \le \sqrt[3]{1-x^3} \ , \end{aligned}$$

to je

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt[3]{1-x^3}} x^2 y^2 \sqrt{1-x^3-y^3}\, dy = \int_0^1 x^2\, dx \int_0^{\sqrt[3]{1-x^3}} y^2 \sqrt{1-x^3-y^3}\, dy \\
&= -\frac{1}{3} \int_0^1 x^2\, dx \int_0^{\sqrt[3]{1-x^3}} \sqrt{1-x^3-y^3}\, d\big(1-x^3-y^3\big) \\
&= -\frac{2}{9} \int_0^1 x^2 \big(1-x^3-y^3\big)^{3/2} \Big|_{y=0}^{y=\sqrt[3]{1-x^3}} dx = \frac{2}{9} \int_0^1 x^2 \big(1-x^3\big)^{3/2} dx \\
&= -\frac{2}{27} \int_0^1 \big(1-x^3\big)^{3/2} d\big(1-x^3\big) = -\frac{4}{135} \big(1-x^3\big)^{5/2} \Big|_0^1 = \frac{4}{135}\ .
\end{aligned}
$$

Smena promenljivih u trojnim integralima

Ako je

$$
x = x(u,v,w)\ ,\ y = y(u,v,w)\ ,\ z = z(u,v,w)\ ;
$$

$$
J = J(u,v,w) = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix}\ ,
$$

tada je

$$
\begin{aligned}
&\iiint_D f(x,y,z)\, dxdydz \\
&= \iiint_{D^*} f\big(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\big) \big|J(u,v,w)\big|\, dudvdw\ .
\end{aligned}
$$

Najčešće su cilindrične i uopštene cilindrične koordinate $u = r$, $v = \varphi$, $w = z$, sferne i uopštene sferne koordinate $u = r$, $v = \varphi$, $w = \theta$, za koje je redom:

$$
\begin{aligned}
&x = r\cos\varphi\ ,\ y = r\sin\varphi\ ,\ z = z\ ;\ J = r\ , \\
&x = ar\cos\varphi\ ,\ y = br\sin\varphi\ ,\ z = z\ ;\ J = abr\ , \\
&x = r\cos\varphi\cos\theta\ ,\ y = r\sin\varphi\cos\theta\ ,\ z = r\sin\theta\ ;\ J = r^2\cos\theta\ , \\
&x = ar\cos\varphi\cos\theta\ ,\ y = br\sin\varphi\cos\theta\ ,\ z = cr\sin\theta\ ;\ J = abcr^2\cos\theta\ .
\end{aligned}
$$

38. Izračunati trojni integral

$$
I = \iiint_D xyz\, dxdydz\ ,
$$

gde je D prostorna oblast ograničena površima

$$S_1: \quad xy=1\ , \qquad S_2: \quad xy=9\ , \qquad S_3: \quad y=x\ , \qquad S_4: \quad y=2x\ ,$$
$$S_5: \quad 2z=x^2+y^2\ , \qquad S_6: \quad 4z=x^2+y^2$$

za $x,y>0$ i $b>a>0$.

Rešenje. Površi S_i $(i=1,2,3,4)$ su cilindrične sa izvodnicama paralelnim z–osi, a S_5, S_6 su paraboloidi sa z–osom kao osovinom. Zbog $x,y>0$, iz jednačina površi S_5, S_6 sledi $z>0$, pa je D u I oktantu.

Jednačine površi S_i $(i=1,2,\dots,6)$ sugerišu smenu

$$u=xy\ ,\ v=\frac{y}{x}\ ,\ w=\frac{x^2+y^2}{z}\ ,$$

iz koje je

$$x=\sqrt{\frac{u}{v}}\ ,\ y=\sqrt{uv}\ ,\ z=\frac{u\big(1+v^2\big)}{vw}\ ,$$

$$J=\begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w\\ y_u & y_v & y_w\\ z_u & z_v & z_w\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \dfrac{1}{2\sqrt{uv}} & -\dfrac{1}{2v}\sqrt{\dfrac{u}{v}} & 0\\ \dfrac{v}{2\sqrt{uv}} & \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{u}{v}} & 0\\ \dfrac{1+v^2}{vw} & \dfrac{u\big(v^2-1\big)}{v^2w} & -\dfrac{u\big(1+v^2\big)}{vw^2}\end{vmatrix}$$

$$=-\frac{u\big(1+v^2\big)}{vw^2}\begin{vmatrix} \dfrac{1}{2\sqrt{uv}} & -\dfrac{1}{2v}\sqrt{\dfrac{u}{v}}\\ \dfrac{v}{2\sqrt{uv}} & \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{u}{v}}\end{vmatrix}=-\frac{u\big(1+v^2\big)}{2v^2w^2}\ .$$

Kako je $x,y,z>0$, to je $u,v,w>0$, pa je J neprekidna funkcija i važi

$$|J|=\frac{u\big(1+v^2\big)}{2v^2w^2}>0\ .$$

Zato se granica $S=\bigcup_{i=1}^{6}S_i$ oblasti D iz xyz–sistema preslikava u granicu $S^*=\bigcup_{i=1}^{6}S_i^*$ oblasti D^* iz uvw–sistema, gde je

$$S_1^*: \quad u=1\ , \qquad S_2^*: \quad u=9\ , \qquad S_3^*: \quad v=1\ , \qquad S_4^*: \quad v=2\ ,$$
$$S_5^*: \quad w=2\ , \qquad S_6^*: \quad w=4\ .$$

Oblast D^* je oblast kvadra, sa opisom

$$D^*: \quad 1\le u\le 9\ ,\ 1\le v\le 2\ ,\ 2\le w\le 4\ .$$

Prelazeći prvo na trojni integral po novoj oblasti D^*, a zatim na odgovarajući trostruki integral, sledi

$$\begin{aligned} I&=\frac{1}{2}\iiint_{D^*}\frac{u^2\big(1+v^2\big)}{vw}\,\frac{u\big(1+v^2\big)}{v^2w^2}\,dudvdw=\frac{1}{2}\iiint_{D^*}u^3\,\frac{\big(1+v^2\big)^2}{v^3}\,\frac{1}{w^3}\,dudvdw\\ &=\frac{1}{2}\int_1^9 u^3\,du\int_1^2\frac{\big(1+v^2\big)^2}{v^3}\,dv\int_2^4\frac{1}{w^3}\,dw\\ &=\frac{1}{2}\,\frac{u^4}{4}\,\Big|_1^9\Big(-\frac{1}{2w^2}\Big)\,\Big|_2^4\Big(-\frac{1}{2v^2}+2\ln|v|+\frac{v^2}{2}\Big)\,\Big|_1^2=\frac{615}{64}(15+16\ln 2)\ .\end{aligned}$$

39. Izračunati trojni integral

$$I = \iiint_D z\,dxdydz \ ,$$

gde je D prostorna oblast ograničena površima

$$S_1: \quad z^2 = \frac{c^2}{a^2}\left(x^2+y^2\right) \ , \qquad S_2: \quad z = c$$

i $a, c > 0$.

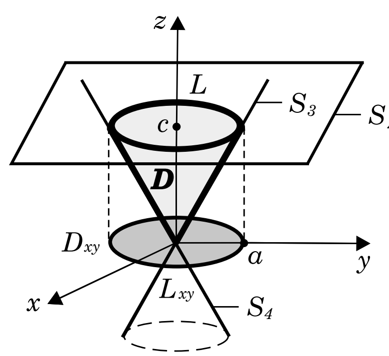
Rešenje. Površ S_1 je konusna sa z–osom kao osovinom i sastoji se od konusa

$$S_3: \quad z = \frac{c}{a}\sqrt{x^2+y^2} \ , \qquad S_4: \quad z = -\frac{c}{a}\sqrt{x^2+y^2} \ ,$$

dok je S_2 ravan paralelna xy–ravni. Zbog $c > 0$, ravan S_2 je iznad xy–ravni, pa je oblast D ograničena sa S_2 i S_3. Neka je L presečna kriva površi S_2 i S_3, a L_{xy} njena projekcija na xy–ravan. Eliminacijom z iz jednačina površi S_2, S_3 nalazimo jednačinu projekcije

$$L_{xy}: \quad x^2+y^2 = a^2 \ , \ z = 0 \ .$$

Projekcija oblasti D na xy–ravan je oblast D_{xy} ograničena sa L_{xy}.



Descartesove koordinate zamenjujemo cilindričnim koordinatama pomoću

$$x = r\cos\varphi \ , \ y = r\sin\varphi \ , \ z = z \ .$$

Jakobijan za ove koordinate je $J = r \geq 0$.

Površi S_2, S_3 i kružnica L_{xy} se preslikavaju u

$$S_2^*: \quad z = c \ , \qquad S_3^*: \quad z = \frac{c}{a}\,r \ ; \qquad L_{xy}^*: \quad r = a \ , \ z = 0 \ .$$

Imajući u vidu značenje cilindričnih koordinata i Napomenu 3.4.3, za L_{xy} važi $\varphi \in [0, 2\pi]$, pa oblast D_{xy} prelazi u

$$D_{xy}^*: \quad 0 \leq r \leq a \ , \ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \ ,$$

a oblast D u

$$D^*: \quad 0 \le r \le a\ ,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\ ,\ \frac{c}{a}\, r \le z \le c\ .$$

Integral I postaje

$$I = \iiint_{D^*} zr\, dr d\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r\, dr \int_{(c/a)r}^c z\, dz$$
$$= 2\pi \int_0^a \frac{1}{2}\, r\Big(c^2 - \frac{c^2}{a^2}\, r^2\Big)\, dr = \pi\Big(c^2 \frac{r^2}{2} - \frac{c^2}{a^2}\,\frac{r^4}{4}\Big)\Big|_0^a = \frac{1}{4}\, a^2 c^2 \pi\ .$$

$\boxed{\textbf{40.}}$ Izračunati zapreminu prostorne oblasti ograničene površima

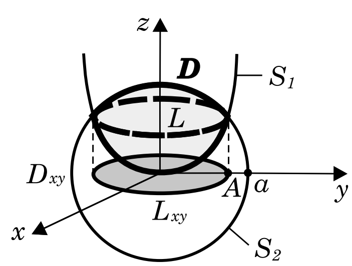
$$S_1: \quad x^2 + y^2 = az\ , \qquad S_2: \quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

za $z \ge 0$ i $a > 0$.

Rešenje. Neka je D oblast čiju zapreminu d treba izračunati. Površ S_1 je paraboloid sa z–osom kao osovinom, a S_2 je centralna sfera poluprečnika a. Zbog uslova $z \ge 0$, oblast D je iznad xy–ravni i predstavlja manju od dve oblasti koje S_1 i S_2 ograničavaju. Neka je L presečna kriva za S_1 i S_2, a L_{xy} njena projekcija na xy–ravan. Smenjujući $z = \big(x^2+y^2\big)/a$ iz jednačine paraboloida u jednačinu sfere sledi $\big(x^2+y^2\big)^2 + a^2\big(x^2+y^2\big) - a^4 = 0$. Za $t = x^2 + y^2 \ge 0$ poslednja jednačina je kvadratna $t^2 + a^2 t - a^4 = 0$ i ima rešenje $t = a^2(\sqrt{5}-1)/2$. Zato je projekcija L_{xy} kružnica

$$L_{xy}: \quad x^2 + y^2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\, a^2\ ,\ z = 0\ .$$

Kružnica L_{xy} je granica projekcije D_{xy} oblasti D na xy–ravan.



Uvođenjem cilindričnih koordinata sa

$$x = r\cos\varphi\ ,\ y = r\sin\varphi\ ,\ z = z\ ,$$

za koje je $J = r \ge 0$, površi S_1, S_2 i kriva L_{xy} se preslikavaju u

$$S_1^*: \quad z = \frac{1}{a}\, r^2\ , \qquad S_2^*: \quad z = \sqrt{a^2 - r^2}\ ; \qquad L_{xy}^*: \quad r = a\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\ ,\ z = 0\ .$$

Kako za L_{xy} važi $\varphi \in [0, 2\pi]$, D_{xy} se preslikava u

$$D^*_{xy}: \quad 0 \le r \le A \ , \ 0 \le \varphi \le 2\pi \ ,$$

a oblast D u

$$D^*: \quad 0 \le r \le A \ , \ 0 \le \varphi \le 2\pi \ , \ \frac{1}{a}\, r^2 \le z \le \sqrt{a^2 - r^2} \ ,$$

gde je

$$A = a\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \ .$$

Za zapreminu se dobija

$$\begin{aligned}
d &= \iiint_D dxdydz = \iiint_{D^*} r\, drd\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^A r\, dr \int_{r^2/a}^{\sqrt{a^2-r^2}} dz \\
&= 2\pi \int_0^A r\Big(\sqrt{a^2-r^2} - \frac{1}{a}\, r^2\Big)\, dr \\
&= -\pi \int_0^A \sqrt{a^2-r^2}\; d\big(a^2-r^2\big) - \frac{2\pi}{a}\int_0^A r^3\, dr \\
&= -\frac{2}{3}\,\pi\big(a^2-r^2\big)\sqrt{a^2-r^2}\,\Big|_0^A - \frac{\pi}{2a}\, r^4\,\Big|_0^A \\
&= \Big[-\frac{2}{3}\big(a^2-A^2\big)\sqrt{a^2-A^2} + \frac{2}{3}\, a^3 - \frac{1}{2}\,\frac{A^4}{a}\Big]\pi = \frac{1}{12}\Big(3\sqrt{5} - 8\sqrt{9-4\sqrt{5}} - 1\Big)a^3\pi \ .
\end{aligned}$$

Uočavajući da je

$$\sqrt{9-4\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5}-2)^2} = \sqrt{5} - 2 \ ,$$

poslednji rezultat se svodi na

$$d = \frac{5}{12}(3 - \sqrt{5}\,)a^3\pi \ .$$

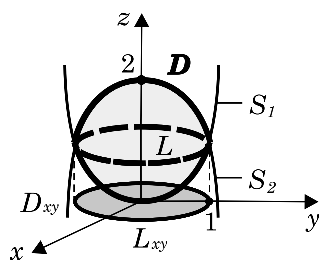
$\boxed{\textbf{41}}$. Izračunati zapreminu prostorne oblasti ograničene površima

$$S_1: \quad x^2 + y^2 = 2 - z \ , \qquad S_2: \quad x^2 + y^2 = z \ .$$

Rešenje. Neka je D oblast čiju zapreminu d treba izračunati. Površi S_1 i S_2 su paraboloidi sa z–osom kao osovinom. Paraboloid S_1 seče z–osu u tački $(0, 0, 2)$. Eliminacijom z iz jednačina za S_1, S_2 sledi jednačina projekcije L_{xy} presečne krive L,

$$L_{xy}: \quad x^2 + y^2 = 1 \ , \ z = 0 \ .$$

Kružnica L_{xy} je granica projekcije D_{xy} oblasti D na xy–ravan.



Uvođenjem cilindričnih koordinata sa

$$x = r\cos\varphi\ ,\ y = r\sin\varphi\ ,\ z = z\ ,$$

dobija se $J = r \geq 0$ i

$$\begin{aligned}
&S_1^*: \quad z = 2 - r^2\ , \qquad S_2^*: \quad z = r^2\ ;\\
&L_{xy}^*: \quad r = 1\ ,\ z = 0\ , \qquad D_{xy}^*: \quad 0 \leq r \leq 1\ ,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi\ ;\\
&D^*: \quad 0 \leq r \leq 1\ ,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi\ ,\ r^2 \leq z \leq 2 - r^2\ .
\end{aligned}$$

Zapremina je

$$\begin{aligned}
d &= \iiint_D dxdydz = \iiint_{D^*} r\,drd\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r\,dr \int_{r^2}^{2-r^2} dz\\
&= 4\pi \int_0^1 r\big(1 - r^2\big)\,dr = \pi\ .
\end{aligned}$$

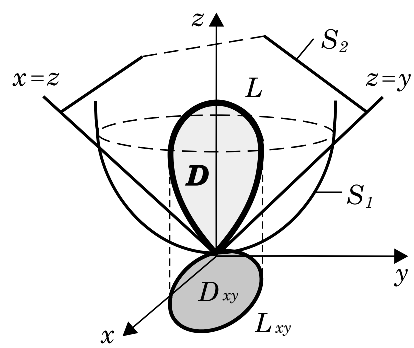
42. Izračunati zapreminu prostorne oblasti ograničene površima

$$S_1: \quad z = x^2 + y^2\ , \qquad S_2: \quad z = x + y\ .$$

Rešenje. Neka je D oblast čiju zapreminu d treba izračunati. Površ S_1 je paraboloid sa z–osom kao osovinom, a S_2 je ravan koja prolazi kroz koordinatni početak $(0,0,0)$. Ravan S_2 seče yz–ravan ($x = 0$) duž prave $z = y$, zx–ravan ($y = 0$) duž prave $x = z$, a paraboloid S_1 duž krive L. Eliminacijom koordinate z iz jednačina za S_1 i S_2 sledi $x^2 + y^2 = x + y$, što je jednačina projekcije L_{xy} krive L na xy–ravan. Ovu jednačinu transformišemo i dobijamo

$$L_{xy}: \quad \Big(x - \frac{1}{2}\Big)^2 + \Big(y - \frac{1}{2}\Big)^2 = \frac{1}{2}\ ,\ z = 0\ ,$$

odakle vidimo da je L_{xy} "pomerena" kružnica sa centrom u tački $(1/2, 1/2, 0)$ i poluprečnika $1/\sqrt{2}$. Projekcija oblasti D na xy–ravan je oblast D_{xy} ograničena sa L_{xy}.



Uvođenjem smene

$$x = \frac{1}{2} + r\cos\varphi\ ,\ y = \frac{1}{2} + r\sin\varphi\ ,\ z = z\ ,$$

za koju je $J = r \geq 0$, površi S_1, S_2 i kriva L_{xy} prelaze u

$$S_1^*:\quad z = \frac{1}{2} + r(\cos\varphi + \sin\varphi) + r^2\ ,\qquad S_2^*:\quad z = 1 + r(\cos\varphi + \sin\varphi)\ ;$$

$$L_{xy}^*:\quad r = \frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ z = 0\ .$$

Kriva L_{xy}^* je definisana za svako $\varphi \in [0, 2\pi]$, pa se oblast D_{xy} preslikava u

$$D_{xy}^*:\quad 0 \leq r \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi\ ,$$

a oblast D u

$$D^*:\quad 0 \leq r \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi\ ,\ z_1(r,\varphi) \leq z \leq z_2(r,\varphi)\ ,$$

gde je

$$z_1(r,\varphi) = \frac{1}{2} + r(\cos\varphi + \sin\varphi) + r^2\ ,\ z_2(r,\varphi) = 1 + r(\cos\varphi + \sin\varphi)\ .$$

Tražena zapremina je

$$\begin{aligned} d &= \iiint_D dxdydz = \iiint_{D^*} r\,drd\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}/2} r\,dr \int_{z_1(r,\varphi)}^{z_2(r,\varphi)} dz \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}/2} r\Big(\frac{1}{2} - r^2\Big)\,dr = \frac{1}{8}\,\pi\ . \end{aligned}$$

Uvedena smena je prostorni analogon smene (1.4.20) u xy–koordinatnoj ravni jer predstavlja kompoziciju smena

$$\begin{gathered} x = u + \frac{1}{2}\ ,\ y = v + \frac{1}{2}\ ,\ z = w\ ; \\ u = r\cos\varphi\ ,\ v = r\sin\varphi\ ,\ w = w\ , \end{gathered}$$

pri čemu je prva smena translacija xyz–sistema u uvw–sistem, a drugom se uvode cilindrične koordinate u uvw–sistemu.

43. Izračunati zapreminu prostorne oblasti ograničene površima

$$S_1: \quad z = 3y^2 \ , \qquad S_2: \quad z = 4 - \left(x^2 + y^2\right) \ .$$

Rešenje. Neka je D oblast čiju zapreminu d treba izračunati. Površ S_1 je cilindrična sa izvodnicama paralelnim x–osi i direktrisom koja je parabola u yz–ravni. Površ S_2 je paraboloid sa z–osom kao osovinom, koji z–osu seče u tački $(0,0,4)$. Eliminacijom z iz jednačina površi S_1 i S_2 sledi jednačina projekcije L_{xy} presečne krive L (slika iz Zadatka 17),

$$L_{xy}: \quad \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \ , \ z = 0 \ .$$

Oblast D_{xy}, ograničena elipsom L_{xy}, je projekcija oblasti D na xy–ravan.

Uvodimo uopštene cilindrične koordinate sa

$$x = 2r\cos\varphi \ , \ y = r\sin\varphi \ , \ z = z$$

i dobijamo $J = 2r \geq 0$,

$$S_1^*: \quad z = 3r^2\sin^2\varphi \ , \qquad S_2^*: \quad z = 4 - r^2\left(4\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) \ ; \qquad L_{xy}^*: \quad r = 1 \ , \ z = 0 \ .$$

Kriva L_{xy}^* je definisana za svako $\varphi \in [0, 2\pi]$, pa je

$$\begin{aligned} D_{xy}^*: &\quad 0 \leq r \leq 1 \ , \ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \ , \\ D^*: &\quad 0 \leq r \leq 1 \ , \ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \ , \ z_1(r,\varphi) \leq z \leq z_2(r,\varphi) \ , \end{aligned}$$

gde je

$$z_1(r,\varphi) = 3r^2\sin^2\varphi \ , \ z_2(r,\varphi) = 4 - r^2\left(4\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) \ .$$

Zapremina je

$$\begin{aligned} d &= \iiint_D dxdydz = 2\iiint_{D^*} r\,drd\varphi dz = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r\,dr \int_{z_1(r,\varphi)}^{z_2(r,\varphi)} dz \\ &= 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 4r\left(1 - r^2\right) dr = 16\pi \int_0^1 r\left(1 - r^2\right) dr = 4\pi \ . \end{aligned}$$

44. Izračunati zapreminu prostorne oblasti ograničene površima

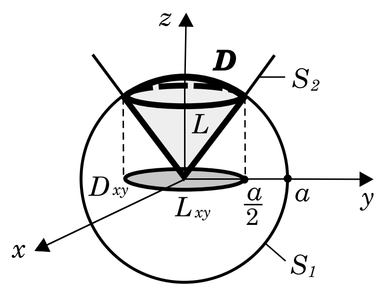
$$S_1: \quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \ , \qquad S_2: \quad z = \sqrt{3\left(x^2 + y^2\right)} \ ,$$

gde je $a > 0$.

Rešenje. Neka je D oblast čiju zapreminu d treba izračunati. Površ S_1 je centralna sfera, a S_2 je konus sa z–osom kao osovinom, koji je iznad xy–ravni zbog $z \geq 0$. Projekcija presečne krive L površi S_1 i S_2 na xy–ravan je kružnica

$$L_{xy}: \quad x^2 + y^2 = \frac{a^2}{4} \ , \ z = 0 \ ,$$

a projekcija oblasti D je krug D_{xy} ograničen sa L_{xy}.



Zadatak rešavamo na dva načina.

Zamenom Descartesovih cilindričnim koordinatama pomoću

$$x = r\cos\varphi\ ,\ y = r\sin\varphi\ ,\ z = z\ ,$$

sledi $J = r \geq 0$ i

$$\begin{aligned}
&S_1^*: \quad z = \sqrt{a^2 - r^2}\ , \qquad S_2^*: \quad z = \sqrt{3}\, r\ ;\\
&L_{xy}^*: \quad r = \frac{a}{2}\ ,\ z = 0\ , \qquad D_{xy}^*: \quad 0 \leq r \leq \frac{a}{2}\ ,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi\ ;\\
&D^*: \quad 0 \leq r \leq \frac{a}{2}\ ,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi\ ,\ \sqrt{3}\, r \leq z \leq \sqrt{a^2 - r^2}\ .
\end{aligned}$$

Slično kao u Zadatku 40, za zapreminu se dobija

$$\begin{aligned}
d &= \iiint_D dxdydz = \iiint_{D^*} r\, drd\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{a/2} r\, dr \int_{\sqrt{3}\, r}^{\sqrt{a^2-r^2}} dz\\
&= 2\pi \int_0^{a/2} r\big(\sqrt{a^2 - r^2} - \sqrt{3}\, r\big)\, dr = \frac{2 - \sqrt{3}}{3}\, a^3 \pi\ .
\end{aligned}$$

Drugi način se sastoji u upotrebi sfernih koordinata. Descartesove koordinate zamenjujemo sfernim pomoću

$$x = r\cos\varphi\cos\theta\ ,\ y = r\sin\varphi\cos\theta\ ,\ z = r\sin\theta\ .$$

Jakobijan za ove koordinate je $J = r^2\cos\theta \geq 0$.

Iz jednačine površi S_1 je $r = a$. Iz jednačine površi S_2 je $r\sin\theta = \sqrt{3}\, r\cos\theta$, $\tan\theta = \sin\theta/\cos\theta = \sqrt{3}$ i $\theta = \pi/3$. Zato se S_1, S_2 preslikavaju u

$$S_1^*: \quad r = a\ , \qquad S_2^*: \quad \theta = \frac{\pi}{3}\ .$$

Imajući u vidu značenje sfernih koordinata i Napomenu 3.4.3, za L_{xy} i D_{xy} je $\varphi \in [0, 2\pi]$. Još, tački $(0,0,0) \in D$ odgovara $r = 0$, pa se oblast D se preslikava u

$$D^*: \quad 0 \leq r \leq a\ ,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi\ ,\ \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\ .$$

Tražena zapremina je

$$d = \iiint_D dxdydz = \iiint_{D^*} r^2 \cos\theta \, drd\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^2\, dr \int_{\pi/3}^{\pi/2} \cos\theta \, d\theta$$
$$= 2\pi \frac{r^3}{3}\Big|_0^a \sin\theta \Big|_{\pi/3}^{\pi/2} = 2\pi \frac{a^3}{3}\Big(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\Big) = \frac{2-\sqrt{3}}{3}\, a^3 \pi \ .$$

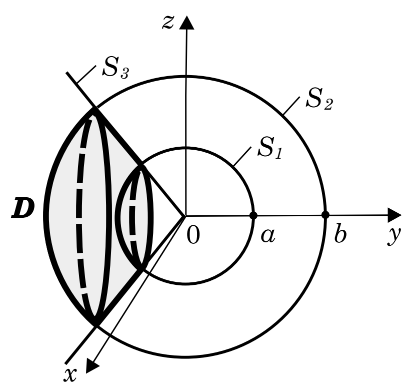
Rešavanje zadatka pomoću sfernih koordinata je jednostavnije jer su konusi i sfere koordinatne površi u sfernom koordinatnom sistemu, dok za cilindrični koordinatni sistem to nisu karakteristične površi.

45. Izračunati zapreminu prostorne oblasti ograničene površima

$$S_1: \quad x^2+y^2+z^2=a^2 \ , \qquad S_2: \quad x^2+y^2+z^2=b^2 \ ,$$
$$S_3: \quad y = -\sqrt{x^2+z^2} \ ,$$

gde je $b > a > 0$.

Rešenje. Neka je D oblast čiju zapreminu d treba izračunati. Površi S_1 i S_2 su centralne sfere, a S_3 je konus sa y–osom kao osovinom, za koji je $y \le 0$.



Descartesove koordinate zamenjujemo sfernim pomoću

$$z = r\cos\varphi\cos\theta \ , \ x = r\sin\varphi\cos\theta \ , \ y = r\sin\theta \ ,$$

gde je r dužina potega tačke (x,y,z), φ ugao između potega projekcije $(x,0,z)$ na zx–ravan i pozitivnog dela z–ose, a θ ugao između potega tačke (x,y,z) i zx–ravni. Jakobijan za ovako uvedene sferne koordinate je

$$J = \begin{vmatrix} z_r & z_\varphi & z_\theta \\ x_r & x_\varphi & x_\theta \\ y_r & y_\varphi & y_\theta \end{vmatrix} = r^2\cos\theta \ge 0 \ .$$

Površi S_i $(i=1,2,3)$ se preslikavaju u

$$S_1^*: \quad r = a \ , \qquad S_2^*: \quad r = b \ , \qquad S_3^*: \quad \theta = -\frac{\pi}{4} \ .$$

S obzirom na izneto značenje sfernih koordinata, oblast D se preslikava u

$$D^*: \quad a \le r \le b \ , \ 0 \le \varphi \le 2\pi \ , \ -\frac{\pi}{2} \le \theta \le -\frac{\pi}{4} \ .$$

Tražena zapremina je

$$d = \iiint_D dxdydz = \iiint_{D^*} r^2 \cos\theta \, dr d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_a^b r^2 \, dr \int_{-\pi/2}^{-\pi/4} \cos\theta \, d\theta$$
$$= 2\pi \frac{r^3}{3}\Big|_a^b \sin\theta \Big|_{-\pi/2}^{-\pi/4} = \frac{2-\sqrt{2}}{3}\left(b^3 - a^3\right)\pi \ .$$

$\boxed{46.}$ Izračunati zapreminu prostorne oblasti ograničene zatvorenom površi

$$S: \quad \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2 = az\left(x^2 + y^2\right) \ ,$$

gde je $a > 0$.

Rešenje. Neka je D oblast čiju zapreminu d treba izračunati. Iz jednačine površi S sledi $z \ge 0$ i $(0,0,0) \in S$, što znači da se D nalazi iznad xy–ravni, tj. u I, II, III, IV oktantu, kao i da je $(0,0,0) \in D$.

Za sferne koordinate, uvedene sa

$$x = r\cos\varphi\cos\theta \ , \ y = r\sin\varphi\cos\theta \ , \ z = r\sin\theta \ ,$$

u navedenim oktantima važi $\varphi \in [0, 2\pi]$ i $\theta \in [0, \pi/2]$. Do istog zaključka se dolazi i diskusijom uslova $z = r\sin\theta \ge 0$, tj. $\sin\theta \ge 0$. Jakobijan je $J = r^2\cos\theta \ge 0$.

Površ S se preslikava u površ

$$S^*: \quad r = a\sin\theta\cos^2\theta \ ,$$

koja je definisana za svako $\theta \in [0, \pi/2]$. Takođe, u jednačini površi S^* ne figuriše koordinata φ, pa je S^* definisana i za svako $\varphi \in [0, 2\pi]$. Još, tački $(0,0,0) \in D$ odgovara $r = 0$. Oblast D se preslikava u

$$D^*: \quad 0 \le r \le a\sin\theta\cos^2\theta \ , \ 0 \le \varphi \le 2\pi \ , \ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \ .$$

Zapremina je

$$d = \iiint_D dxdydz = \iiint_{D^*} r^2\cos\theta \, dr d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos\theta \, d\theta \int_0^{a\sin\theta\cos^2\theta} r^2 \, dr$$
$$= \frac{2}{3} a^3\pi \int_0^{\pi/2} \sin^3\theta\cos^7\theta \, d\theta = -\frac{2}{3} a^3\pi \int_0^{\pi/2} \left(1 - \cos^2\theta\right)\cos^7\theta \, d(\cos\theta)$$
$$= -\frac{2}{3} a^3\pi\left(-\frac{1}{40}\right) = \frac{1}{60} a^3\pi \ .$$

$\boxed{47.}$ Izračunati zapreminu prostorne oblasti ograničene zatvorenom površi

$$S: \quad \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2 = a^2\left(x^2 + y^2\right) \ ,$$

gde je $a > 0$.

Rešenje. Neka je D oblast čiju zapreminu d treba izračunati. Jednačina površi S ne nameće nikakva ograničenja, pa se S, a time i D, nalazi u svim oktantima. Još je $(0,0,0) \in S$, tj. $(0,0,0) \in D$.

Prelaskom na sferne koordinate pomoću

$$x = r\cos\varphi\cos\theta\ ,\ y = r\sin\varphi\cos\theta\ ,\ z = r\sin\theta\ ,$$

površ S se preslikava u površ

$$S^*: \quad r = a\cos\theta\ ,$$

koja je definisana za svako $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ i svako $\varphi \in [0, 2\pi]$. Kako je $(0,0,0) \in D$, oblast D se transformiše u

$$D^*: \quad 0 \le r \le a\cos\theta\ ,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\ ,\ -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\ .$$

S obzirom na $J = r^2\cos\theta \ge 0$ i jednakost navedenu u Zadatku 10, zapremina je

$$\begin{aligned} d &= \iiint_D dxdydz = \iiint_{D^*} r^2\cos\theta\, drd\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta \int_0^{a\cos\theta} r^2\, dr \\ &= \frac{2}{3}\,\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a^3\cos^4\theta\, d\theta = \frac{4}{3}\,a^3\pi \int_0^{\pi/2} \cos^4\theta\, d\theta = \frac{1}{4}\,a^3\pi^2\ . \end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{48}}$ Izračunati zapreminu elipsoidne oblasti ograničene elipsoidom

$$S: \quad \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1\ ,$$

gde je $a, b, c > 0$.

Rešenje. Neka je D elipsoidna oblast i d njena zapremina. Zapremina d ne zavisi od položaja oblasti D, već samo od njenog oblika, uslovljenog poluosama a, b, c. Zato oblast D ima istu zapreminu kao i oblast D_1, ograničena centralnim elipsoidom (Slika 1.4.33)

$$S_1: \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\ .$$

Umesto smene

$$x = x_0 + r\cos\varphi\cos\theta\ ,\ y = y_0 + r\sin\varphi\cos\theta\ ,\ z = z_0 + r\sin\theta$$

uvodimo uopštene sferne koordinate pomoću jednostavnije smene

$$x = ar\cos\varphi\cos\theta\ ,\ y = br\sin\varphi\cos\theta\ ,\ z = cr\sin\theta\ .$$

Za centralni elipsoid S_1 uvedene koordinate φ i θ imaju maksimalni raspon $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ i važi $J = abcr^2\cos\theta \ge 0$. Takođe je $(0,0,0) \in D_1$.

Elipsoid S_1 se preslikava u

$$S_1^*: \quad r = 1\ ,$$

a oblast D_1 u

$$D_1^*: \quad 0 \le r \le 1\ ,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\ ,\ -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\ .$$

Tražena zapremina je

$$\begin{aligned} d &= \iiint_{D_1} dxdydz = \iiint_{D_1^*} abcr^2 \cos\theta\, drd\varphi d\theta \\ &= abc \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^2\, dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta = \frac{4}{3}\, abc\pi\ , \end{aligned}$$

što je dobro poznati obrazac iz ranijih kurseva matematike.

Green–Riemannova teorema

Ako je D prosto povezana ravna oblast i L njena kontura, tada je

$$\oint_{L^+} P(x,y)\, dx + Q(x,y)\, dy = \iint_D \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\, dxdy\ .$$

$\boxed{\mathbf{49}.}$ Izračunati potpuni krivolinijski integral II vrste

$$I = \int_L \big(e^x \arctan y + 2y\big)\, dx + \Big(\frac{e^x}{1+y^2} - 1\Big)\, dy\ ,$$

gde je L deo negativno orijentisane kružnice

$$L_1: \quad x^2 + y^2 = y\ ,\ z = 0$$

za $x \ge 0$.

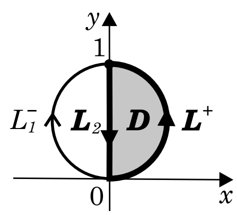
Rešenje. Kako je

$$L_1: \quad x^2 + \Big(y - \frac{1}{2}\Big)^2 = \frac{1}{4}\ ,$$

kružnica L_1 ima centar na y–osi u tački $(0, 1/2)$ i poluprečnik $1/2$. Zbog uslova $x \ge 0$, deo L kružnice L_1 je polukružnica u I kvadrantu. Polukružnica L zadržava orijentaciju celine L_1, što naglašavamo oznakom L^-. Posmatramo suprotno orijentisanu polukružnicu L^+. Ako je L_2 deo y–ose između tačaka $(0,0)$ i $(0,1)$, orijentisan od tačke $(0,1)$ ka tački $(0,0)$, kriva

$$L_3 = L^+ \cup L_2$$

je pozitivno orijentisana kontura. Oblast D u xy–ravni, ograničena sa L_3, je prosto povezana.



Sa I^+, I_2, I_3 označimo krivolinijske integrale duž L^+, L_2 i L_3 redom, koji imaju isti podintegralni izraz kao integral I. Tada je $I = -I^+$, $I_3 = I^+ + I_2 = -I + I_2$ i

$$I = I_2 - I_3 \ .$$

Prvo izračunavamo integral I_3 primenom Green–Riemannove teoreme. Stavljajući

$$P(x,y) = e^x \arctan y + 2y \ , \ Q(x,y) = \frac{e^x}{1+y^2} - 1 \ ,$$

dobijamo

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{e^x}{1+y^2} + 2 \ , \ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{e^x}{1+y^2} \ ,$$

pa su funkcije $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $\partial P/\partial y$, $\partial Q/\partial x$ neprekidne u celoj xy–ravni, a time i u oblasti D. Uslovi Green–Riemannove teoreme su ispunjeni, pa važi

$$\begin{aligned} I_3 &= \oint_{L_3^+} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \oint_{L_3^+} \big(e^x \arctan y + 2y\big)\,dx + \Big(\frac{e^x}{1+y^2} - 1\Big)\,dy \\ &= \iint_D \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\,dxdy = -2\iint_D dxdy = -2d = -\frac{1}{4}\,\pi \ , \end{aligned}$$

gde je $d = R^2\pi/2 = \pi/8$ površina polukruga D poluprečnika $R = 1/2$ (Primer 3.5.1).

Izračunavamo sada integral I_2. Kako je

$$L_2 : \quad x = x(y) = 0 \ , \ z = 0 \ ; \quad y \in [0,1] \ ,$$

pri čemu se za uvedenu orijentaciju parametar menja od $y = 1$ do $y = 0$, to je $e^x = 1$, $dx = 0$ i

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{L_2} \big(e^x \arctan y + 2y\big)\,dx + \Big(\frac{e^x}{1+y^2} - 1\Big)\,dy \\ &= \int_1^0 \Big(\frac{1}{1+y^2} - 1\Big)\,dy = (\arctan y - y)\Big|_1^0 = -\frac{1}{4}\,\pi + 1 \ . \end{aligned}$$

Konačno je

$$I = I_2 - I_3 = -\frac{1}{4}\,\pi + 1 + \frac{1}{4}\,\pi = 1 \ .$$

Za razliku od rešavanja pomoću Green–Riemannove teoreme, direktno rešavanje integrala I kao krivolinijskog je izuzetno teško. Primena Green–Riemannove teoreme je olakšana time što je kriva L mogla da se dopuni do zatvorene krive L_3 delom L_2 y–ose (Napomena 3.5.1).

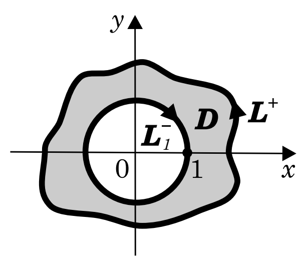
50. Izračunati potpuni krivolinijski integral II vrste

$$I = \oint_L \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}\ ,$$

gde je L pozitivno orijentisana spoljna kontura dvostruko povezane oblasti u xy–ravni $(z=0)$, čija je unutrašnja kontura

$$L_1:\quad x^2+y^2=1\ ,\ z=0\ .$$

Rešenje. Dvostruko povezanu oblast označimo sa D i njenu unutrašnju konturu L_1 orijentišimo negativno.



Funkcije

$$P(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}\ ,\ Q(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}\ ;\ \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

su neprekidne u oblasti D jer $(0,0)\notin D$. Zato može da se primeni Teorema 3.5.2 i sledi

$$\oint_{L^+} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} + \oint_{L_1^-} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} = \iint_D \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\,dxdy = 0\ ,$$

odakle je

$$I = \oint_{L^+} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} = -\oint_{L_1^-} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} = \oint_{L_1^+} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}\ .$$

Parametarske jednačine kružnice L_1 su

$$L_1:\quad x=\cos\varphi\ ,\ y=\sin\varphi\ ,\ z=0\ ;\quad \varphi\in[0,2\pi]\ ,$$

pa je

$$I = \oint_{L_1^+} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} = \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi\ .$$

Pošto je kontura L proizvoljna, krivolinijski integral ima istu vrednost $I=2\pi$ duž svake konture (zatvorena kriva) u xy–ravni za koju je $(0,0)\in \operatorname{int} L$. Ukoliko $(0,0)\notin L\cup \operatorname{int} L$, prema Green–Riemannovoj teoremi je $I=0$. Dakle, I ne zavisi od oblika konture L, već samo od njenog položaja u koordinatnoj ravni, tj. od navedenog uslova.

$\boxed{\mathbf{51}.}$ Izračunati površinu oblasti u xy–ravni $(z = 0)$ ograničene zatvorenom krivom

$$L : \quad x = \frac{3t}{1+t^3} \ , \ y = \frac{3t^2}{1+t^3} \ , \ z = 0 \ ; \quad t \in [0, +\infty) \ .$$

Rešenje. Neka je D oblast čiju površinu d treba izračunati. Kriva L je petlja Descartesovog lista (slika iz Zadatka 36 za $a = 1$). Oblast D je prosto povezana.

Kako je L zadata parametarski, površinu d nalazimo posredstvom Green–Riemannove teoreme (Napomena 3.5.2). Od jednakosti (3.5.5)–(3.5.8) najpogodnija je (3.5.8) zbog $y/x = t$, tj.

$$d = \frac{1}{2} \oint_{L+} x^2 \, d\Big(\frac{y}{x}\Big) \ .$$

Pozitivnoj orijentaciji krive L odgovara promena parametra od $t = 0$ do $t = +\infty$, što se lako proverava kretanjem po krivoj za konkretan izbor vrednosti parametra, npr. $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$. Zato je dalje

$$d = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{9t^2}{\big(1+t^3\big)^2} \, dt = \frac{3}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\big(1+t^3\big)^2} \, d\big(1+t^3\big) = -\frac{3}{2} \frac{1}{1+t^3} \Big|_0^{+\infty} = \frac{3}{2} \ ,$$

uz napomenu da je određeni integral, koji smo upravo rešili, nesvojstven ([**4**], str. 269–270).

Da je petlja Descartesovog lista zadata implicitno i da smo parametrizaciju vršili pomoću uopštenih polarnih koordinata r, φ (Zadatak 36), dobili bismo

$$L : \quad x = 3a\cos^{4/3}\varphi \sin^{2/3}\varphi \ , \ y = 3a\cos^{2/3}\varphi \sin^{4/3}\varphi \ , \ z = 0 \ ; \quad \varphi \in \Big[0, \frac{\pi}{2}\Big] \ ,$$

odakle je očigledno da parametri t i φ nisu isti. Rešavanje zadatka pomoću bilo koje od formula (3.5.5)–(3.5.8) je značajno teže sa parametrom φ zbog neophodnosti sređivanja odgovarajućih podintegralnih izraza. Takođe, rešavanje pomoću dvojnog integrala (Zadatak 36) je prostije nego pomoću krivolinijskog sa parametrom φ (Napomena 3.5.2).

$\boxed{\mathbf{52}.}$ Izračunati površinu dela xy–ravni $(z = 0)$ ograničenog krivom

$$L : \quad \big(x^2 + y^2\big)^2 = ax\big(x^2 - 3y^2\big) \ , \ z = 0 \ ,$$

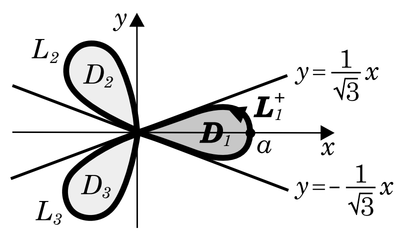
gde je $a > 0$.

Rešenje. Neka je D deo xy–ravni čiju površinu d treba izračunati. U jednačini krive L je $\big(x^2+y^2\big)^2 \geq 0$, pa mora da bude i $x\big(x^2 - 3y^2\big) = x(x - \sqrt{3}\,y)(x + \sqrt{3}\,y) \geq 0$. Nešto dužom diskusijom se utvrđuje da poslednja nejednakost važi u slučajevima

$$x \geq 0 \ , \ -\frac{1}{\sqrt{3}}\,x \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\,x \ ; \ x \leq 0 \ , \ y \geq -\frac{1}{\sqrt{3}}\,x \ ; \ x \leq 0 \ , \ y < \frac{1}{\sqrt{3}}\,x \ .$$

Slično lemniskati (Zadatak 6), navedeni slučajevi se odnose na tri zatvorene krive L_1, L_2 i L_3, sa zajedničkom tačkom $(0, 0) \in L$, koja je singularna i to *trostruka tačka* jednačine

([**2**], str. 98). Dakle, L nije zatvorena prosta kriva u smislu Definicije 1.1.9, već je $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3$. Oblasti D_i ograničene sa L_i $(i = 1, 2, 3)$ imaju jednake površine, pa posmatramo samo krivu L_1 i oblast D_1, znajući da je $(0, 0) \in D_1$.



Površinu d nalazimo pomoću jednakosti (3.5.5), koja je posledica Green–Riemannove teoreme,

$$d = \frac{3}{2} \oint_{L_1^+} x\,dy - y\,dx \ .$$

Uvodimo polarne koordinate sa

$$x = r\cos\varphi \ , \ y = r\sin\varphi \ .$$

Za pravu $y = (-1/\sqrt{3}\,)x$ je $\tan\varphi = -1/\sqrt{3}$ i $\varphi = -\pi/6$, a za pravu $y = (1/\sqrt{3}\,)x$ je $\tan\varphi = 1/\sqrt{3}$ i $\varphi = \pi/6$. Takođe, iz jednačine krive L sledi

$$\begin{aligned} r &= a\cos\varphi\big(\cos^2\varphi - 3\sin^2\varphi\big) = a\cos\varphi\big(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi - 2\sin^2\varphi\big) \\ &= a\cos\varphi\big(\cos 2\varphi - 2\sin^2\varphi\big) = a(\cos\varphi\cos 2\varphi - 2\cos\varphi\sin\varphi\sin\varphi) \\ &= a(\cos\varphi\cos 2\varphi - \sin\varphi\sin 2\varphi) = a\cos 3\varphi \ , \end{aligned}$$

gde je upotrebljena adiciona formula

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \quad (\alpha = \varphi \ , \ \beta = 2\varphi) \ .$$

Zato su parametarske jednačine krive L_1 date sa

$$L_1: \quad x = a\cos\varphi\cos 3\varphi \ , \ y = a\sin\varphi\cos 3\varphi \ , \ z = 0 \ ; \quad \varphi \in \Big[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\Big] \ .$$

Za pozitivnu orijentaciju krive L_1 parametar se kreće od $\varphi = -\pi/6$ do $\varphi = \pi/6$.

Kako je

$$\begin{aligned} x'(\varphi) &= -a(\sin\varphi\cos 3\varphi + 3\cos\varphi\sin 3\varphi) \ , \\ y'(\varphi) &= a(\cos\varphi\cos 3\varphi - 3\sin\varphi\sin 3\varphi) \ , \end{aligned}$$

posle sređivanja je

$$x\,dy - y\,dx = a^2\cos^2 3\varphi\,d\varphi$$

i za površinu se dobija

$$d = \frac{3}{2}\,a^2 \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \cos^2 3\varphi\,d\varphi = 3a^2 \int_0^{\pi/6} \cos^2 3\varphi\,d\varphi = 3a^2 \int_0^{\pi/6} \frac{1 + \cos 6\varphi}{2}\,d\varphi = \frac{1}{4}\,a^2\pi \ .$$

Zadatak se rešava lakše pomoću dvojnog integrala (Napomena 3.5.2) jer nalaženje izvoda $x'(\varphi)$, $y'(\varphi)$ i sređivanje izraza $x\,dy - y\,dx$ nije potrebno. Tačnije, kriva L_1 i oblast D_1 se preslikavaju u

$$
\begin{aligned}
L_1^* : &\quad r = a\cos 3\varphi\ , \\
D^* : &\quad 0 \le r \le a\cos 3\varphi\ ,\ -\frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{6}
\end{aligned}
$$

i odmah se dobija

$$
d = 3\iint_{D_1} dxdy = 3\iint_{D_1^*} r\,drd\varphi = 3\int_{-\pi/6}^{\pi/6} d\varphi \int_0^{a\cos 3\varphi} r\,dr = \frac{3}{2}\,a^2\int_{-\pi/6}^{\pi/6} \cos^2 3\varphi\,d\varphi\ .
$$

Primetimo da smo položaj krive L mogli jednostavnije da utvrdimo diskutujući njenu jednačinu u polarnim koordinatama

$$
r = a\cos 3\varphi\ .
$$

Za $\varphi \in [0, 2\pi]$ je $3\varphi \in [0, 6\pi]$, pa iz uslova $\cos 3\varphi \ge 0$ sledi $3\varphi \in [-\pi/2 + 2k\pi, \pi/2 + 2k\pi]$ $(k = 0, 1, 2)$ i $\varphi \in [-\pi/6 + 2k\pi/3, \pi/6 + 2k\pi/3]$, tj.

$$
\varphi \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right]\ .
$$

POVRŠINSKI INTEGRALI

Površinski integrali po površi (I vrste)

Ako je

$$S : \quad z = z(x,y) \ ; \quad (x,y) \in D_{xy} \ ,$$
$$p = \frac{\partial z}{\partial x} \ , \ q = \frac{\partial z}{\partial y} \ ,$$

tada je

$$\iint_S H(x,y,z)\, d\sigma = \iint_{D_{xy}} H\big(x,y,z(x,y)\big) \sqrt{1+p^2+q^2}\ dxdy \ .$$

$\boxed{\mathbf{53}}$. Izračunati površinu površi

$$S : \quad x = u\cos v \ , \ y = u\sin v \ , \ z = v \ ; \quad (u,v) \in D_{uv} \ ,$$

gde je

$$D_{uv} : \quad 0 \le u \le a \ , \ 0 \le v \le 2\pi \ .$$

Rešenje. Neka je s površina površi S.
Iz zadatih parametarskih jednačina površi S nalazimo

$$x_u = \cos v \ , \ x_v = -u\sin v \ , \ y_u = \sin v \ , \ y_v = u\cos v \ , \ z_u = 0 \ , \ z_v = 1 \ ;$$
$$E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 = 1 \ , \ G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 = 1 + u^2 \ , \ F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v = 0 \ .$$

Zato je

$$s = \iint_S d\sigma = \iint_{D_{uv}} \sqrt{EG - F^2}\ dudv = \iint_{D_{uv}} \sqrt{1+u^2}\ dudv$$
$$= \int_0^a \sqrt{1+u^2}\ du \int_0^{2\pi} dv = 2\pi \int_0^a \sqrt{1+u^2}\ du \ .$$

Dobijeni određeni integral se rešava hiperboličkom smenom

$$u = \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \ .$$

Za $u = 0$ je $t = 0$, a za $u = a$ je $t = A = \operatorname{arcsinh} a = \ln\bigl(a + \sqrt{1+a^2}\,\bigr)$. Koristeći osobine hiperboličkih funkcija ([**3**], str. 299–300, [**4**], str. 27, 209), dalje je

$$\begin{aligned} s &= 2\pi \int_0^A \sqrt{1+\sinh^2 t}\, \cosh t \, dt = 2\pi \int_0^A \cosh^2 t \, dt = 2\pi \int_0^A \frac{1+\cosh 2t}{2}\, dt \\ &= \pi\Bigl(t + \frac{1}{2}\sinh 2t\Bigr)\Big|_0^A = \pi(A + \sinh A \cosh A) = \pi(A + a\cosh A) \ . \end{aligned}$$

Zamenom $t = A = \ln\bigl(a + \sqrt{1+a^2}\,\bigr)$ u definicioni izraz za $\cosh t$ i sređivanjem sledi

$$\begin{aligned} \cosh A &= \frac{e^A + e^{-A}}{2} = \frac{a^2 + a\sqrt{1+a^2} + 1}{a + \sqrt{1+a^2}} = \frac{a\bigl(a + \sqrt{1+a^2}\,\bigr)}{a+\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{a+\sqrt{1+a^2}} \\ &= a + \bigl(-a + \sqrt{1+a^2}\,\bigr) = \sqrt{1+a^2} \ , \end{aligned}$$

pa je konačno

$$s = \pi\Bigl[a\sqrt{1+a^2} + \ln\bigl(a + \sqrt{1+a^2}\,\bigr)\Bigr] \ .$$

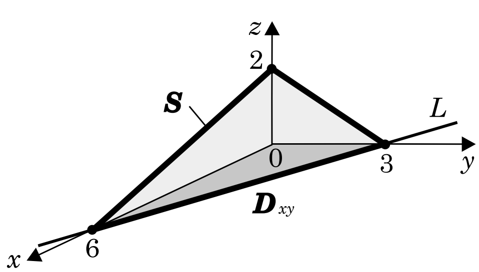
$\boxed{\textbf{54}}$. Izračunati površinu dela ravni

$$S_1 : \quad x + 2y + 3z = 6$$

za $x, y, z \geq 0$.

Rešenje. Neka je S deo ravni S_1 u I oktantu, čiju površinu s treba izračunati. Ravan S_1 seče x, y i z–osu redom u tačkama $(6,0,0)$, $(0,3,0)$, $(0,0,2)$, a xy–ravan duž prave

$$L : \quad y = -\frac{1}{2}\,x + 3 \ , \ z = 0 \ .$$



Površ S se bijektivno projektuje na sve tri koordinatne ravni (2° iz Napomene 4.3.2). Projektujemo je, npr., na xy–ravan ($z = 0$). Projekcija je oblast D_{xy} ograničena x–osom, y–osom i pravom L, tj.

$$D_{xy} : \quad 0 \leq x \leq 6 \ , \ 0 \leq y \leq -\frac{1}{2}\,x + 3 \ .$$

S obzirom na $S \subset S_1$ i projektovanje na xy–ravan, iz jednačine ravni S_1 iskazujemo jednačinu njenog dela S u obliku

$$S: \quad z = z(x,y) = -\frac{1}{3}\,x - \frac{2}{3}\,y + 2\ ; \quad (x,y) \in D_{xy}\ .$$

Kako je

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{3}\ ,\ q = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2}{3}\ ;\ 1 + p^2 + q^2 = \frac{14}{9}\ ,$$

to je

$$s = \iint_S d\sigma = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1+p^2+q^2}\ dxdy = \frac{\sqrt{14}}{3} \iint_{D_{xy}} dxdy\ .$$

Prema opisu oblasti D_{xy}, dalje je

$$s = \frac{\sqrt{14}}{3} \int_0^6 dx \int_0^{-x/2+3} dy = \frac{\sqrt{14}}{3} \int_0^6 \Big(-\frac{x}{2} + 3\Big)\, dx = 3\sqrt{14}\ .$$

Zadatak se rešava na isti način ako se S projektuje na yz ili zx–ravan.

55. Izračunati površinu zatvorene površi $S = S_1 \cup S_2$, gde je S_1 manji deo sfere

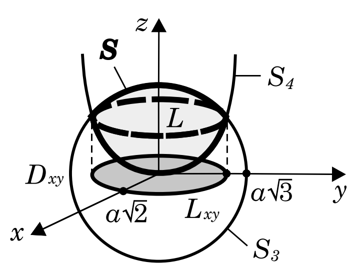
$$S_3: \quad x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$$

koji iseca paraboloid

$$S_4: \quad x^2 + y^2 = 2az\ ,$$

a S_2 deo paraboloida S_4 koji je unutar sfere S_3 za $a > 0$.

Rešenje. Neka je s_1 površina za S_1, a s_2 površina za S_2. Sfera S_3 je centralna, a paraboloid S_4 ima z–osu za osovinu. Površi S_3 i S_4 se seku duž krive L, a njihovi delovi S_1 i S_2 su iznad xy–ravni ($z \geq 0$).



Površi S_1 i S_2 se bijektivno projektuju samo na xy–ravan ($z = 0$) u istu oblast D_{xy}. Da bismo odredili ovu oblast, određujemo projekciju L_{xy} krive L. Smenjujući $x^2 + y^2 = 2az$ u $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$ sledi $z^2 + 2az - 3a^2 = 0$, odakle je $z_1 = a > 0$, $z_2 = -3a < 0$ i sve tačke krive L imaju istu treću koordinatu $z = a$. Za $z = a$ jednačine površi S_3 i S_4 postaju $x^2 + y^2 = 2a^2$, pa je L_{xy} kružnica

$$L_{xy}: \quad x^2 + y^2 = 2a^2\ ,\ z = 0\ .$$

Zato je projekcija krug
$$D_{xy}: \quad x^2+y^2 \leq 2a^2 \ .$$
Za površi $S_1 \subset S_3$ i $S_2 \subset S_4$ je $z \geq 0$ i projektovanje se vrši na xy–ravan, pa jednačine ovih površi zapisujemo u obliku
$$\begin{aligned} S_1: &\quad z = z_1(x,y) = \sqrt{3a^2-x^2-y^2} \ ; \quad (x,y) \in D_{xy} \ , \\ S_2: &\quad z = z_2(x,y) = \frac{1}{2a}\big(x^2+y^2\big) \ ; \quad (x,y) \in D_{xy} \ . \end{aligned}$$

Kako je
$$\begin{aligned} & p_1 = \frac{\partial z_1}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{3a^2-x^2-y^2}} \ , \ q_1 = \frac{\partial z_1}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{3a^2-x^2-y^2}} \ ; \\ & p_2 = \frac{\partial z_2}{\partial x} = \frac{x}{a} \ , \ q_2 = \frac{\partial z_2}{\partial y} = \frac{y}{a} \ ; \\ & 1+p_1^2+q_1^2 = \frac{3a^2}{3a^2-x^2-y^2} \ , \ 1+p_2^2+q_2^2 = \frac{a^2+x^2+y^2}{a^2} \ , \end{aligned}$$
to je
$$\begin{aligned} s_1 &= \iint_{S_1} d\sigma = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1+p_1^2+q_1^2}\ dxdy = \sqrt{3}\,a \iint_{D_{xy}} \frac{dxdy}{\sqrt{3a^2-x^2-y^2}} \ , \\ s_2 &= \iint_{S_2} d\sigma = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1+p_2^2+q_2^2}\ dxdy = \frac{1}{a} \iint_{D_{xy}} \sqrt{a^2+x^2+y^2}\ dxdy \ . \end{aligned}$$
Uvođenjem polarnih koordinata sa
$$x = r\cos\varphi \ , \ y = r\sin\varphi \ ,$$
za koje je $|J| = r$, oblast D_{xy} se preslikava u
$$D_{xy}^*: \quad 0 \leq r \leq \sqrt{2}\,a \ , \ 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$
i sledi
$$\begin{aligned} s_1 &= \sqrt{3}\,a \iint_{D_{xy}^*} \frac{r}{\sqrt{3a^2-r^2}}\ drd\varphi = \sqrt{3}\,a \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}\,a} \frac{r}{\sqrt{3a^2-r^2}}\ dr \\ &= -\sqrt{3}\,a\pi \int_0^{\sqrt{2}\,a} \frac{1}{\sqrt{3a^2-r^2}}\ d\big(3a^2-r^2\big) = 2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)a^2\pi \ , \\ s_2 &= \frac{1}{a} \iint_{D_{xy}^*} r\sqrt{a^2+r^2}\ drd\varphi = \frac{1}{a} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}\,a} r\sqrt{a^2+r^2}\ dr \\ &= \frac{1}{a}\,\pi \int_0^{\sqrt{2}\,a} \sqrt{a^2+r^2}\ d\big(a^2+r^2\big) = \frac{2}{3}(3\sqrt{3}-1)a^2\pi \ , \end{aligned}$$
odakle je, zbog $S = S_1 \cup S_2$,
$$s = s_1 + s_2 = \frac{16}{3}\,a^2\pi \ .$$

Do projekcije L_{xy} može da se dođe na standardan način, eliminacijom z iz jednačina površi S_3 i S_4. Zamenom $z = \left(x^2+y^2\right)/2a$ iz jednačine za S_4 u jednačinu za S_3 sledi

$$L_{xy}: \quad \left(x^2+y^2\right)\left(x^2+y^2+4a^2\right) = 12a^4\ ,\ z=0\ .$$

Krivu L_{xy} prepoznajemo zahvaljujući polarnim koordinatama r, φ za koje je iz prethodne jednačine $r^4+4a^2r^2-12a^4=0$, što je bikvadratna jednačina po r. Smenom $t=r^2>0$ ova jednačina postaje $t^2+4a^2t-12a^4=0$ i ima rešenja $t_1=2a^2>0$ i $t_2=-6a^2<0$, pa je $r^2=t_1=2a^2$ i $r=\sqrt{2}\,a$. Dakle, L_{xy} je centralna kružnica poluprečnika $r=\sqrt{2}\,a$.

Primećujemo da se površ S sastoji od delova S_1 i S_2 sa različitom parametrizacijom (4° iz Napomene 4.3.2), pri čemu se delovi bijektivno projektuju samo na xy–ravan (1° iz Napomene 4.3.2). Povoljna situacija je u tome što se oba dela projektuju u istu oblast.

56. Izračunati površinski integral I vrste

$$I = \iint_S y\left(x+z^2\right)\,d\sigma\ ,$$

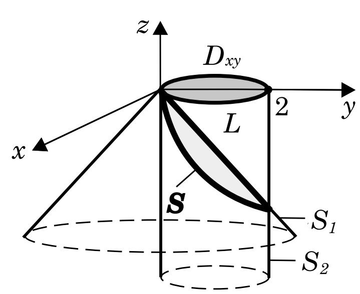
gde je S deo konusa

$$S_1: \quad z = -\sqrt{x^2+y^2}$$

koji iseca cilindrična površ

$$S_2: \quad x^2+y^2 = 2y\ .$$

Rešenje. Konus S_1 ima z–osu za osovinu i nalazi se ispod xy–ravni ($z\le 0$). Izvodnice cilindrične površi S_2 su paralelne z–osi, a direktrisa je kružnica L u xy–ravni sa centrom u tački $(0,1,0)$ poluprečnika 1.



Površ S se bijektivno projektuje na xy–ravan ($z=0$) u oblast ograničenu sa L, tj. u krug

$$D_{xy}: \quad x^2+y^2 \le 2y$$

i kao deo konusa S_1 ima jednačinu

$$S: \quad z = z(x,y) = -\sqrt{x^2+y^2}\ ; \quad (x,y)\in D_{xy}\ .$$

Određujući

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \ , \ q = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \ ; \ 1+p^2+q^2 = 2 \ ,$$

integral I postaje

$$I = \iint_{D_{xy}} y\big[x + z^2(x,y)\big]\sqrt{1+p^2+q^2}\ dxdy = \sqrt{2}\iint_{D_{xy}} y\big(x + x^2 + y^2\big)\ dxdy \ .$$

Uvođenjem polarnih koordinata r, φ u xy–ravni, krug D_{xy} prelazi u oblast

$$D^*_{xy}: \quad 0 \le r \le 2\sin\varphi \ , \ 0 \le \varphi \le \pi \ ,$$

pa je dalje

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{2}\iint_{D^*_{xy}} r^2\sin\varphi\big(r\cos\varphi + r^2\big)\ drd\varphi \\ &= \sqrt{2}\int_0^\pi d\varphi\int_0^{2\sin\varphi}\big(r^3\cos\varphi\sin\varphi + r^4\sin\varphi\big)\ dr \\ &= \sqrt{2}\int_0^\pi\Big(4\cos\varphi\sin^5\varphi + \frac{32}{5}\sin^6\varphi\Big)\ d\varphi \\ &= 4\sqrt{2}\int_0^\pi \sin^5\varphi\, d(\sin\varphi) + \frac{32\sqrt{2}}{5}\int_0^\pi \sin^6\varphi\, d\varphi = \frac{32\sqrt{2}}{5}\int_0^\pi \sin^6\varphi\, d\varphi \ . \end{aligned}$$

Postupajući kao u Zadatku 10, nalazimo

$$\sin^6\varphi = \frac{5}{16} - \frac{3}{8}\cos 2\varphi - \frac{1}{8}\cos^3 2\varphi + \frac{3}{16}\cos 4\varphi$$

i dobijamo

$$\begin{aligned} I &= \frac{32\sqrt{2}}{5}\left[\frac{5}{16}\int_0^\pi d\varphi - \frac{3}{8}\int_0^\pi \cos 2\varphi\, d\varphi - \frac{1}{8}\int_0^\pi \cos^3 2\varphi\, d\varphi + \frac{3}{16}\int_0^\pi \cos 4\varphi\, d\varphi\right] \\ &= \frac{32\sqrt{2}}{5}\left[\frac{5}{16}\,\pi - \frac{1}{16}\int_0^\pi\big(1-\sin^2 2\varphi\big)\ d(\sin 2\varphi)\right] = \frac{32\sqrt{2}}{5}\ \frac{5}{16}\,\pi = 2\sqrt{2}\,\pi \ . \end{aligned}$$

Osim na xy–ravan, površ S se bijektivno projektuje i na zx–ravan u oblast

$$D_{zx}: \quad -2 \le z \le 0 \ , \ -\frac{z}{2}\sqrt{4-z^2} \le x \le \frac{z}{2}\sqrt{4-z^2} \ .$$

Međutim, odgovarajući dvojni integral po oblasti D_{zx} se znatno teže rešava, pa u opštem slučaju nije svejedno koje se bijektivno projektovanje koristi za prelazak sa površinskog na dvojni integral (2° iz Napomene 4.3.2).

$\boxed{\textbf{57.}}$ Izračunati površinski integral I vrste

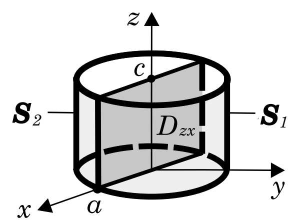
$$I = \iint_S \big(y + z + \sqrt{a^2 - x^2}\,\big)\ d\sigma \ ,$$

gde je

$$S: \quad x^2 + y^2 = a^2$$

cilindrična površ za $0 \le z \le c$ i $a, c > 0$.

Rešenje. Izvodnice cilindrične površi S su paralelne z–osi, a direktrisa je centralna kružnica u xy–ravni poluprečnika a.



Projektovanje površi S na bilo koju od koordinatnih ravni nije bijekcija (3° iz Napomene 4.3.2). Pri tome za projektovanje na yz ili zx–ravan postoje po dva bijektivna dela površi S, dok za projektovanje na xy–ravan površ S nema bijektivnih delova. Površ S projektujemo, npr., na zx–ravan ($y = 0$) i u tom cilju je posmatramo kao $S = S_1 \cup S_2$, gde je S_1 deo za $y \ge 0$, a S_2 deo za $y \le 0$. Oba dela se bijektivno projektuju na istu pravougaonu oblast

$$D_{zx}: \quad 0 \le z \le c \ , \ -a \le x \le a \ .$$

Budući da delove $S_1, S_2 \subset S$ projektujemo na zx–ravan, njihove jednačine zapisujemo u obliku

$$\begin{aligned} S_1: &\quad y = y_1(z,x) = \sqrt{a^2 - x^2} \ ; \quad (z,x) \in D_{zx} \ , \\ S_2: &\quad y = y_2(z,x) = -\sqrt{a^2 - x^2} \ ; \quad (z,x) \in D_{zx} \ . \end{aligned}$$

Za površi S_1, S_2 je

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\partial y_1}{\partial z} = 0 \ , \ q_1 = \frac{\partial y_1}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \ ; \\ p_2 &= \frac{\partial y_2}{\partial z} = 0 \ , \ q_2 = \frac{\partial y_2}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \ ; \\ 1 + p_1^2 + q_1^2 &= 1 + p_2^2 + q_2^2 = \frac{a^2}{a^2 - x^2} \ , \end{aligned}$$

pa je

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_{D_{zx}} \big[y_1(z,x) + z + \sqrt{a^2 - x^2}\,\big] \sqrt{1 + p_1^2 + q_1^2}\; dzdx \\ &= a \iint_{D_{zx}} \big(z + 2\sqrt{a^2 - x^2}\,\big) \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\; dzdx = a \iint_{D_{zx}} \Big(\frac{z}{\sqrt{a^2 - x^2}} + 2\Big)\; dzdx \ , \\ I_2 &= \iint_{D_{zx}} \big[y_2(z,x) + z + \sqrt{a^2 - x^2}\,\big] \sqrt{1 + p_2^2 + q_2^2}\; dzdx = a \iint_{D_{zx}} \frac{z}{\sqrt{a^2 - x^2}}\; dzdx \ . \end{aligned}$$

Prema opisu oblasti D_{zx}, dalje je

$$\begin{aligned} I_1 &= a\int_{-a}^{a} dx \int_0^c \Big(\frac{z}{\sqrt{a^2-x^2}} + 2\Big)\, dz = 4a^2c + ac^2 \int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx \\ &= 4a^2c + ac^2 \int_0^a \frac{1}{\sqrt{1-\Big(\dfrac{x}{a}\Big)^2}}\, d\Big(\frac{x}{a}\Big) = 4a^2c + ac^2 \arcsin\frac{x}{a}\Big|_0^a = 4a^2c + \frac{1}{2}\, ac^2\pi \ , \end{aligned}$$

$$I_2 = a\int_{-a}^{a} dx \int_0^c \frac{z}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dz = ac^2 \int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx = \frac{1}{2}\, ac^2\pi$$

i, zbog $S = S_1 \cup S_2$,

$$I = I_1 + I_2 = 4a^2c + ac^2\pi = ac(4a + c\pi) \ .$$

Zadatak se slično rešava projektovanjem S na yz–ravan.

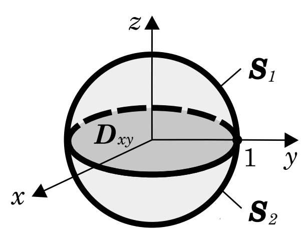
$\boxed{\mathbf{58.}}$ Izračunati površinski integral I vrste

$$I = \iint_S \big(x^2 + y^2 + z^2\big)\, d\sigma \ ,$$

gde je

$$S : \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1 \ .$$

Rešenje. Površ S je centralna sfera poluprečnika 1. Neka je S_1 deo sfere S za $z \geq 0$, a S_2 deo za $z \leq 0$.



Kako je S zatvorena površ, nijedno od projektovanja na koordinatne ravni nije bijekcija (3° iz Napomene 4.3.2). Zato S posmatramo kao $S = S_1 \cup S_2$, pri čemu se delovi S_1, S_2 bijektivno projektuju na xy–ravan ($z = 0$) u krug

$$D_{xy} : \quad x^2 + y^2 \leq 1$$

i imaju jednačine

$$\begin{aligned} S_1 : &\quad z = z_1(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \ ; \quad (x,y) \in D_{xy} \ , \\ S_2 : &\quad z = z_2(x,y) = -\sqrt{1 - x^2 - y^2} \ ; \quad (x,y) \in D_{xy} \ . \end{aligned}$$

Određujući $p_i = \partial z_i/\partial x$, $q_i = \partial z_i/\partial y$ $(i = 1, 2)$, nalazimo

$$1 + p_i^2 + q_i^2 = \frac{1}{1 - x^2 - y^2} \ ,$$

pa je

$$I_i = \iint_{S_i} \left(x^2+y^2+z^2\right) d\sigma = \iint_{D_{xy}} \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \ .$$

Uvođenjem polarnih koordinata r, φ u xy–ravni, oblast D_{xy} prelazi u

$$D^*_{xy}: \quad 0 \le r \le 1 \ , \ 0 \le \varphi \le 2\pi$$

i sledi

$$I_i = \iint_{D^*_{xy}} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\, dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\, dr = -\pi \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-r^2}}\, d\left(1-r^2\right) = 2\pi \ ,$$

dakle

$$I = I_1 + I_2 = 4\pi \ .$$

Slično je i rešavanje zadatka projektovanjem S na ostale koordinatne ravni.

Zadatak može da se reši i jednostavnije. Kako je podintegralna funkcija $x^2+y^2+z^2$ definisana na S, to mora da važi

$$x^2+y^2+z^2 = 1 \ ,$$

pa je

$$I = \iint_S d\sigma = s \ ,$$

gde je s površina sfere S. Primenom dobro poznate formule

$$s = 4R^2\pi$$

za određivanje površine sfere poluprečnika R, u konkretnom slučaju $R=1$ sledi rezultatat.

$\boxed{\mathbf{59}}$. Izračunati površinski integral I vrste

$$I = \iint_S x\, d\sigma \ ,$$

gde je S deo cilindrične površi

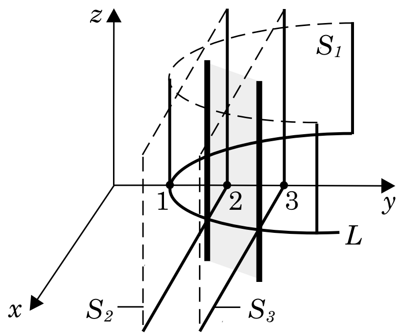
$$S_1: \quad y = x^2 + 1$$

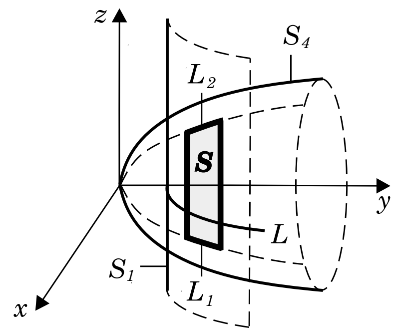
između površi

$$S_2: \quad y = 2 \ , \quad S_3: \quad y = 3 \ , \quad S_4: \quad y = x^2 + z^2$$

za $x \ge 0$.

Rešenje. Cilindrična površ ima za direktrisu parabolu L u xy–ravni i izvodnice paralelne z–osi (prva slika). Površi S_2, S_3 su ravni paralelne zx–ravni i za $x \ge 0$ na S_1 isecaju "beskonačnu traku", osenčenu na prvoj slici. Površ S_4 je paraboloid sa y–osom kao osovinom, koji tu traku seče duž krivih L_1, L_2 i sa nje iseca konačni deo S (druga slika).





Pošto je S deo cilindrične površi čije su izvodnice paralelne z–osi, S mora da se projektuje na yz ili zx–ravan iz razloga navedenog u Zadatku 57. Oba projektovanja su bijekcije (2° iz Napomene 4.3.2). Neka je D_{yz} projekcija površi S na yz–ravan ($x = 0$). Eliminacijom x iz jednačina površi S_1 i S_4 dobijaju se jednačine projekcija L_{1yz}, L_{2yz} krivih L_1 i L_2,

$$L_{1yz}: \quad z = -1\ ,\ x = 0\ , \quad L_{2yz}: \quad z = 1\ ,\ x = 0\ .$$

Takođe, tačke sa površi S i njihove projekcije iz D_{yz} imaju istu y–koordinatu, pa je $2 \le y \le 3$ i opis projekcije D_{yz} glasi

$$D_{yz}: \quad 2 \le y \le 3\ ,\ -1 \le z \le 1\ .$$

Kako je $S \subset S_1$ za $x \ge 0$ i kako se projektovanje vrši na yz–ravan, jednačinu površi S zapisujemo u obliku

$$S: \quad x = x(y,z) = \sqrt{y-1}\ ; \quad (y,z) \in D_{yz}\ .$$

Nalazeći

$$p = \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y-1}}\ ,\ q = \frac{\partial x}{\partial z} = 0\ ;\ 1 + p^2 + q^2 = \frac{4y-3}{4(y-1)}\ ,$$

dobijamo

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D_{yz}} x(y,z)\sqrt{1+p^2+q^2}\ dydz = \frac{1}{2}\iint_{D_{yz}} \sqrt{4y-3}\ dydz \\ &= \frac{1}{2}\int_2^3 \sqrt{4y-3}\ dy \int_{-1}^1 dz = \int_2^3 \sqrt{4y-3}\ dy\ . \end{aligned}$$

Poslednji određeni integral se rešava smenom

$$4y - 3 = t^2\ ,$$

za koju je $t = \sqrt{5}$ kad je $y = 2$, $t = 3$ kad je $y = 3$ i $dy = t\,dt/2$, pa je

$$I = \frac{1}{2}\int_{\sqrt{5}}^3 t^2\,dt = \frac{27 - 5\sqrt{5}}{6}\ .$$

U slučaju projektovanja površi S na zx–ravan za projekciju se dobija

$$D_{zx}: \quad -1 \le z \le 1 \ , \ 1 \le x \le \sqrt{2} \ ,$$

pri čemu se granice promenljive x određuju iz jednačine površi S_1 za $y = 2$ i $y = 3$, a granice za z eliminacijom y iz jednačina površi S_1 i S_4. Odgovarajući dvojni integral po oblasti D_{zx} se takođe jednostavno rešava.

$\boxed{\mathbf{60}}$. Izračunati površinski integral I vrste

$$I = \iint_S \left(1 + x^2 + y^2\right)^{3/2} d\sigma \ ,$$

gde je S deo površi

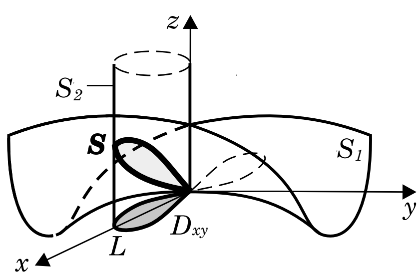
$$S_1: \quad z = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}$$

koji iseca cilindrična površ

$$S_2: \quad \left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2\left(x^2 - y^2\right)$$

za $x \ge 0$ i $a > 0$.

Rešenje. Površ S_1 je *hiperbolički paraboloid* ([**4**], str. 205–206). Izvodnice cilindrične površi S_2 su paralelne z–osi, a direktrisa L je deo lemniskate (Zadatak 6) za $x \ge 0$.



Projektovanje površi S na xy–ravan je bijekcija. Pri tome je projekcija D_{xy} ograničena sa L, a S ima jednačinu

$$S: \quad z = z(x, y) = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} \ ; \quad (x, y) \in D_{xy} \ .$$

Određujući

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = x \ , \ q = \frac{\partial z}{\partial y} = -y \ ; \ 1 + p^2 + q^2 = 1 + x^2 + y^2 \ ,$$

integral I postaje

$$I = \iint_{D_{xy}} \left(1 + x^2 + y^2\right)^{3/2} \sqrt{1 + p^2 + q^2} \ dxdy = \iint_{D_{xy}} \left(1 + x^2 + y^2\right)^2 dxdy \ .$$

Uvodeći polarne koordinate r, φ u xy–ravni i koristeći zaključke iz Zadatka 6, oblast D_{xy} se preslikava u

$$D^*_{xy}: \quad 0 \le r \le a\sqrt{\cos 2\varphi}\ ,\ -\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$$

i za integral I se dobija

$$\begin{aligned}
I &= \iint_{D^*_{xy}} r\big(1+r^2\big)^2\,dr d\varphi = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} r\big(1+r^2\big)^2\,dr \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} \big(1+r^2\big)^2\,d\big(1+r^2\big) \\
&= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/4} \big(a^6\cos^3 2\varphi + 3a^2\cos 2\varphi + 3a^4\cos^2 2\varphi\big)\,d\varphi \\
&= \frac{1}{6}\,a^6\int_0^{\pi/4}\big(1-\sin^2 2\varphi\big)\,d(\sin 2\varphi) + \frac{1}{2}\,a^2\sin 2\varphi\,\Big|_0^{\pi/4} + \frac{1}{2}\,a^4\int_0^{\pi/4}(1+\cos 4\varphi)\,d\varphi \\
&= \frac{1}{9}\,a^6 + \frac{1}{2}\,a^2 + \frac{1}{8}\,a^4\pi = \frac{1}{72}\,a^2\big(8a^4+9a^2\pi+36\big)\ .
\end{aligned}$$

Površ S se bijektivno projektuje i na yz–ravan, ali je projekciju teško prepoznati i opisati (2° iz Napomene 4.3.2).

$\boxed{\textbf{61}}$. Izračunati površinski integral I vrste

$$I = \iint_S \big(x^2+y^2\big)z\,d\sigma\ ,$$

gde je S deo sfere

$$S_1: \quad x^2+y^2+z^2 = 4$$

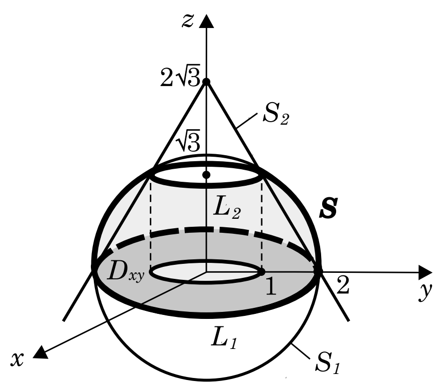
koji odseca konus

$$S_2: \quad z = 2\sqrt{3} - \sqrt{3\big(x^2+y^2\big)}\ .$$

Rešenje. Površ S_1 je centralna sfera poluprečnika 2, a S_2 je konus sa z–osom kao osovinom, koji z–osu seče u tački $(0,0,2\sqrt{3})$. Površi S_1 i S_2 seku xy–ravan ($z=0$) po istoj kružnici

$$L_1: \quad x^2+y^2 = 4\ ,\ z=0\ ,$$

pa je L_1 jedna presečna kriva za S_1 i S_2. Ako je L_2 druga presečna kriva, površ S je sferni prsten između krivih L_1 i L_2.



Jednačinu krive L_2 nalazimo slično kao u Zadatku 55. Zamenom $x^2 + y^2 = 4 - z^2$ iz jednačine za S_1 u jednačinu za S_2 i kvadriranjem sledi $z^2 - \sqrt{3}\,z = 0$, odakle je $z_1 = 0$ i $z_2 = \sqrt{3}$. Za $z_1 = 0$ je već određena presečna kriva L_1. Za $z_2 = \sqrt{3}$ jednačine površi S_1 i S_2 postaju $x^2 + y^2 = 1$, pa je L_2 kružnica

$$L_2: \quad x^2 + y^2 = 1 \ , \ z = \sqrt{3} \ .$$

Kružnica L_1 i njena projekcija na xy–ravan se poklapaju, dok je projekcija kružnice L_2 data sa

$$L_{2xy}: \quad x^2 + y^2 = 1 \ , \ z = 0 \ .$$

Zato se S bijektivno projektuje na kružni prsten D_{xy}, koji je dvostruko povezana oblast sa spoljnom konturom L_1 i unutrašnjom L_{2xy}. Ostala projektovanja nisu bijekcije (1° iz Napomene 4.3.2). S obzirom na to što je površ $S \subset S_1$ iznad xy–ravni ($z \geq 0$), njena jednačina je

$$S: \quad z = z(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \ ; \quad (x,y) \in D_{xy} \ .$$

Kako je

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} \ , \ q = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} \ ;$$
$$1 + p^2 + q^2 = \frac{4}{4 - x^2 - y^2} \ ,$$

to je

$$I = \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) z(x,y) \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dxdy = 2 \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2)\, dxdy \ .$$

Uvodeći polarne koordinate r, φ u xy–ravni, D_{xy} se preslikava u

$$D^*_{xy}: \quad 1 \leq r \leq 2 \ , \ 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

i sledi

$$I = 2 \iint_{D^*_{xy}} r^3\, drd\varphi = 2 \int_1^2 r^3\, dr \int_0^{2\pi} d\varphi = 15\pi \ .$$

Sferni prsten S je primer dvostrane površi za koju je u Definiciji 1.1.19 $D_{uv} = D_{xy}$ dvostruko povezana oblast. Zato površ S ima dve granične konture L_1 i L_2.

62. Izračunati površinski integral I vrste

$$I = \iint_S \frac{1}{\sqrt{3y^2 + 5z^2 + 1}}\, d\sigma \ ,$$

gde je S deo površi

$$S_1 : \quad \frac{x^2}{4} + y^2 - z^2 = 1$$

između xy–koordinatne ravni i ravni

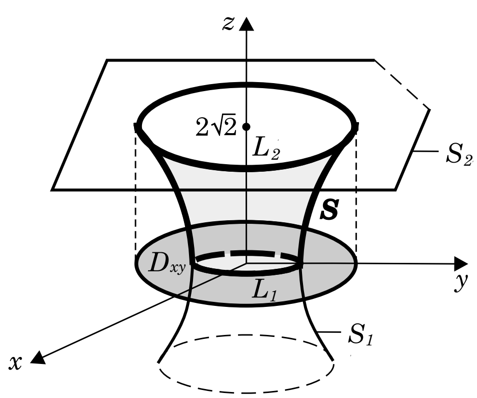
$$S_2 : \quad z = 2\sqrt{2} \ .$$

Rešenje. Površ S_1 je *jednograni hiperboloid* ([**4**], str. 202–203), a S_2 je ravan paralelna xy–ravni. Površ S_1 seče xy–ravan ($z = 0$) duž elipse

$$L_1 : \quad \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \ , \ z = 0 \ ,$$

a ravan S_2 duž krive

$$L_2 : \quad \frac{x^2}{4} + y^2 = 9 \ , \ z = 2\sqrt{2} \ .$$



Elipsa L_1 se poklapa sa svojom projekcijom na xy–ravan. Zbog paralelnosti S_2 sa xy–ravni, kriva L_2 i njena projekcija L_{2xy} su takođe elipse, tj.

$$L_{2xy} : \quad \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1 \ , \ z = 0 \ .$$

Projektovanje površi S na xy–ravan je bijektivno, dok ostala projektovanja to nisu (1° iz Napomene 4.3.2). Projekcija D_{xy} površi S je dvostruko povezana oblast sa spoljnom konturom L_{2xy} i unutrašnjom L_1. Za površ $S \subset S_1$ je $z \geq 0$, pa je

$$S : \quad z = z(x, y) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 4y^2 - 4} \ ; \quad (x, y) \in D_{xy} \ .$$

Kako je

$$3y^2 + 5z^2(x,y) + 1 = 3y^2 + \frac{5}{4}\big(x^2 + 4y^2 - 4\big) + 1 = \frac{1}{4}\big(5x^2 + 32y^2 - 16\big)\ ;$$

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2}\,\frac{x}{\sqrt{x^2 + 4y^2 - 4}}\ ,\ q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{\sqrt{x^2 + 4y^2 - 4}}\ ;$$

$$1 + p^2 + q^2 = \frac{5x^2 + 32y^2 - 16}{4\big(x^2 + 4y^2 - 4\big)}\ ,$$

to je

$$I = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{\sqrt{3y^2 + 5z^2(x,y) + 1}}\,\sqrt{1 + p^2 + q^2}\ dxdy = \iint_{D_{xy}} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2 + 4y^2 - 4}}\ .$$

Uvodeći uopštene polarne koordinate sa

$$x = 2r\cos\varphi\ ,\ y = r\sin\varphi\ ,$$

za koje je $|J| = 2r$, oblast D_{xy} se preslikava u

$$D^*_{xy}:\quad 1 \le r \le 3\ ,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\ ,$$

a integral I postaje

$$I = \iint_{D^*_{xy}} \frac{2r}{\sqrt{4r^2 - 4}}\,drd\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^3 \frac{r}{\sqrt{r^2 - 1}}\,dr = 2\pi \int_1^3 \frac{r}{\sqrt{r^2 - 1}}\,dr = 4\sqrt{2}\,\pi\ .$$

Komentar iz Zadatka 61 važi i u ovom slučaju.

Površinski integrali po koordinatama (II vrste)

Ako je

$$S:\quad z = z(x,y)\ ;\quad (x,y) \in D_{xy}\ ,$$

tada je

$$\iint_{S^+} R(x,y,z)\,dxdy = \iint_{D_{xy}} R\big(x,y,z(x,y)\big)\,dxdy\ .$$

$\boxed{\mathbf{63}}$. Izračunati potpuni površinski integral II vrste

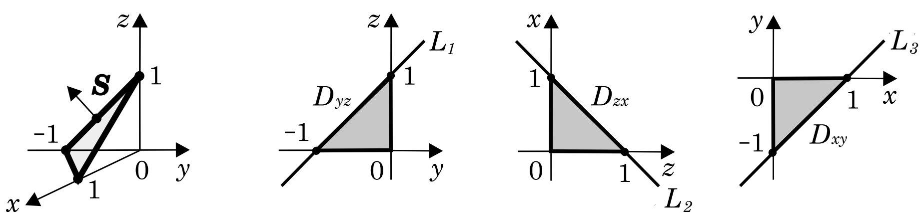
$$I = \iint_S y\,dydz + x\,dzdx + z\,dxdy\ ,$$

gde je S ograničeni deo ravni

$$S_1:\quad x - y + z = 1$$

koji isecaju koordinatne ravni. Integracija se vrši po strani površi S vidljivoj sa pozitivnog dela z–ose.

Rešenje. Ravan S_1 je zadata u segmentnom obliku (Primer 3.3.2) iz kog se očitavaju njene presečne tačke $(1,0,0)$, $(0,-1,0)$, $(0,0,1)$ sa koordinatnim osama. Zato je deo S u IV oktantu, za koji je $x, z \geq 0$, $y \leq 0$. Na stranu površi S po kojoj se vrši integracija je postavljen normalni vektor (prva slika). Projekcije D_{yz}, D_{zx}, D_{xy} dela S redom na yz, zx i xy–ravan su prikazane na ostalim slikama.



Potpuni površinski integral I rastavljamo na tri površinska integrala po koordinatama

$$I = I_1 + I_2 + I_3 \ ,$$

gde je

$$I_1 = \iint_S y \, dydz \ , \ I_2 = \iint_S x \, dzdx \ , \ I_3 = \iint_S z \, dxdy \ .$$

Svaki od ovih integrala rešavamo zasebno.

Integral I_1 je površinski po koordinatama y, z, pa S treba projektovati na yz–ravan. Ovo projektovanje je bijekcija. Ravan S_1 seče yz–ravan $(x = 0)$ duž prave

$$L_1 : \quad z = y + 1 \ , \ x = 0 \ .$$

Zato se S projektuje na

$$D_{yz} : \quad -1 \leq y \leq 0 \ , \ 0 \leq z \leq y + 1 \ .$$

S obzirom na prethodno projektovanje, jednačinu površi S zapisujemo u obliku

$$S : \quad x = x(y, z) = y - z + 1 \ ; \quad (y, z) \in D_{yz} \ .$$

Integracija se vrši po strani koja se vidi sa pozitivnog dela x–ose, pa je to pozitivno orijentisana strana S^+ u odnosu na bijekciju $D_{yz} \leftrightarrow S$.

Integral I_1 postaje dvojni

$$I_1 = \iint_{S^+} y \, dydz = \iint_{D_{yz}} y \, dydz$$

i, prema opisu oblasti D_{yz}, važi

$$I_1 = \int_{-1}^{0} y \, dy \int_{0}^{y+1} dz = \int_{-1}^{0} y(y+1) \, dy = -\frac{1}{6} \ .$$

Integral I_2 je površinski po koordinatama z, x, pa S projektujemo na zx–ravan, pri čemu je projektovanje bijekcija. Ravan S_1 seče zx–ravan $(y=0)$ duž prave

$$L_2: \quad z = -x+1 \ , \ y = 0 \ .$$

Zato je projekcija površi S na zx–ravan oblast

$$D_{zx}: \quad 0 \leq z \leq -x+1 \ , \ 0 \leq x \leq 1 \ ,$$

a odgovarajući oblik jednačine površi S je

$$S: \quad y = y(z,x) = x+z-1 \ ; \quad (z,x) \in D_{zx} \ .$$

Integracija se vrši po strani koja se vidi sa negativnog dela y–ose, pa je to negativno orijentisana strana S^- u odnosu na bijekciju $D_{zx} \leftrightarrow S$.

Integral I_2 postaje dvojni

$$I_2 = \iint_{S^-} x \, dzdx = -\iint_{D_{zx}} x \, dzdx$$

i, prema opisu oblasti D_{zx}, sledi

$$I_2 = -\int_0^1 x \, dx \int_0^{-x+1} dz = -\int_0^1 x(-x+1) \, dx = -\frac{1}{6} \ .$$

Integral I_3 je po koordinatama x, y, pa S treba projektovati na xy–ravan. I ovo projektovanje je bijekcija. Kako S_1 seče xy–ravan $(z=0)$ duž prave

$$L_3: \quad y = x-1 \ , \ z = 0 \ ,$$

projekcija površi S na xy–ravan je

$$D_{xy}: \quad 0 \leq x \leq 1 \ , \ x-1 \leq y \leq 0 \ .$$

Odgovarajući oblik jednačine površi S je

$$S: \quad z = z(x,y) = -x+y+1 \ ; \quad (x,y) \in D_{xy} \ .$$

Integracija se vrši po pozitivno orijentisanoj strani S^+ u odnosu na bijekciju $D_{xy} \leftrightarrow S$.

Integral I_3 prelazi u dvojni

$$I_3 = \iint_{S^+} z \, dxdy = \iint_{D_{xy}} z(x,y) \, dxdy = \iint_{D_{xy}} (-x+y+1) \, dxdy \ .$$

Prema opisu oblasti D_{xy}, dalje je

$$I_3 = \int_0^1 dx \int_{x-1}^0 (-x+y+1) \, dy = \frac{1}{2} \int_0^1 (x-1)^2 \, dx = \frac{1}{6} \ .$$

Konačno je

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = -\frac{1}{6} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{6} \ .$$

64. Izračunati potpuni površinski integral II vrste

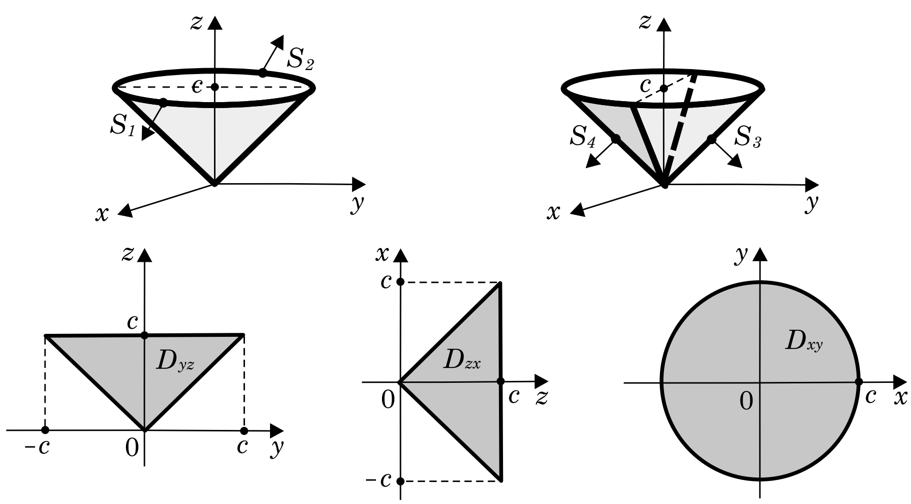
$$I = \iint_S x^2\,dydz + y\,dzdx + z^2\,dxdy\ ,$$

gde je

$$S: \quad z^2 = x^2 + y^2$$

konus za $0 \le z \le c$. Integracija se vrši po strani površi S koja se vidi sa negativnog dela z–ose.

Rešenje. Konus S ima z–osu za osovinu i nalazi se iznad xy–ravni ($z \ge 0$). Neka je $S = S_1 \cup S_2$, gde je S_1 deo za $x \ge 0$, a S_2 deo za $x \le 0$ (prva slika). Takođe, neka je $S = S_3 \cup S_4$, gde je S_3 deo za $y \ge 0$, a S_4 deo za $y \le 0$ (druga slika). Na strane delova koje odgovaraju strani integracije površi S su postavljeni normalni vektori. Ostale slike prikazuju projekcije D_{yz}, D_{zx}, D_{xy} površi S na yz, zx i xy–ravan redom.



Potpuni površinski integral I rastavljamo na površinske integrale po koordinatama

$$I_1 = \iint_S x^2\,dydz\ ,\ I_2 = \iint_S y\,dzdx\ ,\ I_3 = \iint_S z^2\,dxdy$$

i svaki od njih rešavamo zasebno.

Integral I_1 je po koordinatama y, z, pa S treba projektovati na yz–ravan. Kako ovo projektovanje nije bijekcija, S rastavljamo na bijektivne delove S_1 i S_2. Površ S seče yz–ravan ($x = 0$) po krivoj

$$L_1: \quad z = |y|\ ,\ x = 0\ .$$

Za $z = c$ iz $z = |y|$ je $|y| = c$ i $y = \pm c$. Zato se S_1 i S_2 projektuju na yz–ravan u oblast

$$D_{yz}: \quad -c \le y \le c\ ,\ |y| \le z \le c\ .$$

S obzirom na prethodno projektovanje, jednačine površi S_1 i S_2 zapisujemo u obliku

$$\begin{aligned} S_1: &\quad x = x_1(y,z) = \sqrt{z^2 - y^2}\ ; \quad (y,z) \in D_{yz}\ , \\ S_2: &\quad x = x_2(y,z) = -\sqrt{z^2 - y^2}\ ; \quad (y,z) \in D_{yz}\ . \end{aligned}$$

Integracija se vrši po strani površi S_1 koja se vidi sa pozitivnog dela x–ose, pa je to pozitivno orijentisana strana S_1^+ u odnosu na bijekciju $D_{yz} \leftrightarrow S_1$. Takođe, strana površi S_2 po kojoj se vrši integracija se vidi sa negativnog dela x–ose, pa se radi o negativno orijentisanoj strani S_2^- u odnosu na bijekciju $D_{yz} \leftrightarrow S_2$.

Integral I_1 postaje

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_{S_1^+} x^2\, dydz + \iint_{S_2^-} x^2\, dydz = \iint_{D_{yz}} x_1^2(y,z)\, dydz - \iint_{D_{yz}} x_2^2(y,z)\, dydz \\ &= \iint_{D_{yz}} \left(z^2 - y^2\right) dydz - \iint_{D_{yz}} \left(z^2 - y^2\right) dydz = 0\ . \end{aligned}$$

Integral I_2 je po koordinatama z, x, pa S projektujemo na zx–ravan. Ni ovo projektovanje nije bijekcija, ali su S_3 i S_4 bijektivni delovi. Analogno prethodnom slučaju, površ S seče zx–ravan $(y = 0)$ po krivoj

$$L_2: \quad z = |x|\ ,\ y = 0\ ,$$

odakle je $x = \pm c$ za $z = c$. Dakle, projekcije površi S_3 i S_4 na zx–ravan su ista oblast

$$D_{zx}: \quad |x| \le z \le c\ ,\ -c \le x \le c\ ,$$

a jednačine ovih površi u odgovarajućem obliku su

$$\begin{aligned} S_3: &\quad y = y_3(z,x) = \sqrt{z^2 - x^2}\ ; \quad (z,x) \in D_{zx}\ , \\ S_4: &\quad y = y_4(z,x) = -\sqrt{z^2 - x^2}\ ; \quad (z,x) \in D_{zx}\ . \end{aligned}$$

Integracija se vrši po pozitivno orijentisanoj strani S_3^+ površi S_3 u odnosu na bijekciju $D_{zx} \leftrightarrow S_3$ jer se ona vidi sa pozitivnog dela y–ose i po negativno orijentisanoj strani S_4^- površi S_4 u odnosu na bijekciju $D_{zx} \leftrightarrow S_4$ jer se ta strana vidi sa negativnog dela y–ose.

Integral I_2 postaje

$$\begin{aligned} I_2 &= \iint_{S_3^+} y\, dzdx + \iint_{S_4^-} y\, dzdx = \iint_{D_{zx}} y_3(z,x)\, dzdx - \iint_{D_{zx}} y_4(z,x)\, dzdx \\ &= \iint_{D_{zx}} \sqrt{z^2 - x^2}\ dzdx - \iint_{D_{zx}} -\sqrt{z^2 - x^2}\ dzdx = 2\iint_{D_{zx}} \sqrt{z^2 - x^2}\ dzdx\ . \end{aligned}$$

Radi jednostavnijeg rešavanja dobijenog dvojnog integrala, a imajući u vidu da je $z = |x| = x$ za $x \in [0,c]$ i $z = |x| = -x$ za $x \in [-c,0]$, oblast D_{zx} opisujemo drugačije sa

$$D_{zx}: \quad 0 \le z \le c\ ,\ -z \le x \le z\ .$$

Zato je

$$I_2 = 2\int_0^c dz \int_{-z}^{z} \sqrt{z^2 - x^2}\ dx = 4\int_0^c dz \int_0^z \sqrt{z^2 - x^2}\ dx\ ,$$

pri čemu je iskorišćena parnost funkcije $\sqrt{z^2 - x^2}$ po x. Unutrašnji integral se rešava smenom

$$x = z \sin t \ ,$$

za koju je $t = 0$ kad je $x = 0$ i $t = \pi/2$ kad je $x = z$. Dobija se

$$I_2 = 4 \int_0^c dz \int_0^{\pi/2} |z \cos t| z \cos t \, dt = 4 \int_0^c z^2 \, dz \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \, dt = \frac{1}{3} \, c^3 \pi \ .$$

Integral I_3 je po koordinatama x, y, pa S projektujemo na xy–ravan. Ovo projektovanje jeste bijekcija. Ravan $z = c$ je paralelna xy–ravni i seče S po kružnici

$$L : \quad x^2 + y^2 = c^2 \ , \ z = c \ ,$$

čija je projekcija na xy–ravan

$$L_{xy} : \quad x^2 + y^2 = c^2 \ , \ z = 0 \ ,$$

pa je projekcija površi S krug

$$D_{xy} : \quad x^2 + y^2 \le c^2 \ .$$

Odgovarajući oblik jednačine površi S glasi

$$S : \quad z = z(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \ ; \quad (x, y) \in D_{xy} \ .$$

Integracija se vrši po negativno orijentisanoj strani S^- površi S u odnosu na bijekciju $D_{xy} \leftrightarrow S$.

Integral I_3 postaje dvojni

$$I_3 = \iint_{S^-} z^2 \, dxdy = - \iint_{D_{xy}} z^2(x, y) \, dxdy = - \iint_{D_{xy}} \left(x^2 + y^2\right) dxdy \ .$$

Uvodeći polarne koordinate r, φ u xy–ravni, oblast D_{xy} se preslikava u

$$D^*_{xy} : \quad 0 \le r \le c \ , \ 0 \le \varphi \le 2\pi$$

i dobija se

$$I_3 = - \iint_{D^*_{xy}} r^3 \, drd\varphi = - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^c r^3 \, dr = -\frac{1}{2} \, c^4 \pi \ .$$

Konačno je

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{1}{3} \, c^3 \pi - \frac{1}{2} \, c^4 \pi = \frac{1}{6} (2 - 3c) c^3 \pi \ .$$

65. Izračunati potpuni površinski integral II vrste

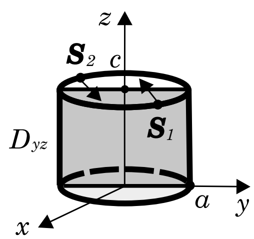
$$I = \iint_S x \, dydz + y \, dzdx + R(x, y, z) \, dxdy \ ,$$

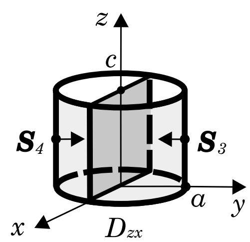
gde je

$$S: \quad x^2 + y^2 = a^2$$

cilindrična površ za $0 \le z \le c$ i $a > 0$, a $R(x, y, z)$ je proizvoljna funkcija neprekidna na S. Integracija se vrši po "unutrašnjoj" strani površi S.

Rešenje. Površ S nije zatvorena, pa termin "unutrašnja" strana nije adekvatan i treba ga prihvatiti intuitivno. Bolji opis strane integracije ne može da se da jer S ne može bijektivno da se projektuje ni na jednu koordinatnu ravan. Neka su S_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ delovi površi S redom za: $x \ge 0$, $x \le 0$, $y \ge 0$, $y \le 0$. Na strane delova koje odgovaraju strani integracije površi S su postavljeni normalni vektori.





Delovi S_1, S_2 se bijektivno projektuju na yz–ravan $(x = 0)$, a delovi S_3, S_4 na zx–ravan $(y = 0)$. Projekcije su pravougaone oblasti

$$D_{yz}: \quad -a \le y \le a \ , \ 0 \le z \le c \ , \quad D_{zx}: \quad 0 \le z \le c \ , \ -a \le x \le a \ ,$$

a potrebne jednačine ovih delova su

$$\begin{aligned} S_{1,2}: &\quad x = x_{1,2}(y, z) = \pm\sqrt{a^2 - y^2} \ ; \quad (y, z) \in D_{yz} \ , \\ S_{3,4}: &\quad y = y_{3,4}(z, x) = \pm\sqrt{a^2 - x^2} \ ; \quad (z, x) \in D_{zx} \ . \end{aligned}$$

Orijentacije strana integracije su S_1^-, S_2^+ u odnosu na $D_{yz} \leftrightarrow S_1$, $D_{yz} \leftrightarrow S_2$ i S_3^-, S_4^+ u odnosu na $D_{zx} \leftrightarrow S_3$, $D_{zx} \leftrightarrow S_4$.

Za integral po koordinatama y, z se dobija

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_{S_1^-} x\,dydz + \iint_{S_2^+} x\,dydz = -\iint_{D_{yz}} x_1(y, z)\,dydz + \iint_{D_{yz}} x_2(y, z)\,dydz \\ &= -2\iint_{D_{yz}} \sqrt{a^2 - y^2}\ dydz = -2\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - y^2}\ dy \int_0^c dz \\ &= -4c\int_0^a \sqrt{a^2 - y^2}\ dy = -4a^2 c\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = -a^2 c\pi \ , \end{aligned}$$

pri čemu je korišćena smena $y = a\sin t$.

Integral po koordinatama z, x se rešava slično kao I_1 i dobija se

$$\begin{aligned} I_2 &= \iint_{S_3^-} y\,dzdx + \iint_{S_4^+} y\,dzdx = -\iint_{D_{zx}} y_3(z, x)\,dzdx + \iint_{D_{zx}} y_4(z, x)\,dzdx \\ &= -2\iint_{D_{zx}} \sqrt{a^2 - x^2}\ dzdx = -a^2 c\pi \ . \end{aligned}$$

Površ S ima izvodnice paralelne z–osi, pa je bilo koji površinski integral po koordinatama x, y jednak nuli (osobina (4.2.4)), tj.

$$I_3 = \iint_S R(x, y, z)\, dxdy = 0 \ .$$

Vrednost integrala I je

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = -a^2 c\pi - a^2 c\pi + 0 = -2a^2 c\pi \ .$$

66. Izračunati potpuni površinski integral II vrste

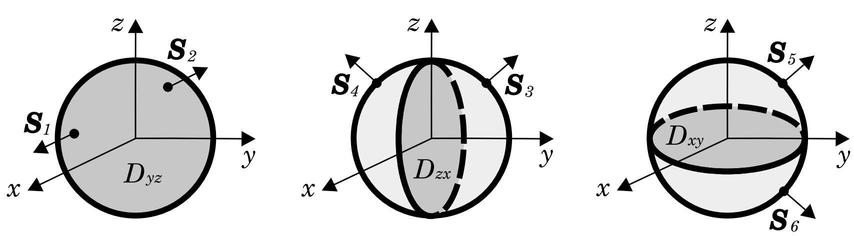
$$I = \iint_S \frac{x\, dydz + y\, dzdx + z\, dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \ ,$$

gde je

$$S : \quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

i $a > 0$. Integracija se vrši po spoljnoj strani površi S.

Rešenje. Površ S je centralna sfera poluprečnika a. Sfera je zatvorena površ, pa ne može bijektivno da se projektuje ni na jednu od koordinatnih ravni. Neka su S_i $(i = 1, 2, \dots, 6)$ delovi sfere S redom za: $x \geq 0$, $x \leq 0$, $y \geq 0$, $y \leq 0$, $z \geq 0$, $z \leq 0$. Na strane delova koje odgovaraju spoljnoj strani sfere su postavljeni normalni vektori.



Delovi S_1, S_2 se bijektivno projektuju na yz–ravan $(x = 0)$, delovi S_3, S_4 na zx–ravan $(y = 0)$ i S_5, S_6 na xy–ravan $(z = 0)$. Projekcije su krugovi

$$D_{yz} : \quad y^2 + z^2 \leq a^2 \ , \quad D_{zx} : \quad z^2 + x^2 \leq a^2 \ , \quad D_{xy} : \quad x^2 + y^2 \leq a^2 \ .$$

Jednačine delova su

$$\begin{aligned} S_{1,2} : &\quad x = x_{1,2}(y, z) = \pm\sqrt{a^2 - y^2 - z^2} \ ; \quad (y, z) \in D_{yz} \ , \\ S_{3,4} : &\quad y = y_{3,4}(z, x) = \pm\sqrt{a^2 - x^2 - z^2} \ ; \quad (z, x) \in D_{zx} \ , \\ S_{5,6} : &\quad z = z_{5,6}(x, y) = \pm\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \ ; \quad (x, y) \in D_{xy} \ . \end{aligned}$$

Orijentacije strana integracije u odnosu na odgovarajuća projektovanja su: S_1^+, S_2^-, S_3^+, S_4^-, S_5^+, S_6^-.

Površinski integrali po koordinatama sada postaju dvojni

$$\begin{aligned}
I_1 &= \iint_{S_1^+} \frac{x\,dydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \iint_{S_2^-} \frac{x\,dydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\
&= \iint_{D_{yz}} \frac{x_1(y,z)\,dydz}{\sqrt{x_1^2(y,z)+y^2+z^2}} - \iint_{D_{yz}} \frac{x_2(y,z)\,dydz}{\sqrt{x_2^2(y,z)+y^2+z^2}} \\
&= \frac{1}{a}\iint_{D_{yz}} \sqrt{a^2-y^2-z^2}\ dydz - \frac{1}{a}\iint_{D_{yz}} -\sqrt{a^2-y^2-z^2}\ dydz \\
&= \frac{2}{a}\iint_{D_{yz}} \sqrt{a^2-y^2-z^2}\ dydz
\end{aligned}$$

i analogno

$$I_2 = \iint_{S_3^+} \frac{y\,dzdx}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \iint_{S_4^-} \frac{y\,dzdx}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{2}{a}\iint_{D_{zx}} \sqrt{a^2-x^2-z^2}\ dzdx\ ,$$

$$I_3 = \iint_{S_5^+} \frac{z\,dxdy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \iint_{S_6^-} \frac{z\,dxdy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{2}{a}\iint_{D_{xy}} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\ dxdy\ .$$

Imajući u vidu opise oblasti integracije i podintegralne funkcije u dobijenim dvojnim integralima, lako se uočava da je

$$I_1 = I_2 = I_3\ .$$

Zato je dovoljno izračunati samo jedan od njih, npr. I_1. Uvodeći polarne koordinate sa

$$y = r\cos\varphi\ ,\ \ z = r\sin\varphi\ ,$$

oblast D_{yz} prelazi u

$$D_{yz}^*: \quad 0 \le r \le a\ ,\ \ 0 \le \varphi \le 2\pi$$

i sledi

$$I_1 = \frac{2}{a}\iint_{D_{yz}^*} r\sqrt{a^2-r^2}\ drd\varphi = \frac{2}{a}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r\sqrt{a^2-r^2}\ dr = \frac{4}{3}\,a^2\pi\ .$$

Integral I je zbir integrala po koordinatama

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = 3I_1 = 4a^2\pi\ .$$

67. Izračunati potpuni površinski integral II vrste

$$I = \iint_S xy\,dydz + yz\,dzdx + xz\,dxdy\ ,$$

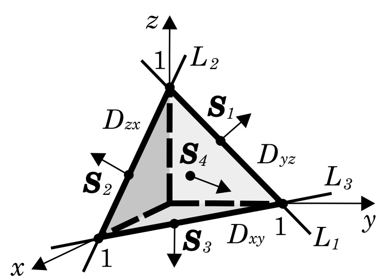
gde je $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$ tetraedar sastavljen od delova S_i $(i = 1,2,3)$ koordinatnih ravni koje iseca ravan

$$S_5: \quad x + y + z = 1$$

za $x, y, z \geq 0$ i ograničenog dela S_4 ravni S_5 između koordinatnih ravni. Integracija se vrši po spoljnoj strani tetraedra S.

Rešenje. Prema tekstu zadatka, tetraedar S se nalazi u I oktantu. Neka su S_i $(i = 1, 2, 3)$ delovi yz, zx i xy–koordinatne ravni redom. Na strane delova, koje odgovaraju spoljnoj strani tetraedra, postavljeni su normalni vektori. Ravan S_5 seče koordinatne ose u tačkama $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, a koordinatne ravni duž pravih

$$L_1: \quad z = -y + 1 \ , \ x = 0 \ , \quad L_2: \quad x = -z + 1 \ , \ y = 0 \ , \quad L_3: \quad y = -x + 1 \ , \ z = 0 \ .$$



Potpuni površinski integral I rastavljamo na integrale po koordinatama

$$I_1 = \iint_S xy\,dydz \ , \ I_2 = \iint_S yz\,dzdx \ , \ I_3 = \iint_S xz\,dxdy \ .$$

Kako se površ S sastoji od delova S_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ sa različitom parametrizacijom, svaki od prethodnih integrala rastavljamo na integrale po delovima i dobijamo

$$I_1 = \sum_{i=1}^{4} I_{1i} \ , \ I_2 = \sum_{i=1}^{4} I_{2i} \ , \ I_3 = \sum_{i=1}^{4} I_{3i} \ ,$$

gde je

$$I_{1i} = \iint_{S_i} xy\,dydz \ , \ I_{2i} = \iint_{S_i} yz\,dzdx \ , \ I_{3i} = \iint_{S_i} xz\,dxdy \ .$$

Površ S_1 može da se tretira dvojako, kao cilindrična površ sa direktrisom na z–osi i izvodnicama paralelnim y–osi ili kao cilindrična površ sa direktrisom na y–osi i izvodnicama paralelnim z–osi. Zato su površinski integrali po koordinatama z, x, odnosno x, y, po površi S_1 i sa proizvoljnom podintegralnom funkcijom jednaki nuli (osobina (4.2.4)). Konkretno, važi

$$I_{21} = I_{31} = 0 \ .$$

Analognim razmatranjem u slučaju površi S_2 i S_3 se zaključuje

$$I_{12} = I_{32} = 0 \ , \ I_{13} = I_{23} = 0 \ .$$

Površi S_i $(i = 1, 2, 3)$ se poklapaju sa svojim projekcijama na odgovarajuće koordinatne ravni. Opis projekcija ne navodimo jer iz jednačina ovih površi

$$S_1: \quad x = 0 \ , \quad S_2: \quad y = 0 \ , \quad S_3: \quad z = 0$$

neposredno sledi

$$I_{11} = I_{22} = I_{33} = 0 \ .$$

Ostaje još da se izračunaju integrali I_{14}, I_{24} i I_{34} po površi S_4. Površ S_4 se bijektivno projektuje na sve koordinatne ravni. Opis njenih projekcija glasi

$$\begin{aligned} D_{yz}: &\quad 0 \le y \le 1 \ , \ 0 \le z \le -y+1 \ , \\ D_{zx}: &\quad 0 \le z \le 1 \ , \ 0 \le x \le -z+1 \ , \\ D_{xy}: &\quad 0 \le x \le 1 \ , \ 0 \le y \le -x+1 \ , \end{aligned}$$

a potrebni oblici njene jednačine su

$$\begin{aligned} S_4: &\quad x = x(y,z) = 1 - y - z \ ; &\quad (y,z) \in D_{yz} \ , \\ S_4: &\quad y = y(z,x) = 1 - x - z \ ; &\quad (z,x) \in D_{zx} \ , \\ S_4: &\quad z = z(x,y) = 1 - x - y \ ; &\quad (x,y) \in D_{xy} \ . \end{aligned}$$

Spoljnoj strani tetraedra odgovara strana površi S_4 koja se vidi sa pozitivnih delova svih koordinatnih osa, pa je to pozitivno orijentisana strana S_4^+ u odnosu na svaku od bijekcija $D_{yz} \leftrightarrow S_4$, $D_{zx} \leftrightarrow S_4$, $D_{xy} \leftrightarrow S_4$.

Za integrale se dobija

$$\begin{aligned} I_1 = I_{14} &= \iint_{S_4^+} xy\,dydz = \iint_{D_{yz}} x(y,z)y\,dydz = \iint_{D_{yz}} (1-y-z)y\,dydz \\ &= \int_0^1 y\,dy \int_0^{-y+1} (1-y-z)\,dz = \frac{1}{24} \end{aligned}$$

i analogno

$$I_2 = I_{24} = \iint_{S_4^+} yz\,dzdx = \iint_{D_{zx}} y(z,x)z\,dzdx = \iint_{D_{zx}} (1-x-z)z\,dzdx = \frac{1}{24} \ ,$$

$$I_3 = I_{34} = \iint_{S_4^+} xz\,dxdy = \iint_{D_{xy}} xz(x,y)\,dxdy = \iint_{D_{xy}} x(1-x-y)\,dxdy = \frac{1}{24} \ .$$

Dakle, integral I je

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{3}{24} = \frac{1}{8} \ .$$

Veza između površinskih integrala I i II vrste

Ako su α, β, γ uglovi između normalnog vektora na stranu integracije površi i pozitivnih delova x, y i z–koordinatne ose redom, tada je

$$\begin{aligned} &\iint_S P(x,y,z)\,dydz + Q(x,y,z)\,dzdx + R(x,y,z)\,dxdy \\ &= \iint_S \big[P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma\big]\,d\sigma \ . \end{aligned}$$

68. Izračunati potpuni površinski integral II vrste

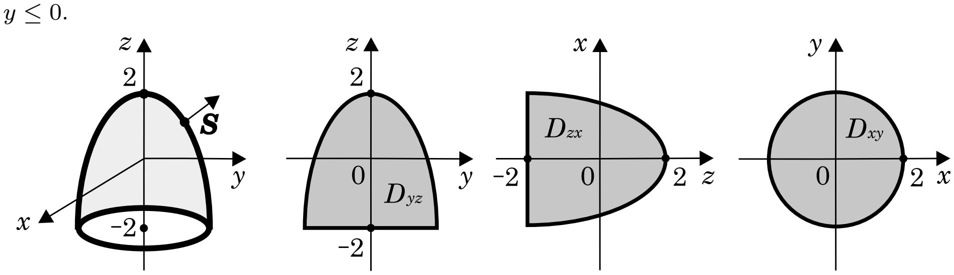
$$I = \iint_S x\,dydz + x\,dzdx + (1+z)\,dxdy\ ,$$

gde je

$$S: \quad z = 2 - \left(x^2 + y^2\right)$$

paraboloid za $-2 \le z \le 2$. Integracija se vrši po strani površi S koja se vidi sa pozitivnog dela z–ose.

Rešenje. Paraboloid S ima z–osu kao osovinu i nalazi se iznad ravni $z = -2$ $(z \ge -2)$. Na stranu površi S po kojoj se vrši integracija je postavljen normalni vektor (prva slika). Na ostalim slikama su prikazane projekcije D_{yz}, D_{xz}, D_{xy} površi S na yz, zx i xy–ravan redom. Neka su S_i $(i = 1,2,3,4)$ delovi paraboloida S redom za: $x \ge 0$, $x \le 0$, $y \ge 0$, $y \le 0$.



Zadatak rešavamo na dva načina, direktno i prelaskom na površinski integral I vrste.

Direktno rešavanje je postupak koji smo dosada primenjivali, a sastoji se u rešavanju pojedinačnih površinskih integrala po koordinatama

$$I_1 = \iint_S x\,dydz\ ,\ I_2 = \iint_S x\,dzdx\ ,\ I_3 = \iint_S (1+z)\,dxdy\ .$$

Delovi S_1 i S_2 se bijektivno projektuju na yz–ravan u oblast D_{yz}. Kako S seče yz–ravan $(x = 0)$ po paraboli

$$L_1: \quad z = 2 - y^2\ ,\ x = 0\ ,$$

za $z = -2$ je $y^2 = 4$ i $y = \pm 2$, pa je

$$D_{yz}: \quad -2 \le y \le 2\ ,\ -2 \le z \le 2 - y^2\ .$$

Odgovarajući oblik jednačina je

$$S_{1,2}: \quad x = x_{1,2}(y,z) = \pm\sqrt{2 - y^2 - z}\ ; \quad (y,z) \in D_{yz}\ ,$$

a integracija se vrši po stranama S_1^+, S_2^- u odnosu na $D_{yz} \leftrightarrow S_1$, $D_{yz} \leftrightarrow S_2$.

Integral I_1 postaje dvojni

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_{S_1^+} x\,dydz + \iint_{S_2^-} x\,dydz \\ &= \iint_{D_{yz}} x_1(y,z)\,dydz - \iint_{D_{yz}} x_2(y,z)\,dydz = 2\iint_{D_{yz}} \sqrt{2 - y^2 - z}\ dydz\ . \end{aligned}$$

Prema opisu oblasti D_{yz}, dalje je

$$\begin{aligned}
I_1 &= 2\int_{-2}^{2} dy \int_{-2}^{2-y^2} \sqrt{2-y^2-z}\; dz = -2\int_{-2}^{2} dy \int_{-2}^{2-y^2} \sqrt{2-y^2-z}\; d\big(2-y^2-z\big) \\
&= -\frac{4}{3}\int_{-2}^{2} \big(2-y^2-z\big)^{3/2}\Big|_{z=-2}^{z=2-y^2} dy = \frac{8}{3}\int_{0}^{2} \big(4-y^2\big)^{3/2}\, dy = \frac{128}{3}\int_{0}^{\pi/2} \cos^4 t\, dt \\
&= \frac{128}{3}\int_{0}^{\pi/2} \Big(\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2t+\frac{1}{8}\cos 4t\Big)\, dt = 8\pi \ .
\end{aligned}$$

Pri rešavanju određenih integrala je korišćena smena $y = 2\sin t$, kao i formula izvedena u Zadatku 10.

Delovi S_3 i S_4 se bijektivno projektuju na zx–ravan u oblast D_{zx}. Kako S seče zx–ravan ($y = 0$) po paraboli

$$L_2 : \quad z = 2 - x^2 \ , \ y = 0 \ ,$$

za $z = -2$ je $x = \pm 2$, pa je

$$D_{zx} : \quad -2 \le z \le 2 - x^2 \ , \ -2 \le x \le 2 \ .$$

Odgovarajući oblik jednačina je

$$S_{3,4} : \quad y = y_{3,4}(z,x) = \pm\sqrt{2-x^2-z} \ ; \quad (z,x) \in D_{zx} \ ,$$

a integracija se vrši po stranama S_3^+, S_4^- u odnosu na $D_{zx} \leftrightarrow S_3$, $D_{zx} \leftrightarrow S_4$.

Za integral I_2 se dobija

$$I_2 = \iint_{S_3^+} x\, dzdx + \iint_{S_4^-} x\, dzdx = \iint_{D_{zx}} x\, dzdx - \iint_{D_{zx}} x\, dzdx = 0 \ .$$

Površ S se bijektivno projektuje na xy–ravan u oblast D_{xy}. Ravan $z = -2$ je paralelna xy–ravni i seče S po kružnici

$$L : \quad x^2 + y^2 = 4 \ , \ z = -2 \ ,$$

čija je projekcija na xy–ravan

$$L_{xy} : \quad x^2 + y^2 = 4 \ , \ z = 0 \ ,$$

pa je oblast D_{xy} krug

$$D_{xy} : \quad x^2 + y^2 \le 4 \ .$$

Jednačina površi S u potrebnom obliku je

$$S : \quad z = z(x,y) = 2 - \big(x^2 + y^2\big) \ ; \quad (x,y) \in D_{xy} \ .$$

Integracija se vrši po strani S^+ u odnosu na $D_{xy} \leftrightarrow S$.

Za integral I_3 se dobija

$$I_3 = \iint_{S^+} (1+z)\, dxdy = \iint_{D_{xy}} \big[1 + z(x,y)\big]\, dxdy = \iint_{D_{xy}} \big(3 - x^2 - y^2\big)\, dxdy \ .$$

Uvođenjem polarnih koordinata r, φ u xy–ravni, D_{xy} prelazi u

$$D^*_{xy}: \quad 0 \le r \le 2 \ , \ 0 \le \varphi \le 2\pi$$

i sledi

$$I_3 = \iint_{D^*_{xy}} r\big(3-r^2\big)\, dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r\big(3-r^2\big)\, dr = 4\pi \ .$$

Dakle, integral I ima vrednost

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = 8\pi + 0 + 4\pi = 12\pi \ .$$

Drugi način rešavanja je zasnovan na vezi između površinskih integrala I i II vrste.

Već smo utvrdili da je projektovanje na xy–ravan jedina bijekcija $D_{xy} \leftrightarrow S$. Takođe, odredili smo projekciju D_{xy} i jednačinu površi S smo zapisali u odgovarajućem obliku. Normalni vektor na stranu integracije zaklapa oštar ugao γ sa pozitivnim delom z–ose, pa je $\cos\gamma > 0$ i važi

$$\cos\alpha = \frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \ , \ \cos\beta = \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \ , \ \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \ .$$

Za posmatrani oblik jednačine površi je

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = -2x \ , \ q = \frac{\partial z}{\partial y} = -2y \ .$$

Integral I postaje površinski I vrste, a zatim i dvojni

$$\begin{aligned} I &= \iint_S \big[x\cos\alpha + x\cos\beta + (1+z)\cos\gamma\big]\, d\sigma \\ &= \iint_{D_{xy}} \big[-px - qx + 1 + z(x,y)\big]\, dxdy = \iint_{D_{xy}} \big(x^2 - y^2 + 2xy + 3\big)\, dxdy \ . \end{aligned}$$

Dvojni integral se rešava uvođenjem polarnih koordinata i korišćenjem već dobijenog opisa oblasti D^*_{xy} i sledi

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D^*_{xy}} \big[r^3(\cos 2\varphi + \sin 2\varphi) + 3r\big]\, dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \big[r^3(\cos 2\varphi + \sin 2\varphi) + 3r\big]\, dr \\ &= \int_0^{2\pi} \big[4(\cos 2\varphi + \sin 2\varphi) + 6\big]\, d\varphi = 12\pi \ . \end{aligned}$$

Vidimo da se zadatak mnogo jednostavnije rešava prelaskom na površinski integral I vrste jer je dovoljno projektovati površ samo na jednu koordinatnu ravan (Napomena 4.4.1). Ovde je to xy–ravan u odnosu na koju je projektovanje bijekcija (1° iz Napomene 4.3.2).

Analogno važi i za Zadatke 63–66, s tim što u Zadacima 65 i 66 površ ipak mora da se deli na bijektivne delove (3° iz Napomene 4.3.2), ali samo u odnosu na jedno od projektovanja.

$\boxed{\mathbf{69}.}$ Izračunati potpuni površinski integral II vrste

$$I = \iint_S x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy \ ,$$

gde je $S = S_1 \cup S_2$ zatvorena površ, S_1 je manji deo sfere

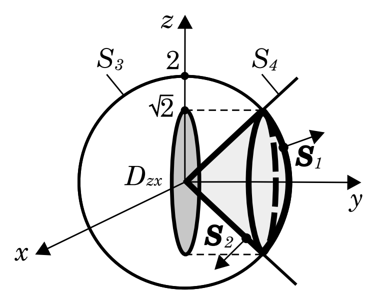
$$S_3 : \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

koji iseca konus

$$S_4 : \quad y = \sqrt{x^2 + z^2} \ ,$$

a S_2 deo konusa S_4 koji je unutar sfere S_3. Integracija se vrši po spoljnoj strani površi S.

Rešenje. Sfera S_3 je centralna poluprečnika 2, a konus S_4 ima y–osu za osovinu. Na strane površi S_1 i S_2, po kojima se vrši integracija, postavljeni su normalni vektori.



Površi S_1 i S_2 se bijektivno projektuju jedino na zx–ravan ($y = 0$). Projekciju L_{zx} presečne krive površi S_3 i S_4 nalazimo slično kao u Zadatku 55 i dobijamo

$$L_{zx} : \quad x^2 + z^2 = 2 \ , \ y = 0 \ ,$$

pa je zajednička projekcija za S_1 i S_2 krug u zx–ravni

$$D_{zx} : \quad x^2 + z^2 \leq 2 \ .$$

Kako je $y \geq 0$ za površ S, odgovarajuće jednačine za S_1 i S_2 su

$$\begin{aligned} S_1 : &\quad y = y_1(z,x) = \sqrt{4 - x^2 - z^2} \ ; \quad (z,x) \in D_{zx} \ , \\ S_2 : &\quad y = y_2(z,x) = \sqrt{x^2 + z^2} \ ; \quad (z,x) \in D_{zx} \ . \end{aligned}$$

Normalni vektor na površ S_1 zaklapa oštar ugao β_1, a normalni vektor na S_2 tup ugao β_2 sa pozitivnim delom y–ose. Zato je $\cos\beta_1 > 0$, $\cos\beta_2 < 0$ i važi

$$\begin{aligned} \cos\alpha_1 &= \frac{-q_1}{\sqrt{1 + p_1^2 + q_1^2}} \ , \ \cos\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + p_1^2 + q_1^2}} \ , \ \cos\gamma_1 = \frac{-p_1}{\sqrt{1 + p_1^2 + q_1^2}} \ ; \\ \cos\alpha_2 &= \frac{q_2}{\sqrt{1 + p_2^2 + q_2^2}} \ , \ \cos\beta_2 = \frac{-1}{\sqrt{1 + p_2^2 + q_2^2}} \ , \ \cos\gamma_2 = \frac{p_2}{\sqrt{1 + p_2^2 + q_2^2}} \ . \end{aligned}$$

Određujemo

$$p_1 = \frac{\partial y_1}{\partial z} = \frac{-z}{\sqrt{4-x^2-z^2}} \ , \ q_1 = \frac{\partial y_1}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2-z^2}} \ ;$$
$$p_2 = \frac{\partial y_2}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}} \ , \ q_2 = \frac{\partial y_2}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}$$

i izračunavamo

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_{S_1} x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy = \iint_{S_1} (x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1 + z\cos\gamma_1)\,d\sigma \\ &= \iint_{D_{zx}} \big[-q_1 x + y_1(z,x) - p_1 z\big]\,dzdx = \iint_{D_{zx}} \frac{4}{\sqrt{4-x^2-z^2}}\,dzdx \ , \\ I_2 &= \iint_{S_2} x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy = \iint_{S_2} (x\cos\alpha_2 + y\cos\beta_2 + z\cos\gamma_2)\,d\sigma \\ &= \iint_{D_{zx}} \big[q_2 x - y_2(z,x) + p_2 z\big]\,dzdx = 0 \ . \end{aligned}$$

Uvodeći polarne koordinate r, φ u zx–ravni sledi

$$D^*_{zx}: \quad 0 \le r \le \sqrt{2}\ , \ 0 \le \varphi \le 2\pi$$

i za integral I_1 se dobija

$$I_1 = 4\iint_{D^*_{zx}} \frac{r}{\sqrt{4-r^2}}\,drd\varphi = 4\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \frac{r}{\sqrt{4-r^2}}\,dr = 8(2-\sqrt{2}\,)\pi \ .$$

Zbog $S = S_1 \cup S_2$, integral I je

$$I = I_1 + I_2 = 8(2-\sqrt{2}\,)\pi \ .$$

Slično kao u Zadatku 55, površ S se sastoji od delova S_1, S_2 sa različitom parametrizacijom (4° iz Napomene 4.3.2), koji se projektuju na istu koordinatnu ravan. Kada bi se Zadatak 67 rešavao prelaskom na površinski integral I vrste, delovi S_i $(i = 1,2,3)$ bi morali da se projektuju na različite koordinatne ravni.

70. Izračunati potpuni površinski integral II vrste

$$I = \iint_S (y-z)\,dydz + (z-x)\,dzdx + (x-y)\,dxdy \ ,$$

gde je S deo sfere

$$S_1: \quad x^2+y^2+z^2 = 4ax$$

koji iseca cilindrična površ

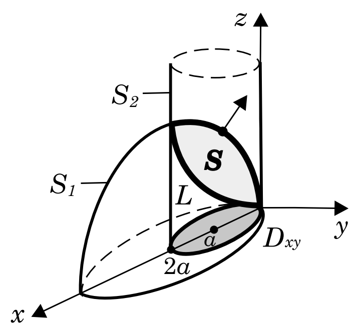
$$S_2: \quad x^2+y^2 = 2ax$$

za $z \geq 0$ i $a > 0$. Integracija se vrši po strani površi S koja se vidi sa pozitivnog dela z–ose.

Rešenje. Neka je L presečna kriva površi S_1 i S_2, a L_{xy} njena projekcija na xy–ravan. Iz jednačina

$$S_1: \quad (x-2a)^2+y^2+z^2=4a^2 \ , \quad S_2: \quad (x-a)^2+y^2=a^2$$

se vidi da sfera S_1 ima centar u tački $(2a,0,0)$ i poluprečnik $2a$, a cilindrična površ S_2 za direktrisu ima kružnicu L_{xy} sa centrom u tački $(a,0,0)$ i poluprečnika a. Na stranu integracije je postavljen normalni vektor.



Površ S se bijektivno projektuje na xy–ravan $(z=0)$ u krug D_{xy} ograničen sa L_{xy},

$$D_{xy}: \quad x^2+y^2 \leq 2ax \ .$$

Zbog $z \geq 0$, odgovarajuća jednačina površi S glasi

$$S: \quad z=z(x,y)=\sqrt{4ax-x^2-y^2} \ ; \quad (x,y) \in D_{xy} \ .$$

Normalni vektor na površ S zaklapa oštar ugao γ sa pozitivni delom z–ose, pa je $\cos\gamma > 0$ i sledi

$$\cos\alpha = \frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \ , \ \cos\beta = \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \ , \ \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \ .$$

Određujući

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2a-x}{\sqrt{4ax-x^2-y^2}} \ , \ q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{4ax-x^2-y^2}} \ ,$$

integral I prevodimo u površinski I vrste, a zatim u dvojni

$$\begin{aligned}
I &= \iint_S \big[(y-z)\cos\alpha + (z-x)\cos\beta + (x-y)\cos\gamma\big]\, d\sigma \\
&= \iint_{D_{xy}} \big[-p\big(y-z(x,y)\big) - q\big(z(x,y)-x\big) + (x-y)\big]\, dxdy \\
&= 2a \iint_{D_{xy}} \left(1 - \frac{y}{\sqrt{4ax-x^2-y^2}}\right) dxdy \\
&= 2a \iint_{D_{xy}} dxdy - 2a \iint_{D_{xy}} \frac{y}{\sqrt{4ax-x^2-y^2}}\, dxdy \\
&= 2a^3\pi - 2a \iint_{D_{xy}} \frac{y}{\sqrt{4ax-x^2-y^2}}\, dxdy \ ,
\end{aligned}$$

pri čemu je iskorišćena činjenica da je jedan od dvojnih integrala jednak površini kruga poluprečnika a (Primer 3.5.1). Ako oblast D_{xy} opišemo na način

$$D_{xy}: \quad 0 \le x \le 2a\ ,\ -\sqrt{2ax-x^2} \le y \le \sqrt{2ax-x^2}\ ,$$

poslednji dvojni integral je

$$\iint_{D_{xy}} \frac{y}{\sqrt{4ax-x^2-y^2}}\, dxdy = \int_0^{2a} dx \int_{-\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax-x^2}} \frac{y}{\sqrt{4ax-x^2-y^2}}\, dy = 0$$

zbog neparnosti podintegralne funkcije po y i simetričnosti granica unutrašnjeg integrala.

Dakle, rezultat je

$$I = 2a^3\pi\ .$$

Slično kao u Zadatku 56, osim na xy–ravan, površ S se bijektivno projektuje i na yz–ravan u oblast

$$D_{yz}: \quad -\frac{z}{2a}\sqrt{4a^2-z^2} \le y \le \frac{z}{2a}\sqrt{4a^2-z^2}\ ,\ 0 \le z \le 2a\ ,$$

ali ovo projektovanje nije pogodno za rešavanje odgovarajućeg dvojnog integrala po oblasti D_{yz} (2° iz Napomene 4.3.2).

Teorema Ostrogradskog

Ako je D prosto povezana prostorna oblast i S njena granična površ, tada je

$$\iint_{S^+} P(x,y,z)\, dydz + Q(x,y,z)\, dzdx + R(x,y,z)\, dxdy$$
$$= \iiint_D \Big(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\Big)\, dxdydz\ .$$

71. Izračunati potpuni površinski integral II vrste

$$I = \iint_S \big(5x + y^2 - z^3\big)\, dydz + z^2\, dzdx + (y-z)\, dxdy\ ,$$

gde je

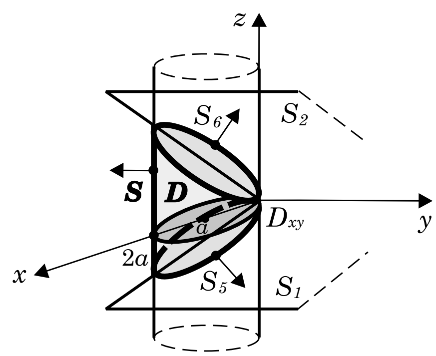
$$S: \quad \frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

cilindrična površ između ravni

$$S_1: \quad z = -x\ , \quad S_2: \quad z = x$$

i $a, b > 0$. Integracija se vrši po "spoljnoj" strani površi S.

Rešenje. Direktrisa cilindrične površi je elipsa L sa centrom u tački $(a, 0, 0)$ i poluosama a i b. Neka je S_3 deo površi S za $y \geq 0$ i S_4 deo za $y \leq 0$. Takođe, neka su S_5 i S_6 delovi ravni S_1 i S_2 redom, koji su unutar cilindrične površi. Na strane integracije su postavljeni normalni vektori.



Zadatak rešavamo na dva načina, prelaskom na površinski integral I vrste i primenom Teoreme Ostrogradskog.

Delovi S_3, S_4 se bijektivno projektuju na zx–ravan $(y = 0)$ u oblast

$$D_{zx}: \quad -x \leq z \leq x \ , \ 0 \leq x \leq 2a \ ,$$

a njihove jednačine su

$$S_{3,4}: \quad y = y_{3,4}(z, x) = \pm \frac{b}{a} \sqrt{2ax - x^2} \ ; \quad (z, x) \in D_{zx} \ .$$

Normalni vektor na S_3 zaklapa oštar ugao β_3, a normalni vektor na S_4 tup ugao β_4 sa pozitivnim delom y–ose. Zato je

$$\cos\alpha_3 = \frac{-q_3}{\sqrt{1 + p_3^2 + q_3^2}} \ , \ \cos\beta_3 = \frac{1}{\sqrt{1 + p_3^2 + q_3^2}} \ , \ \cos\gamma_3 = \frac{-p_3}{\sqrt{1 + p_3^2 + q_3^2}} \ ;$$
$$\cos\alpha_4 = \frac{q_4}{\sqrt{1 + p_4^2 + q_4^2}} \ , \ \cos\beta_4 = \frac{-1}{\sqrt{1 + p_4^2 + q_4^2}} \ , \ \cos\gamma_4 = \frac{p_4}{\sqrt{1 + p_4^2 + q_4^2}} \ .$$

Kako je

$$p_3 = \frac{\partial y_3}{\partial z} = 0 \ , \ q_3 = \frac{\partial y_3}{\partial x} = \frac{b}{a} \frac{a - x}{\sqrt{2ax - x^2}} \ ;$$
$$p_4 = \frac{\partial y_4}{\partial z} = 0 \ , \ q_4 = \frac{\partial y_4}{\partial x} = -\frac{b}{a} \frac{a - x}{\sqrt{2ax - x^2}} \ ,$$

to je

$$
\begin{aligned}
I_3 &= \iint_{S_3} \big(5x + y^2 - z^3\big)\, dydz + z^2\, dzdx + (y - z)\, dxdy \\
&= \iint_{S_3} \big[\big(5x + y^2 - z^3\big) \cos\alpha_3 + z^2 \cos\beta_3 + (y - z)\cos\gamma_3\big]\, d\sigma \\
&= \iint_{D_{zx}} \big[-q_3\big(5x + y_3^2(z,x) - z^3\big) + z^2 - p_3\big(y_3(z,x) - z\big)\big]\, dzdx \\
&= \iint_{D_{zx}} \big[-q_3\big(5x + y_3^2(z,x) - z^3\big) + z^2\big]\, dzdx\ , \\
I_4 &= \iint_{S_4} \big(5x + y^2 - z^3\big)\, dydz + z^2\, dzdx + (y - z)\, dxdy \\
&= \iint_{S_4} \big[\big(5x + y^2 - z^3\big) \cos\alpha_4 + z^2 \cos\beta_4 + (y - z)\cos\gamma_4\big]\, d\sigma \\
&= \iint_{D_{zx}} \big[q_4\big(5x + y_4^2(z,x) - z^3\big) - z^2 + p_4\big(y_4(z,x) - z\big)\big]\, dzdx \\
&= \iint_{D_{zx}} \big[q_4\big(5x + y_4^2(z,x) - z^3\big) - z^2\big]\, dzdx\ .
\end{aligned}
$$

Imajući u vidu $S = S_3 \cup S_4$, kao i $y_4(z,x) = -y_3(z,x)$, $q_4 = -q_3$, sabiranjem sledi

$$
\begin{aligned}
I = I_3 + I_4 &= 2 \iint_{D_{zx}} -q_3\big(5x + y_3^2(z,x) - z^3\big)\, dzdx \\
&= 2\frac{b}{a} \iint_{D_{zx}} \frac{x - a}{\sqrt{2ax - x^2}} \Big[5x + \frac{b^2}{a^2}\big(2ax - x^2\big) - z^3\Big]\, dzdx = 2\frac{b}{a}\big(J_1 + J_2\big)\ ,
\end{aligned}
$$

gde je

$$
\begin{aligned}
J_1 &= \iint_{D_{zx}} \frac{x - a}{\sqrt{2ax - x^2}} \Big[5x + \frac{b^2}{a^2}\big(2ax - x^2\big)\Big]\, dzdx\ , \\
J_2 &= -\iint_{D_{zx}} \frac{x - a}{\sqrt{2ax - x^2}}\, z^3\, dzdx\ .
\end{aligned}
$$

Rešavamo dvojni integral J_1 i dobijamo

$$
\begin{aligned}
J_1 &= \int_0^{2a} \frac{x - a}{\sqrt{2ax - x^2}} \Big[5x + \frac{b^2}{a^2}\big(2ax - x^2\big)\Big]\, dx \int_{-x}^{x} dz \\
&= 2\int_0^{2a} \frac{x(x - a)}{\sqrt{2ax - x^2}} \Big[5x + \frac{b^2}{a^2}\big(2ax - x^2\big)\Big]\, dx \\
&= 10\int_0^{2a} \frac{x^2(x - a)}{\sqrt{2ax - x^2}}\, dx + 2\frac{b^2}{a^2}\int_0^{2a} x(x - a)\sqrt{2ax - x^2}\, dx\ .
\end{aligned}
$$

U oba određena integrala uvodimo smenu

$$
x = a + a\sin t\ ,
$$

za koju je $t = -\pi/2$ kad je $x = 0$ i $t = \pi/2$ kad je $x = 2a$. Još je $2ax - x^2 = a^2 \cos^2 t$, $dx = a \cos t \, dt$, pa je

$$\begin{aligned} J_1 &= 40a^3 \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \, dt + 4a^2 b^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \sin^2 t \, dt \\ &= 10a^3 \pi + \frac{1}{4} \, a^2 b^2 \pi = \frac{1}{4} \, a^2 \big(40a + b^2\big) \pi \ . \end{aligned}$$

Zbog neparnosti podintegralne funkcije z^3 u unutrašnjem integralu, dvojni integral J_2 je

$$J_2 = -\int_0^{2a} \frac{x-a}{\sqrt{2ax - x^2}} \, dx \int_{-x}^{x} z^3 \, dz = 0 \ .$$

Tražena vrednost integrala I je

$$I = 2 \frac{b}{a} \, J_1 = \frac{1}{2} \, ab \big(40a + b^2\big) \pi \ .$$

Površ S smo rastavljali na delove S_3, S_4 jer se ona u celini ne projektuje bijektivno ni na jednu od koordinatnih ravni (3° iz Napomene 4.3.2). Prednost je što se S_3, S_4 projektuju na zx–ravan u istu oblast. Delovi površi S za $x \le a$ i $x \ge a$ se bijektivno projektuju na yz–ravan, ali u različite oblasti, komplikovanijeg opisa od D_{zx}, čime se umnogome komplikuje i rešavanje integrala.

Zadatak rešavamo na drugi način. Površ $S_7 = S \cup S_5 \cup S_6$ je zatvorena i ograničava prostornu oblast D. Inače, S_7 je cilindar sa bazisima S_5, S_6 i omotačem S (Napomena 3.1.1). Integracija se vrši po onim stranama površi S, S_5, S_6 koje odgovaraju spoljnoj strani površi S_7.

U integralu I je

$$P(x,y,z) = 5x + y^2 - z^3 \ , \ Q(x,y,z) = z^2 \ , \ R(x,y,z) = y - z \ ,$$

pa je

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 5 + 0 - 1 = 4 \ .$$

Funkcije $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$, $\partial P/\partial x$, $\partial Q/\partial y$, $\partial R/\partial z$ su neprekidne u oblasti D. Uslovi Teoreme Ostrogradskog su ispunjeni i njenom primenom sledi

$$I_7 = \iint_{S_7} \big(5x + y^2 - z^3\big) \, dydz + z^2 \, dzdx + (y - z) \, dxdy = 4 \iiint_D dxdydz \ .$$

Koristeći jednakost (3.3.21), dalje je

$$I_7 = 4 \iint_{D_{xy}} dxdy \int_{-x}^{x} dz = 8 \iint_{D_{xy}} x \, dxdy \ ,$$

gde je D_{xy} projekcija oblasti D na xy–ravan ($z = 0$). Kako je D_{xy} ograničena elipsom L, to je

$$D_{xy}: \quad \frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1 \ .$$

Uvodeći smenu

$$x = a + ar\cos\varphi \ , \ y = br\sin\varphi \ ,$$

za koju je $|J| = abr$, oblast D_{xy} se preslikava u

$$D^*_{xy}: \quad 0 \le r \le 1 \ , \ 0 \le \varphi \le 2\pi \ .$$

Zato je

$$I_7 = 8 \iint_{D^*_{xy}} abr(a + ar\cos\varphi)\, drd\varphi = 8a^2b \int_0^1 r\, dr \int_0^{2\pi} (1 + r\cos\varphi)\, d\varphi = 8a^2b\pi \ .$$

Površi S_5 i S_6 se bijektivno projektuju na xy–ravan u oblast D_{xy} i imaju jednačine

$$S_{5,6}: \quad z = z_{5,6}(x,y) = \mp x \ , \quad (x,y) \in D_{xy} \ .$$

Normalan vektor na S_5 zaklapa tup ugao γ_5, a normalan vektor na S_6 oštar ugao γ_6 sa pozitivnim delom z–ose i važi

$$\cos\alpha_5 = \frac{p_5}{\sqrt{1+p_5^2+q_5^2}} \ , \ \cos\beta_5 = \frac{q_5}{\sqrt{1+p_5^2+q_5^2}} \ , \ \cos\gamma_5 = \frac{-1}{\sqrt{1+p_5^2+q_5^2}} \ ;$$
$$\cos\alpha_6 = \frac{-p_6}{\sqrt{1+p_6^2+q_6^2}} \ , \ \cos\beta_6 = \frac{-q_6}{\sqrt{1+p_6^2+q_6^2}} \ , \ \cos\gamma_6 = \frac{1}{\sqrt{1+p_6^2+q_6^2}} \ .$$

Kako je

$$p_5 = \frac{\partial z_5}{\partial x} = -1 \ , \ q_5 = \frac{\partial z_5}{\partial y} = 0 \ ; \ p_6 = \frac{\partial z_6}{\partial x} = 1 \ , \ q_6 = \frac{\partial z_6}{\partial y} = 0 \ ,$$

to je

$$\begin{aligned}
I_5 &= \iint_{S_5} \big(5x + y^2 - z^3\big)\, dydz + z^2\, dzdx + (y - z)\, dxdy \\
&= \iint_{S_5} \big[\big(5x + y^2 - z^3\big)\cos\alpha_5 + z^2\cos\beta_5 + (y - z)\cos\gamma_5\big]\, d\sigma \\
&= \iint_{D_{xy}} \big[p_5\big(5x + y^2 - z_5^3(x,y)\big) + q_5 z_5^2(x,y) - \big(y - z_5(x,y)\big)\big]\, dxdy \\
&= -\iint_{D_{xy}} \big(x^3 + y^2 + 6x + y\big)\, dxdy \ , \\
I_6 &= \iint_{S_6} \big(5x + y^2 - z^3\big)\, dydz + z^2\, dzdx + (y - z)\, dxdy \\
&= \iint_{S_6} \big[\big(5x + y^2 - z^3\big)\cos\alpha_6 + z^2\cos\beta_6 + (y - z)\cos\gamma_6\big]\, d\sigma \\
&= \iint_{D_{xy}} \big[-p_6\big(5x + y^2 - z_6^3(x,y)\big) - q_6 z_6^2(x,y) + \big(y - z_6(x,y)\big)\big]\, dxdy \\
&= \iint_{D_{xy}} \big(x^3 - y^2 - 6x + y\big)\, dxdy
\end{aligned}$$

i sabiranjem

$$\begin{aligned} I_5+I_6 &= -2\iint_{D_{xy}} \big(y^2+6x\big)\,dxdy = -2ab\iint_{D^*_{xy}} r\big(b^2r^2\sin^2\varphi+6a+6ar\cos\varphi\big)\,drd\varphi \\ &= -2ab\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \big(b^2r^3\sin^2\varphi+6ar+6ar^2\cos\varphi\big)\,dr \\ &= -2ab\int_0^{2\pi} \Big(\frac{1}{4}\,b^2\sin^2\varphi+3a+2a\cos\varphi\Big)\,d\varphi = -\frac{1}{2}\,ab\big(24a+b^2\big)\pi\ . \end{aligned}$$

Zbog $S_7 = S\cup S_5\cup S_6$ važi

$$I = I_7-\big(I_5+I_6\big) = 8a^2b\pi+\frac{1}{2}\,ab\big(24a+b^2\big)\pi = \frac{1}{2}\,ab\big(40a+b^2\big)\pi\ .$$

Na sličan način, "zatvaranjem" otvorene površi integracije i primenom Teoreme Ostrogradskog, mogu da se reše i Zadaci 64, 65, 68, s tim što se zatvaranje u njima vrši delovima ravni koje su paralelne xy–koordinatnoj ravni, pa je rešavanje jednostavnije nego u ovom zadatku (2° iz Napomene 4.6.1). Isto tako, zbog pomenute paralelnosti, Zadaci 64, 65, 68 se jednostavnije rešavaju pomoću Teoreme Ostrogradskog nego prelaskom na površinski integral I vrste. U ovom zadatku nema značajne razlike između ta dva načina.

72. Izračunati potpuni površinski integral II vrste

$$I = \iint_S \frac{x^3}{a^2}\,dydz+\frac{y^3}{b^2}\,dzdx+\frac{z^3}{c^2}\,dxdy\ ,$$

gde je

$$S:\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

i $a,b,c>0$. Integracija se vrši po spoljnoj strani površi S.

Rešenje. Površ S je centralni elipsoid sa poluosama a, b, c (Slika 1.4.33). Neka je D prostorna oblast ograničena sa S.

U integralu I je

$$P(x,y,z)=\frac{x^3}{a^2}\ ,\ Q(x,y,z)=\frac{y^3}{b^2}\ ,\ R(x,y,z)=\frac{z^3}{c^2}\ ,$$

pa je

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z} = 3\Big(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\Big)\ .$$

Uslovi Teoreme Ostrogradskog su ispunjeni i važi

$$I = 3\iiint_D \Big(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\Big)\,dxdydz\ .$$

Uvođenjem uopštenih sfernih koordinata sa

$$x = ar\cos\varphi\cos\theta\ ,\ y = br\sin\varphi\cos\theta\ ,\ z = cr\sin\theta\ ,$$

za koje je $|J| = abcr^2 \cos\theta$, oblast D prelazi u

$$D^* : \quad 0 \le r \le 1 \ , \ 0 \le \varphi \le 2\pi \ , \ -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

i integral I postaje

$$I = 3abc \iiint_{D^*} r^4 \cos\theta \, drd\varphi d\theta = 3abc \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^4 \, dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta \, d\theta = \frac{12}{5} \, abc\pi \ .$$

Ako bi se integral I rešavao prelaskom na površinski I vrste, elipsoid S bi morao da se deli na dva dela, pa bi taj način rešavanja bio komplikovaniji (1° iz Napomene 4.6.1).

Primetimo da Zadatak 66, u kome je površ integracije S takođe zatvorena (sfera), ne može da se reši pomoću Teoreme Ostrogradskog. Uzrok je u tome što funkcije $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$, $\partial P/\partial x$, $\partial Q/\partial y$, $\partial R/\partial z$, kao i cela podintegralna funkcija odgovarajućeg trojnog integrala nisu definisane u tački $(0, 0, 0)$, koja pripada prostornoj oblasti ograničenoj sa S.

$\boxed{\textbf{73}}$. Izračunati potpuni površinski integral II vrste

$$I = \iint_S x \, dydz + 2y \, dzdx + z \, dxdy \ ,$$

gde je S zatvorena površ sastavljena od delova paraboloida

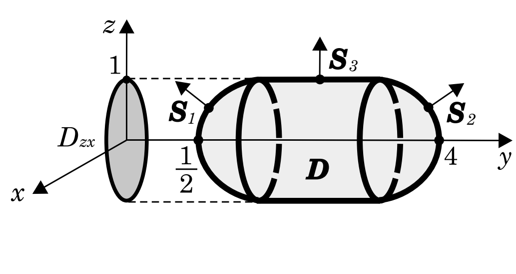
$$S_1 : \quad 2y - 1 = 2\big(x^2 + z^2\big) \ , \quad S_2 : \quad 4 - y = x^2 + z^2$$

koji su unutar cilindrične površi

$$S_3 : \quad x^2 + z^2 = 1$$

i dela površi S_3 između S_1 i S_2. Integracija se vrši po spoljnoj strani površi S.

Rešenje. Paraboloidi S_1, S_2 imaju y–osu za osovinu, a cilindrična površ S_3 ima izvodnice paralelne y–osi i kružnicu u zx–ravni za direktrisu. Radi jednostavnosti, delove ovih površi, koji formiraju površ S, označimo isto sa S_1, S_2, S_3. Površ S je cilindar sa bazisima S_1, S_2 i omotačem S_3. Na strane delova koje odgovaraju spoljnoj strani cilindra su postavljeni normalni vektori. Neka je D prostorna oblast ograničena sa S.



U integralu I je

$$P(x,y,z) = x \ , \ Q(x,y,z) = 2y \ , \ R(x,y,z) = z \ ,$$

pa je

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 4 \ .$$

Uslovi Teoreme Ostrogradskog su ispunjeni i važi

$$I = 4 \iiint_D dxdydz \ .$$

Projekcija oblasti D na zx–ravan ($y = 0$) je krug

$$D_{zx}: \quad x^2 + z^2 \le 1 \ .$$

Uvođenjem cilindričnih koordinata sa

$$z = r\cos\varphi \ , \ x = r\sin\varphi \ , \ y = y \ ,$$

za koje je $|J| = r$, oblast D_{zx} i površi S_1, S_2 se preslikavaju u

$$\begin{aligned} &D^*_{zx}: \quad 0 \le r \le 1 \ , \ 0 \le \varphi \le 2\pi \ , \\ &S^*_1: \quad y = r^2 + \frac{1}{2} \ , \quad S^*_2: \quad y = 4 - r^2 \ , \end{aligned}$$

pa se oblast D preslikava u

$$D^*: \quad 0 \le r \le 1 \ , \ 0 \le \varphi \le 2\pi \ , \ r^2 + \frac{1}{2} \le y \le 4 - r^2$$

i trojni integral postaje

$$I = 4 \iiint_{D^*} r\, dr d\varphi dy = 4 \int_0^1 r\, dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{r^2+1/2}^{4-r^2} dy = 4\pi \int_0^1 \left(7r - 4r^3\right) dr = 10\pi \ .$$

Površ S se sastoji od delova sa različitom parametrizacijom, pa bi izračunavanje integrala I prelaskom na površinski I vrste zahtevalo rešavanje bar četiri površinska umesto jednog trojnog integrala. Preciznije, delove S_1 i S_2 treba projektovati na zx–ravan, a deo S_3 na xy ili yz–ravan, s tim što S_3 mora da se deli na dva bijektivna dela (3°, 4° iz Napomene 4.3.2). Prednost Teoreme Ostrogradskog je u ovom slučaju očigledna (1° iz Napomene 4.6.1).

Slična je situacija i u Zadacima 67, 69.

74. Izračunati potpuni površinski integral II vrste

$$I = \iint_S bx^2\, dydz + ay^2\, dzdx + abz^2\, dxdy \ ,$$

gde je S zatvorena površ sastavljena od delova površi

$$S_1 : \quad \left(\frac{x}{a}+z\right)^2+\left(\frac{y}{b}+z\right)^2=\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+z\right)^2 , \qquad S_2 : \quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+z=1$$

i $a,b>0$. Integracija se vrši po spoljnoj strani površi S.

Rešenje. Za

$$P(x,y,z)=bx^2 \ , \ Q(x,y,z)=ay^2 \ , \ R(x,y,z)=abz^2$$

je

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=2(bx+ay+abz)$$

i primenom Teoreme Ostrogradskog sledi

$$I=2\iiint_D (bx+ay+abz)\,dxdydz=2ab\iiint_D \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+z\right)dxdydz \ ,$$

gde je D prostorna oblast ograničena sa S.

Uvodimo smenu

$$u=\frac{x}{a}+z \ , \ v=\frac{y}{b}+z \ , \ w=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+z \ ,$$

iz koje je

$$x=a(w-v) \ , \ y=b(w-u) \ , \ z=u+v-w \ .$$

Slično kao u Zadatku 38 određujemo $|J(u,v,w)|=ab$. Površi S_1 i S_2 se transformišu u

$$S_1^* : \quad u^2+v^2=w^2 \ , \quad S_2^* : \quad w=1 \ .$$

U uvw–sistemu je S_1^* konus, S_2^* ravan paralelna uv–ravni, a D^* oblast ograničena sa S_1^* i S_2^*. Za sve tačke iz D^* važi $w\ge 0$. Uvodimo cilindrične koordinate sa

$$u=r\cos\varphi \ , \ v=r\sin\varphi \ , \ w=w$$

i dobijamo $|J(r,\varphi,w)|=r$ i

$$S_1^{**} : \quad w=r \ , \quad S_2^{**} : \quad w=1 \ .$$

Projekcija oblasti D^* na uv–ravan je krug $u^2+v^2\le 1$, pa je nova oblast D^{**} opisana sa

$$D^{**} : \quad 0\le r\le 1 \ , \ 0\le\varphi\le 2\pi \ , \ r\le w\le 1 \ .$$

Za integral I se dobija

$$\begin{aligned} I &= 2a^2b^2\iiint_{D^*} w\,dudvdw = 2a^2b^2\iiint_{D^{**}} rw\,drd\varphi dw \\ &= 2a^2b^2\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^1 r\,dr\int_r^1 w\,dw = 2a^2b^2\pi\int_0^1 r\left(1-r^2\right)dr=\frac{1}{2}\,a^2b^2\pi \ . \end{aligned}$$

Da bi se integral I rešavao kao površinski, mora da se rastavi na integrale po površima S_1 i S_2. Integral po površi S_2 se lako rešava jer je S_2 ravan. Međutim, za rešavanje integrala po površi S_1 je potrebno prethodno izvršiti adekvatnu parametrizaciju površi, uključujući i nalaženje njene oblasti definisanosti, što nije jednostavno s obzirom na neprepoznatljivost površi u xyz–sistemu. Ako se tome pridoda i rešavanje samog površinskog integrala, ovaj postupak je toliko komplikovan da je neupotrebljiv.

$\boxed{\textbf{75.}}$ Izračunati potpuni površinski integral II vrste

$$I = \iint_S \left(x - z^2\right) dydz + \left(y + x^2\right) dzdx - \left(z + y^2\right) dxdy \ ,$$

gde je S zatvorena površ

$$S: \quad \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2 = a^2\left(x^2 + y^2 - z^2\right)$$

i $a > 0$. Integracija se vrši po spoljnoj strani površi S.

Rešenje. Kako je

$$P(x,y,z) = x - z^2 \ , \ Q(x,y,z) = y + x^2 \ , \ R(x,y,z) = -\left(z + y^2\right) \ ,$$

to je

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 1$$

i prema Teoremi Ostrogradskog

$$I = \iiint_D dxdydz \ ,$$

gde je D prostorna oblast ograničena sa S.

Uvođenjem sfernih koordinata r, φ, θ, za koje je $|J| = r^2\cos\theta$, površ S se preslikava u

$$S^*: \quad r = a\sqrt{\cos 2\theta} \ .$$

Površ S^* je definisana za $\theta \in [-\pi/4, \pi/4]$ i $\varphi \in [0, 2\pi]$. Kako je tačka $(0,0,0) \in S$, tj. $(0,0,0) \in D$, oblast D prelazi u

$$D^*: \quad 0 \le r \le a\sqrt{\cos 2\theta} \ , \ 0 \le \varphi \le 2\pi \ , \ -\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4} \ .$$

Za integral I se dobija

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{D^*} r^2\cos\theta \, drd\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos\theta \, d\theta \int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} r^2 \, dr \\ &= \frac{4}{3}\, a^3\pi \int_0^{\pi/4} \cos\theta\cos 2\theta\sqrt{\cos 2\theta} \ d\theta = \frac{4}{3}\, a^3\pi \int_0^{\pi/4} \cos\theta\left(1 - 2\sin^2\theta\right)\sqrt{1 - 2\sin^2\theta} \ d\theta \ . \end{aligned}$$

Poslednji određeni integral se rešava smenom

$$\sqrt{2}\sin\theta = \sin t \ ,$$

za koju je $t = 0$ kad je $\theta = 0$ i $t = \pi/2$ kad je $\theta = \pi/4$. Još je $1 - 2\sin^2\theta = \cos^2 t$ i $\sqrt{2}\cos\theta\, d\theta = \cos t\, dt$. Korišćenjem rezultata iz Zadatka 10, konačno je

$$I = \frac{4}{3\sqrt{2}}\, a^3\pi \int_0^{\pi/2} \cos^4 t\, dt = \frac{1}{4\sqrt{2}}\, a^3\pi^2 \ .$$

Komentar iz Zadatka 74 važi i u ovom slučaju.

$\boxed{\textbf{76}}$. Izračunati potpuni površinski integral II vrste

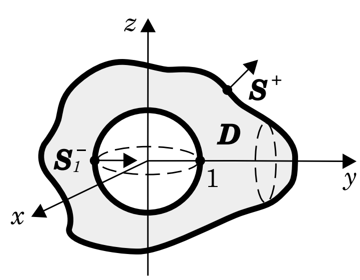
$$I = \iint_S \frac{x\, dydz + y\, dzdx + z\, dxdy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} \ ,$$

gde je S zatvorena površ koja je spoljna granica dvostruko povezane prostorne oblasti, čija je unutrašnja granica sfera

$$S_1 : \quad x^2+y^2+z^2 = 1 \ .$$

Integracija se vrši po spoljnoj strani površi S.

Rešenje. Neka je D prostorna oblast ograničena sa S i S_1. Za stranu integracije sfere S_1 biramo njenu unutrašnju stranu. Na strane integracije površi S i S_1 su postavljeni normalni vektori.



U integralu I je

$$P(x,y,z) = \frac{x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} \ , \ Q(x,y,z) = \frac{y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} \ ,$$
$$R(x,y,z) = \frac{z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} \ ,$$

pa je

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\left(-2x^2+y^2+z^2\right) + \left(x^2-2y^2+z^2\right) + \left(x^2+y^2-2z^2\right)}{x^2+y^2+z^2} = 0 \ .$$

Kako $(0,0,0) \notin D$, funkcije $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$, $\partial P/\partial x$, $\partial Q/\partial y$, $\partial R/\partial z$ su neprekidne u oblasti D. Uslovi Teoreme 4.6.2 su ispunjeni i sledi

$$\begin{aligned}
&\iint_{S^+} \frac{x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} + \iint_{S_1^-} \frac{x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} \\
&= \iiint_D \Big(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\Big)\, dxdydz = 0\ .
\end{aligned}$$

Izostavljajući podintegralni izraz, odavde je

$$I = \iint_{S^+} = -\iint_{S_1^-} = \iint_{S_1^+}\ ,$$

pri čemu su sa S^+ i S_1^+ označene spoljne strane površi S i S_1, a sa S_1^- unutrašnja strana površi S_1.

Neka je $S_1 = S_2 \cup S_3$, gde je S_2 deo za $z \geq 0$, a S_3 deo za $z \leq 0$. Oba dela se projektuju na xy–ravan $(z=0)$ u istu oblast

$$D_{xy}: \quad x^2+y^2 \leq 1$$

i imaju jednačine

$$S_{2,3}: \quad z = z_{2,3}(x,y) = \pm\sqrt{1-x^2-y^2}\ .$$

Normalni vektor na S_2 zaklapa oštar ugao γ_2, a normalni vektor na S_3 tup ugao γ_3 sa pozitivnim delom z–ose, pa je

$$\begin{aligned}
&\cos\alpha_2 = \frac{-p_2}{\sqrt{1+p_2^2+q_2^2}}\ ,\ \cos\beta_2 = \frac{-q_2}{\sqrt{1+p_2^2+q_2^2}}\ ,\ \cos\gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{1+p_2^2+q_2^2}}\ ;\\
&\cos\alpha_3 = \frac{p_3}{\sqrt{1+p_3^2+q_3^2}}\ ,\ \cos\beta_3 = \frac{q_3}{\sqrt{1+p_3^2+q_3^2}}\ ,\ \cos\gamma_3 = \frac{-1}{\sqrt{1+p_3^2+q_3^2}}\ .
\end{aligned}$$

Još je

$$\begin{aligned}
&p_2 = \frac{\partial z_2}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\ ,\ q_2 = \frac{\partial z_2}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\ ;\\
&p_3 = \frac{\partial z_3}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\ ,\ q_3 = \frac{\partial z_3}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}
\end{aligned}$$

i važi

$$\begin{aligned}
I &= \iint_{S_2} \frac{x\cos\alpha_2 + y\cos\beta_2 + z\cos\gamma_2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\, d\sigma + \iint_{S_3} \frac{x\cos\alpha_3 + y\cos\beta_3 + z\cos\gamma_3}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\, d\sigma \\
&= \iint_{D_{xy}} \frac{-xp_2 - yq_2 + z_2(x,y)}{\left(x^2+y^2+z_2^2(x,y)\right)^{3/2}}\, dxdy + \iint_{D_{xy}} \frac{xp_3 + yq_3 - z_3(x,y)}{\left(x^2+y^2+z_3^2(x,y)\right)^{3/2}}\, dxdy \\
&= 2\iint_{D_{xy}} \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\ .
\end{aligned}$$

Uvođenjem polarnih koordinata u xy–ravni sledi

$$D_{xy}^*: \quad 0 \leq r \leq 1\ ,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

i za integral I se dobija

$$I = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\, dr = 4\pi \ .$$

Pošto je površ S proizvoljna, površinski integral ima istu vrednost $I = 4\pi$ po svakoj zatvorenoj površi za koju je $(0,0,0) \in \operatorname{int} S$. Ukoliko $(0,0,0) \notin S \cup \operatorname{int} S$, prema Teoremi Ostrogradskog je $I = 0$. Dakle, I ne zavisi od oblika površi S, već samo od njenog položaja u prostoru, tj. od navedenog uslova.

$\boxed{\textbf{77.}}$ Izračunati potpuni površinski integral II vrste

$$I = \iint_S \frac{(y+z)\,dydz + (z-x)\,dzdx - (x+y)\,dxdy}{x^2+y^2+z^2} \ ,$$

gde je S zatvorena površ koja je spoljna granica dvostruko povezane prostorne oblasti, čija je unutrašnja granica zatvorena površ S_1. Površ S_1 je sastavljena od delova ravni

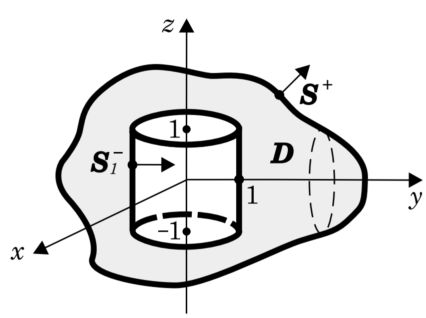
$$S_2: \quad z = -1 \ , \quad S_3: \quad z = 1$$

koji su unutar cilindrične površi

$$S_4: \quad x^2 + y^2 = 1$$

i dela površi S_4 između ravni S_2 i S_3. Integracija se vrši po spoljnoj strani površi S.

Rešenje. Ravni S_2, S_3 su paralelne xy–ravni, a cilindrična površ S_4 ima izvodnice paralelne z–osi i kružnicu u xy–ravni za direktrisu. Radi jednostavnosti, delove ovih površi, koji ulaze u sastav površi S_1, označimo isto sa S_2, S_3, S_4. Dakle, S_1 je cilindar sa bazisima S_2, S_3 i omotačem S_4. Za stranu integracije biramo unutrašnju stranu cilindra. Normalni vektori su postavljeni na strane integracije površi S i S_1. Neka je D prostorna oblast ograničena sa S i S_1.



U integralu I je

$$P(x,y,z) = \frac{y+z}{x^2+y^2+z^2} \ , \ Q(x,y,z) = \frac{z-x}{x^2+y^2+z^2} \ , \ R(x,y,z) = \frac{-(x+y)}{x^2+y^2+z^2} \ ,$$

pa je

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{-2x(y+z) - 2y(z-x) + 2z(x+y)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2} = 0 \ .$$

Kako $(0,0,0) \notin D$, funkcije $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$, $\partial P/\partial x$, $\partial Q/\partial y$, $\partial R/\partial z$ su neprekidne u oblasti D. Uslovi Teoreme 4.6.2 su ispunjeni i sledi

$$\begin{aligned}
&\iint_{S^+} \frac{(y+z)\,dydz + (z-x)\,dzdx - (x+y)\,dxdy}{x^2+y^2+z^2} \\
&+ \iint_{S_1^-} \frac{(y+z)\,dydz + (z-x)\,dzdx - (x+y)\,dxdy}{x^2+y^2+z^2} \\
&= \iiint_D \Big(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \Big)\, dxdydz = 0 \ .
\end{aligned}$$

Izostavljajući podintegralni izraz, odavde je

$$I = \iint_{S^+} = -\iint_{S_1^-} = \iint_{S_1^+} \ ,$$

pri čemu su sa S^+ i S_1^+ označene spoljne strane površi S i S_1, a sa S_1^- unutrašnja strana površi S_1.

Neka je $S_4 = S_5 \cup S_6$, gde je S_5 deo za $x \geq 0$, a S_6 deo za $x \leq 0$. Tada je $S_1 = S_2 \cup S_3 \cup S_5 \cup S_6$ i

$$I = I_2 + I_3 + I_5 + I_6 \ .$$

Integrali I_2, I_3, I_5, I_6 su površinski po površima S_2, S_3, S_5, S_6 redom sa podintegralnim izrazom kao u integralu I.

Površi S_2, S_3 se bijektivno projektuju na xy–ravan $(z = 0)$ u istu oblast

$$D_{xy}: \quad x^2 + y^2 \leq 1$$

i imaju jednačine

$$S_{2,3}: \quad z = z_{2,3}(x,y) = \mp 1 \ .$$

Jedinični normalni vektori na strane površi S_2, S_3, koje odgovaraju spoljnoj strani površi S_1, su jedinični vektori sa z–ose

$$\mp \vec{k} = (0,0,\mp 1) \ .$$

Zato je

$$\cos\alpha_2 = 0 \ , \ \cos\beta_2 = 0 \ , \ \cos\gamma_2 = -1 \ ; \ \cos\alpha_3 = 0 \ , \ \cos\beta_3 = 0 \ , \ \cos\gamma_3 = 1$$

i, zbog $z_2^2 = z_3^2 = 1$, važi

$$\begin{aligned}
I_2 + I_3 &= \iint_{S_2} \frac{(y+z)\cos\alpha_2 + (z-x)\cos\beta_2 - (x+y)\cos\gamma_2}{x^2+y^2+z^2}\, d\sigma \\
&+ \iint_{S_3} \frac{(y+z)\cos\alpha_3 + (z-x)\cos\beta_3 - (x+y)\cos\gamma_3}{x^2+y^2+z^2}\, d\sigma \\
&= \iint_{D_{xy}} \frac{x+y}{x^2+y^2+z_2^2}\, dxdy - \iint_{D_{xy}} \frac{x+y}{x^2+y^2+z_3^2}\, dxdy = 0 \ .
\end{aligned}$$

Površi S_5, S_6 se bijektivno projektuju na yz–ravan ($x=0$) u istu oblast

$$D_{yz}: \quad -1 \le y \le 1 \ , \ -1 \le z \le 1$$

i imaju jednačine

$$S_{5,6}: \quad x = x_{5,6}(y,z) = \pm\sqrt{1-y^2} \ .$$

Normalni vektor na S_5 zaklapa oštar ugao α_5, a normalni vektor na S_6 tup ugao α_6 sa pozitivnim delom x–ose, pa je

$$\begin{aligned}
\cos\alpha_5 &= \frac{1}{\sqrt{1+p_5^2+q_5^2}} \ , \ \cos\beta_5 = \frac{-p_5}{\sqrt{1+p_5^2+q_5^2}} \ , \ \cos\gamma_5 = \frac{-q_5}{\sqrt{1+p_5^2+q_5^2}} \ ; \\
\cos\alpha_6 &= \frac{-1}{\sqrt{1+p_6^2+q_6^2}} \ , \ \cos\beta_6 = \frac{p_6}{\sqrt{1+p_6^2+q_6^2}} \ , \ \cos\gamma_6 = \frac{q_6}{\sqrt{1+p_6^2+q_6^2}} \ .
\end{aligned}$$

Još je

$$p_5 = \frac{\partial x_5}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{1-y^2}} \ , \ q_5 = \frac{\partial x_5}{\partial z} = 0 \ ; \ p_6 = \frac{\partial x_6}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \ , \ q_6 = \frac{\partial x_6}{\partial z} = 0$$

i važi

$$\begin{aligned}
I_5 + I_6 &= \iint_{S_5} \frac{(y+z)\cos\alpha_5 + (z-x)\cos\beta_5 - (x+y)\cos\gamma_5}{x^2+y^2+z^2}\, d\sigma \\
&+ \iint_{S_6} \frac{(y+z)\cos\alpha_6 + (z-x)\cos\beta_6 - (x+y)\cos\gamma_6}{x^2+y^2+z^2}\, d\sigma \\
&= \iint_{D_{yz}} \frac{y+z-(z-x_5)p_5 + (x_5+y)q_5}{x_5^2+y^2+z^2}\, dydz \\
&+ \iint_{D_{yz}} \frac{-(y+z)+(z-x_6)p_6 - (x_6+y)q_6}{x_6^2+y^2+z^2}\, dydz \\
&= 2\iint_{D_{yz}} \frac{yz}{\left(1+z^2\right)\sqrt{1-y^2}}\, dydz = 2\int_{-1}^{1} \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\, dy \int_{-1}^{1} \frac{z}{1+z^2} = 0 \ ,
\end{aligned}$$

pri čemu je

$$\int_{-1}^{1} \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\, dy = 0 \ , \ \int_{-1}^{1} \frac{z}{1+z^2} = 0$$

zbog neparnosti podintegralnih funkcija i simetričnih segmenata integracije.

Pošto je površ S proizvoljna, površinski integral ima istu vrednost

$$I = I_2 + I_3 + I_5 + I_6 = 0$$

po svakoj zatvorenoj površi za koju je $(0,0,0) \in \operatorname{int} S$. Ukoliko $(0,0,0) \notin S \cup \operatorname{int} S$, prema Teoremi Ostrogradskog je takođe $I = 0$. Za razliku od Zadatka 76, u ovom slučaju I ne zavisi ni od oblika površi S, ni od njenog položaja u prostoru.

Stokesova teorema

Ako je S prostorna površ i L njena saglasno orijentisana kontura, tada je

$$\oint_L P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$$
$$= \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P(x,y,z) & Q(x,y,z) & R(x,y,z) \end{vmatrix} d\sigma \ .$$

$\boxed{\textbf{78.}}$ Izračunati potpuni krivolinijski integral II vrste

$$I = \oint_L y\,dx + x^2\,dy + z\,dz \ ,$$

gde je kriva L presek površi

$$S_1 : \quad x^2 + y^2 = 2(x+y) \ , \quad S_2 : \quad z = x^2 + y^2 \ .$$

Posmatrano sa pozitivnog dela z–ose, L je pozitivno orijentisana.

Rešenje. Površ S_1 je cilindrična sa izvodnicama paralelnim z–osi, a S_2 je paraboloid sa z–osom kao osovinom. Direktrisa površi S_1 je istovremeno projekcija krive L na xy–ravan

$$L_{xy} : \quad (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2 \ , \ z = 0 \ .$$

Slika za ovaj zadatak bi bila ista kao slika iz Zadatka 13 ako bi se umesto konusa uzeo paraboloid. Neka je S deo paraboloida S_2 ograničen sa L. Za zadatu orijentaciju krive L saglasno je orijentisana strana površi S koja se vidi sa pozitivnog dela z–ose (Slika 1.2.25 i komentar uz nju).

U integralu I je

$$P(x,y,z) = y \ , \ Q(x,y,z) = x^2 \ , \ R(x,y,z) = z \ ,$$

pa je

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y & x^2 & z \end{vmatrix} = (2x-1)\cos\gamma \ .$$

Funkcije $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ i njihovi odgovarajući parcijalni izvodi su neprekidni na površi S. Uslovi Stokesove teoreme su ispunjeni i njenom primenom sledi

$$I = \iint_S (2x-1)\cos\gamma\,d\sigma \ .$$

Površ S se bijektivno projektuje na xy–ravan ($z = 0$) u krug D_{xy} ograničen sa L_{xy} (1° iz Napomene 4.3.2), a jednačina površi S je

$$S: \quad z = z(x, y) = x^2 + y^2 \ ; \quad (x, y) \in D_{xy} \ .$$

Normalni vektor na stranu integracije površi S zaklapa oštar ugao γ sa pozitivnim delom z–ose. Zato je

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

i integral I postaje dvojni

$$I = \iint_{D_{xy}} (2x - 1)\, dxdy \ .$$

Pomoću smene

$$x = 1 + r\cos\varphi \ , \ y = 1 + r\sin\varphi \ ,$$

za koju je $|J| = r$, oblast D_{xy} se preslikava u

$$D^*_{xy}: \quad 0 \le r \le \sqrt{2} \ , \ 0 \le \varphi \le 2\pi \ ,$$

pa je dalje

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D^*_{xy}} r(2r\cos\varphi + 1)\, drd\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \big(2r^2\cos\varphi + r\big)\, dr \\ &= \int_0^{2\pi} \Big(\frac{4\sqrt{2}}{3}\cos\varphi + 1\Big)\, d\varphi = 2\pi \ . \end{aligned}$$

Koliko je direktno rešavanje krivolinijskog integrala teže, ostavljamo čitaocu da se sam uveri.

$\boxed{\textbf{79.}}$ Izračunati potpuni krivolinijski integral II vrste

$$I = \oint_L (y + z)\, dx + (z - x)\, dy + (x + y)\, dz \ ,$$

gde je kriva L presek površi

$$S_1: \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4x \ , \quad S_2: \quad x^2 + y^2 = 2x$$

za $z \ge 0$. Posmatrano sa pozitivnog dela z–ose, L je pozitivno orijentisana.

Rešenje. Površi S_1, S_2, kriva L, deo S sfere S_1 koji je ograničen sa L i odgovarajuća slika su isti kao u Zadatku 70 za $a = 1$. Zadatoj orijentaciji krive L odgovara (saglasno je orijentisana) strana površi S koja se vidi sa pozitivnog dela z–ose. To je strana na koju je postavljen normalni vektor u Zadatku 70.

U integralu I je

$$P(x, y, z) = y + z \ , \ Q(x, y, z) = z - x \ , \ R(x, y, z) = x + y \ ,$$

pa je

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y+z & z-x & x+y \end{vmatrix} = -2\cos\gamma \ .$$

Uslovi Stokesove teoreme su ispunjeni i sledi

$$I = -2 \iint_S \cos\gamma \, d\sigma \ .$$

Koristeći činjenicu da se površ S bijektivno projektuje na xy–ravan u krug D_{xy}, kao i ostale rezultate iz Zadatka 70, za integral I se dobija

$$I = -2 \iint_{D_{xy}} dxdy = -2d = -2\pi \ ,$$

gde je $d = R^2\pi = \pi$ površina kruga D_{xy} poluprečnika $R = 1$.

80. Izračunati potpuni krivolinijski integral II vrste

$$I = \oint_L y^2\, dx - x^2\, dy + z^2\, dz \ ,$$

gde je kriva L presek površi

$$S: \quad x^2 + y + z^2 = 1$$

sa koordinatnim ravnima za $x, y, z \geq 0$. Posmatrano sa pozitivnog dela x–ose, L je pozitivno orijentisana.

Rešenje. Isti integral je već rešen direktno u Zadatku 11. Sada ga rešavamo primenom Stokesove teoreme. Radi jednostavnosti, za deo površi S u I oktantu, koji je ograničen sa L, koristimo istu oznaku S. Zadatoj orijentaciji krive L odgovara strana površi S koja se vidi sa pozitivnih delova svih koordinatnih osa.

U integralu I je

$$P(x,y,z) = y^2 \ , \ Q(x,y,z) = -x^2 \ , \ R(x,y,z) = z^2 \ ,$$

pa je

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y^2 & -x^2 & z^2 \end{vmatrix} = -2(x+y)\cos\gamma \ .$$

Uslovi Stokesove teoreme su ispunjeni i sledi

$$I = -2 \iint_S (x+y)\cos\gamma \, d\sigma \ .$$

Površ S se bijektivno projektuje na sve koordinatne ravni (2° iz Napomene 4.3.2). Biramo, npr., xy–ravan ($z = 0$). Koristeći rezultate iz Zadatka 11, utvrđujemo da je projekcija oblast

$$D_{xy}: \quad 0 \leq x \leq 1 \ , \ 0 \leq y \leq 1 - x^2 \ .$$

Normalni vektor na stranu integracije površi S zaklapa oštar ugao γ sa pozitivnim delom z–ose i integral I postaje

$$I = -2\iint_{D_{xy}} (x+y)\,dxdy = -2\int_0^1 dx \int_0^{1-x^2} (x+y)\,dy$$
$$= -2\int_0^1 \Big(\frac{1}{2} + x - x^2 - x^3 + \frac{1}{2}\,x^4\Big)\,dx = -\frac{31}{30}\ .$$

Na osnovu Zadatka 11 vidimo da je direktno rešavanje krivolinijskog integrala teže jer zahteva deobu krive L na tri dela.

$\boxed{\textbf{81.}}$ Izračunati potpuni krivolinijski integral II vrste

$$I = \oint_L (y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz\ ,$$

gde je kriva L presek površi

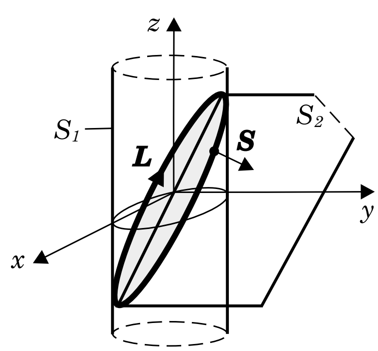
$$S_1:\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}\ ,\qquad S_2:\quad \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 1$$

za $a, b, c > 0$. Posmatrano sa pozitivnog dela z–ose, L je negativno orijentisana.

Rešenje. Površ S_1 je cilindrična sa izvodnicama paralelnim z–osi, a S_2 je ravan paralelna y–osi. Direktrisa površi S_1 je i projekcija krive L na xy–ravan (3° iz Napomene 2.3.5), a to je elipsa

$$L_{xy}:\quad \frac{\Big(x-\dfrac{a}{2}\Big)^2}{\Big(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\Big)^2} + \frac{\Big(y-\dfrac{b}{2}\Big)^2}{\Big(\dfrac{b}{\sqrt{2}}\Big)^2} = 1\ .$$

Neka je S deo ravni S_2 ograničen sa L. Zadatoj orijentaciji krive L odgovara strana površi S koja se vidi sa negativnog dela z–ose. Na ovu stranu je postavljen normalni vektor.



Kako je

$$P(x,y,z) = y - z\ ,\ Q(x,y,z) = z - x\ ,\ R(x,y,z) = x - y\ ,$$

to je

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y-z & z-x & x-y \end{vmatrix} = -2(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)$$

i primenom Stokesove teoreme sledi

$$I = -2\iint_S (\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)\,d\sigma \ .$$

Površ S se bijektivno projektuje na xy–ravan ($z=0$) u oblast D_{xy} ograničenu sa L_{xy} (Napomena 4.3.1), a njena jednačina je

$$S: \quad z = z(x,y) = c - \frac{c}{a}\,x \ ; \quad (x,y)\in D_{xy} \ .$$

Normalni vektor na stranu integracije zaklapa tup ugao γ sa pozitivnim delom z–ose, pa je

$$\cos\alpha = \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \ , \ \cos\beta = \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = 0 \ , \ \cos\gamma = \frac{-1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \ ,$$

gde je

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{c}{a} \ , \ q = \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \ .$$

Integral I prelazi u dvojni

$$I = -2\iint_{D_{xy}} (p+q-1)\,dxdy = 2\frac{a+c}{a}\iint_{D_{xy}} dxdy \ .$$

Uvodeći smenu

$$x = \frac{a}{2} + \frac{a}{\sqrt{2}}\,r\cos\varphi \ , \ y = \frac{b}{2} + \frac{b}{\sqrt{2}}\,r\sin\varphi \ ,$$

za koju je $|J| = abr/2$, oblast D_{xy} se transformiše u

$$D^*_{xy}: \quad 0\le r\le 1 \ , \ 0\le\varphi\le 2\pi$$

i dobija se

$$I = 2\frac{a+c}{a}\iint_{D^*_{xy}} \frac{ab}{2}\,r\,drd\varphi = (a+c)b\int_0^1 r\,dr\int_0^{2\pi} d\varphi = (a+c)b\pi \ .$$

82. Izračunati potpuni krivolinijski integral II vrste

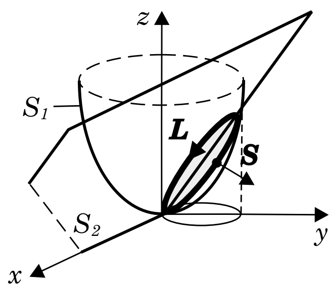
$$I = \oint_L y^2\,dx + z^2\,dy + z^2\,dz \ ,$$

gde je kriva L presek površi

$$S_1: \quad z = x^2+y^2 \ , \quad S_2: \quad z = 2y \ .$$

Posmatrano sa pozitivnog dela z–ose, L je negativno orijentisana.

Rešenje. Površ S_1 je paraboloid sa z–osom kao osovinom, a S_2 je ravan koja prolazi kroz x–osu i seče yz–ravan duž prave $z = 2y$, $x = 0$. Ako je S deo ravni S_2 ograničen sa L, orijentaciji krive L odgovara strana površi S na koju je postavljen normalni vektor.



Nalazimo

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y^2 & z^2 & z^2 \end{vmatrix} = -2(z\cos\alpha + y\cos\gamma)$$

i dobijamo

$$I = -2\iint_S (z\cos\alpha + y\cos\gamma)\,d\sigma\ .$$

Eliminacijom z iz jednačina površi S_1 i S_2 sledi jednačina projekcije krive L na xy–ravan

$$L_{xy}:\quad x^2 + (y-1)^2 = 1\ ,\ z = 0\ ,$$

pa se S projektuje na krug D_{xy} ograničen sa L_{xy}. Jednačina površi S je

$$S:\quad z = z(x,y) = 2y\ ;\quad (x,y) \in D_{xy}\ .$$

Normalni vektor na stranu integracije zaklapa tup ugao γ sa pozitivnim delom z–ose. Kako je $p = \partial z/\partial x = 0$, dalje je

$$I = -2\iint_{D_{xy}} (2yp - y)\,dxdy = 2\iint_{D_{xy}} y\,dxdy\ .$$

Smenom

$$x = r\cos\varphi\ ,\ y = 1 + r\sin\varphi\ ,$$

za koju je $|J| = r$, D_{xy} prelazi u

$$D^*_{xy}:\quad 0 \le r \le 1\ ,\ -\pi \le \varphi \le \pi$$

i dobija se

$$I = 2\int_0^1 r\,dr \int_{-\pi}^{\pi} (1 + r\sin\varphi)\,d\varphi = 4\pi\int_0^1 r\,dr = 2\pi\ .$$

Za površ S može da se uzme i deo paraboloida S_1 koji je ograničen sa L, ali je tada odgovarajući dvojni integral nešto teži za rešavanje. Važi i generalno. Najjednostavniji za rešavanje su dvojni integrali koji se dobijaju izborom dela ravni za površ integracije.

Takođe, površ S se bijektivno projektuje i na zx–ravan (2° iz Napomene 4.3.2), bilo da je S deo paraboloida S_1 ili deo ravni S_2. Projekcija je oblast elipse, pa se i u ovom slučaju dvojni integral teže rešava.

83. Izračunati potpuni krivolinijski integral II vrste

$$I = \oint_L z\,dx + x\,dy + y\,dz \ ,$$

gde je kriva L presek površi

$$S_1 : \quad x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2 \ , \quad S_2 : \quad x^2 + y^2 = 2az$$

za $a > 0$. Posmatrano sa pozitivnog dela z–ose, L je pozitivno orijentisana.

Rešenje. Sfera S_1 i paraboloid S_2 su isti, samo drugačije označeni sa S_3, S_4, kao u Zadatku 55. U istom zadatku je utvrđeno da sve tačke krive L imaju istu treću koordinatu $z = a$, što znači da L istovremeno pripada i ravni

$$S : \quad z = a \ .$$

U skladu sa zaključkom iz Zadatka 82, za površ S biramo deo ravni S_3 ograničen sa L. Orijentaciji krive L odgovara strana površi S koja se vidi sa pozitivnog dela z–ose.

Prema Zadatku 55, površ S se projektuje na xy–ravan u krug D_{xy} poluprečnika $\sqrt{2}\,a$. Još, za S važi

$$p = q = 0 \ ; \ \cos\alpha = \cos\beta = 0 \ , \ \cos\gamma = 1 \ ,$$

pa se primenom Stokesove teoreme dobija

$$I = \iint_S (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)\, d\sigma = \iint_{D_{xy}} dxdy = (\sqrt{2}\,a)^2\pi = 2a^2\pi \ .$$

84. Izračunati potpuni krivolinijski integral II vrste

$$I = \oint_L y\,dx + z\,dy + x\,dz \ ,$$

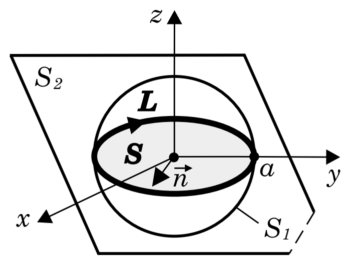
gde je kriva L presek površi

$$S_1 : \quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \ , \quad S_2 : \quad x + y + z = 0$$

za $a > 0$. Posmatrano sa pozitivnog dela z–ose, L je negativno orijentisana.

Rešenje. Površ S_1 je centralna sfera poluprečnika a, dok je S_2 ravan koja prolazi kroz koordinatni početak $(0,0,0)$. Ravan S_2 seče sferu S_1 po kružnici L poluprečnika a. Ako je S deo ravni S_2 ograničen sa L, tada je S krug istog poluprečnika. Orijentaciji krive L

odgovara strana kruga S koja se vidi sa negativnog dela z–ose. Normalan vektor na ovu stranu je označen sa $\vec{n}$.



Primenom Stokesove teoreme sledi

$$I = -\iint_S (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)\, d\sigma \ .$$

Opšti oblik jednačine ravni je ([**3**], str. 268)

$$Ax + By + Cz + D = 0 \ ,$$

gde su A, B, C koordinate vektora $\vec{n}_1$ normalnog na ravan. U slučaju ravni S_2, tj. dela ravni S, je $A = B = C = 1$ i važi $\vec{n}_1 = (1,1,1)$, $|\vec{n}_1| = \sqrt{3}$. Ako su α_1, β_1, γ_1 uglovi koje $\vec{n}_1$ zaklapa s pozitivnim delovima koordinatnih osa, tada je

$$\cos\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \ , \ \cos\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \ , \ \cos\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \ .$$

Kako je $\cos\gamma_1 > 0$, γ_1 je oštar ugao. S druge strane, vektor $\vec{n}$ zaklapa tup ugao γ sa pozitivnim delom z–ose i takođe je normalan na S. Dakle, $\vec{n}$ i $\vec{n}_1$ su vektori suprotnog smera, pa je

$$\vec{n} = (-1,-1,-1) \ , \ |\vec{n}| = \sqrt{3} \ ; \ \cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = -\frac{1}{\sqrt{3}} \ .$$

Zato je

$$I = \frac{3}{\sqrt{3}} \iint_S d\sigma = \sqrt{3}\, s = \sqrt{3}\, a^2 \pi \ ,$$

gde je $s = R^2\pi = a^2\pi$ površina kruga S poluprečnika $R = a$.

Projekcija kružnice L na bilo koju od koordinatnih ravni je elipsa. Kako ose ovih elipsi nisu paralelne koordinatnim osama, njihova parametrizacija je naporna jer zahteva prethodnu rotaciju koordinatnog sistema ([**5**], str. 96). Zato se integral I teško rešava direktno kao krivolinijski. Iz istog razloga je i projekciju kruga S na neku od koordinatnih ravni teško opisati, zbog čega odgovarajući površinski integral i nismo rešavali prelaskom na dvojni.

Površinski integral iz Zadatka 83 može analogno da se reši, bez prelaska na dvojni integral. Međutim, u ovom slučaju nema razlike između površinskog i dvojnog integrala,

$$\iint_S d\sigma = \iint_{D_{xy}} dxdy \ ,$$

jer su krugovi S i D_{xy} istog poluprečnika, pa su njihove površine jednake.

$\boxed{\textbf{85.}}$ Izračunati potpuni krivolinijski integral II vrste

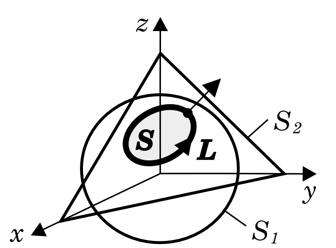
$$I = \oint_L \left(y^2 - z^2\right) dx + \left(z^2 - x^2\right) dy + \left(x^2 - y^2\right) dz \ ,$$

gde je kriva L presek površi

$$S_1 : \quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \ , \quad S_2 : \quad x + y + z = \frac{3}{2}\, a$$

za $a > 0$. Posmatrano sa pozitivnog dela z–ose, L je pozitivno orijentisana.

Rešenje. Ako je S deo ravni S_2 ograničen sa L, tada je S krug. Orijentaciji krive L odgovara strana kruga S na koju je postavljen normalni vektor.



Analogno kao u Zadatku 84, utvrđujemo da je

$$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}} \ ,$$

pa primenom Stokesove teoreme sledi

$$\begin{aligned} I &= -2 \iint_S \left[(y+z)\cos\alpha + (x+z)\cos\beta + (x+y)\cos\gamma\right] d\sigma \\ &= -\frac{2}{\sqrt{3}} \iint_S (2x + 2y + 2z)\, d\sigma = -\frac{4}{\sqrt{3}} \iint_S (x+y+z)\, d\sigma \ . \end{aligned}$$

Kako je podintegralna funkcija $x + y + z$ definisana na $S \subset S_2$, to mora da važi

$$x + y + z = \frac{3}{2}\, a \ ,$$

pa je dalje

$$I = -2\sqrt{3}\, a \iint_S d\sigma = -2\sqrt{3}\, as \ ,$$

gde je s površina kruga S.

Poluprečnik R kruga S nam nije poznat. Da bismo odredili R, prethodno uočavamo sledeće činjenice. Prvo, normala na ravan S_2, koja prolazi kroz koordinatni početak

$(0,0,0)$, istovremeno prolazi i kroz centar kruga S. Drugo, normalno rastojanje proizvoljne tačke (x_0, y_0, z_0) od ravni $Ax + By + Cz + D = 0$ je ([**3**], str. 271)

$$\rho = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \ .$$

U slučaju ravni S_2 je $A = B = C = 1$, $D = -3a/2$, pa je normalno rastojanje tačke $(0,0,0)$ od S_2

$$\rho = \frac{\left|-\dfrac{3}{2}\,a\right|}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,a \ .$$

Treće, kružnica L pripada centralnoj sferi S_1 poluprečnika a. Zato je rastojanje tačke $(0,0,0)$ od svih tačaka sa L isto i iznosi a. Konačno, iz pravouglog trougla, čija su temena koordinatni početak $(0,0,0)$, centar kruga S i bilo koja tačka kružnice L, sledi

$$\rho^2 + R^2 = a^2 \ , \ R^2 = a^2 - \rho^2 = a^2 - \frac{3}{4}\,a^2 = \frac{1}{4}\,a^2 \ , \ s = R^2\pi = \frac{1}{4}\,a^2\pi \ .$$

Vrednost integrala I je

$$I = -\frac{\sqrt{3}}{2}\,a^3\pi \ .$$

Nezavisnost krivolinijskog integrala od puta integracije

Ako je u prosto povezanoj prostornoj oblasti

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \ , \ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \ , \ \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \ ,$$

tada je

$$u(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} P(x,y,z)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y,z)\,dy + \int_{z_0}^{z} R(x_0,y_0,z)\,dz + c \ ,$$
$$c = u(x_0,y_0,z_0) \ ;$$

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz = u(B) - u(A) \ .$$

$\boxed{\textbf{86}}$. Neka je D proizvoljna prosto povezana zatvorena oblast u xy–ravni $(z = 0)$, takva da $(0,0) \notin D$ i $A(1,1), B(2,2) \in D$. Takođe, neka je

$$I = \int_L \frac{(x-y)\,dx + (x+y)\,dy}{\left(x^2+y^2\right)^{\lambda}}$$

potpuni krivolinijski integral II vrste, u kome je $L = \overset{\frown}{AB} \subset D$ proizvoljna kriva i $\lambda \in \mathbb{R}$ konstanta.

(1°) Odrediti λ tako da integral I ne zavisi od puta integracije L.

(2°) Izračunati integral I za nađenu vrednost λ.

Rešenje. (1°) Kako je

$$P(x,y) = \frac{x-y}{\left(x^2+y^2\right)^{\lambda}}\ ,\ Q(x,y) = \frac{x+y}{\left(x^2+y^2\right)^{\lambda}}\ ,$$

to je

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-x^2-y^2-2\lambda xy+2\lambda y^2}{\left(x^2+y^2\right)^{\lambda+1}}\ ,\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2+y^2-2\lambda xy-2\lambda x^2}{\left(x^2+y^2\right)^{\lambda+1}}\ .$$

Funkcije $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $\partial P/\partial y$, $\partial Q/\partial x$ su neprekidne u oblasti D za svako $\lambda \in \mathbb{R}$ zbog $(0,0) \notin D$, pa je

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

dovoljan uslov za nezavisnost krivolinijskog integrala I od puta integracije. Iz poslednje jednakosti sledi

$$(1-\lambda)\left(x^2+y^2\right) = 0\ ,$$

odakle je

$$\lambda = 1\ .$$

(2°) Prvo određujemo potencijal $u(x,y)$ prema formuli

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\,dy + c\ ,$$

birajući konkretnu tačku $(x_0,y_0) = (0,1) \in D$.

Za $\lambda = 1$ je

$$P(x,y) = \frac{x-y}{x^2+y^2}\ ,\ Q(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}\ ,$$

pa je $Q(0,y) = 1/y$ i

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int_0^x \frac{x-y}{x^2+y^2}\,dx + \int_1^y \frac{1}{y}\,dy + c = \int_0^x \frac{x\,dx}{x^2+y^2} - y\int_0^x \frac{dx}{x^2+y^2} + \ln|y| + c \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)\Big|_{x=0}^{x=x} - \arctan\frac{x}{y}\Big|_{x=0}^{x=x} + \ln|y| + c = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right) - \arctan\frac{x}{y} + c\ , \end{aligned}$$

gde je $c = u(x_0,y_0) = u(0,1)$.

Izračunavanjem

$$u(A) = u(1,1) = \frac{1}{2}\ln 2 - \arctan 1 + c\ ,\ u(B) = u(2,2) = \frac{3}{2}\ln 2 - \arctan 1 + c\ ,$$

za integral I se dobija

$$I = u(B) - u(A) = \frac{3}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 2 = \ln 2\ .$$

87. Neka je

$$I = \int_L f(x+y)\Big[\big(1+3x^2+y^2\big)\,dx + \big(1+x^2+3y^2\big)\,dy\Big]$$

potpuni krivolinijski integral II vrste, u kome je L proizvoljna kriva iz xy–ravni ($z=0$) i $f(t)$ realna diferencijabilna funkcija takva da je $f(1)=4$.

(1°) Odrediti $f(t)$ tako da integral I ne zavisi od puta integracije L.

(2°) Odrediti potencijal $u(x,y)$ ako je $u(0,0)=0$. Zatim izračunati integral I ako je $L = \overset{\frown}{AB}$ za $A(-1,-1)$, $B(1,1)$.

Rešenje. (1°) Za

$$P(x,y) = f(x+y)\big(1+3x^2+y^2\big)\ ,\ Q(x,y) = f(x+y)\big(1+x^2+3y^2\big)$$

nalazimo

$$\frac{\partial P}{\partial y} = f'(x+y)\big(1+3x^2+y^2\big) + 2yf(x+y)\ ,\ \frac{\partial Q}{\partial x} = f'(x+y)\big(1+x^2+3y^2\big) + 2xf(x+y)$$

i izjednačavanjem parcijalnih izvoda

$$f'(x+y)\big(1+3x^2+y^2\big) + 2yf(x+y) = f'(x+y)\big(1+x^2+3y^2\big) + 2xf(x+y)\ .$$

Sređivanjem poslednje jednakosti sledi

$$(x+y)f'(x+y) - f(x+y) = 0$$

i, smenom $t = x+y$,

$$tf'(t) - f(t) = 0\ ,\ \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{1}{t}\ .$$

Integracijom dobijene jednakosti nalazimo $\ln|f| = \ln|t| + k_1$ i $f(t) = kt$, gde je $k = \pm\exp(k_1)$ proizvoljna integraciona konstanta. S obzirom na $f(1)=k$ i uslov $f(1)=4$ je $k=4$, pa je

$$f(t) = 4t\ .$$

Zbog neprekidnosti funkcija $f(t)=4t$, $f'(t)=4$ za svako $t\in\mathbb{R}$ i neprekidnosti funkcije $t = t(x,y) = x+y$ za svako $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, neprekidne su i funkcije $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $\partial P/\partial y$, $\partial Q/\partial x$ za svako $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Zato za oblast D, u kojoj integral I ne zavisi od puta integracije, može da se uzme bilo koja prosto povezana zatvorena oblast u xy–ravni.

(2°) Za $f(t)=4t$ je $f(x+y) = 4(x+y)$ i

$$P(x,y) = 4(x+y)\big(1+3x^2+y^2\big)\ ,\ Q(x,y) = 4(x+y)\big(1+x^2+3y^2\big)\ .$$

Birajući $(x_0,y_0) = (0,0)$, za potencijal se dobija

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int_0^x P(x,y)\,dx + \int_0^y Q(0,y)\,dy + c \\ &= 4\int_0^x (x+y)\big(1+3x^2+y^2\big)\,dx + 4\int_0^y y\big(1+3y^2\big)\,dy + c \\ &= 4xy + 4xy^3 + 2x^2 + 2x^2y^2 + 4x^3y + 3x^4 + 2y^2 + 3y^4 + c \\ &= (x+y)^2\big(3x^2+3y^2-2xy+2\big) + c\ , \end{aligned}$$

gde je $c = u(0,0)$. S obzirom na $u(0,0) = 0$, sledi $c = 0$ i

$$u(x,y) = (x+y)^2\big(3x^2 + 3y^2 - 2xy + 2\big) \ .$$

Kako je

$$u(A) = u(-1,-1) = 24 \ , \ u(B) = u(1,1) = 24 \ ,$$

to je

$$I = u(B) - u(A) = 0 \ .$$

88. Izračunati potpuni krivolinijski integral II vrste

$$I = \oint_L \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} \ ,$$

gde je L proizvoljna pozitivno orijentisana kontura u xy–ravni ($z = 0$).

Rešenje. Neka je D prosto povezana zatvorena oblast u xy–ravni, ograničena sa L i takva da $(0,0) \notin D$. Tada su funkcije

$$P(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} \ , \ Q(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \ , \ \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{\big(x^2+y^2\big)^2}$$

neprekidne u oblasti D, pa krivolinijski integral

$$I_1 = \int_{\overset{\frown}{AB}} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$$

ne zavisi od puta integracije $\overset{\frown}{AB} \subset D$. Kako je L kontura (zatvorena kriva), prema Teoremi 4.8.1 sledi

$$I = 0 \ .$$

Pretpostavimo sada da je $(0,0) \in D$. Funkcije $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $\partial P/\partial y$, $\partial Q/\partial x$ su prekidne u tački $(0,0)$, pa ne može da se govori o nezavisnosti krivolinijskog integrala I_1 od puta integracije. Zato pribegavamo drugačijem rešavanju. Oko tačke $(0,0)$ opisujemo proizvoljnu konturu $L_1 \subset D$, takvu da je $L_1 \cap L = \emptyset$. Tada je L spoljna, a L_1 unutrašnja kontura dvostruko povezane oblasti D_1. Kako $(0,0) \notin D_1$, može da se primeni postupak i iskoristi zaključak iz Zadatka 50, prema kome je

$$I = 2\pi \ .$$

S obzirom na Teoremu 4.8.1 i $I \neq 0$ u slučaju $(0,0) \in D$, integral I_1 zavisi od puta integracije. Do istog zaključka se dolazi i bez Teoreme 4.8.1. Ako je $L = A\overset{\frown}{X_1}B \cup B\overset{\frown}{X_2}A$, označavajući $L_1 = A\overset{\frown}{X_1}B$, $L_2 = A\overset{\frown}{X_2}B$ i izostavljajući podintegralni izraz, sledi

$$I = \int_{A\overset{\frown}{X_1}B} + \int_{B\overset{\frown}{X_2}A} = \int_{L_1} - \int_{L_2} = 2\pi \ , \ \int_{L_1} = 2\pi + \int_{L_2} \ ,$$

pa je u opštem slučaju

$$\int_{L_1} \neq \int_{L_2} \ .$$

$\boxed{\mathbf{89}}$. Neka je D proizvoljna prosto povezana zatvorena prostorna oblast, takva da je $z > 0$ za sve tačke $(x, y, z) \in D$. Izračunati potpuni krivolinijski integral II vrste

$$I = \int_L \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \ ,$$

gde je $L = \overset{\frown}{AB} \subset D$ proizvoljna kriva, $A \in S_1$, $B \in S_2$,

$$S_1 : \quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \ , \qquad S_2 : \quad x^2 + y^2 + z^2 = b^2$$

i $a, b > 0$.

Rešenje. Imajući u vidu da $(0, 0, 0) \notin D$, funkcije

$$P(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \ , \ Q(x, y, z) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \ , \ R(x, y, z) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

i njihovi odgovarajući parcijalni izvodi zadovoljavaju uslove Teoreme 4.8.3, pa u oblasti D postoji potencijal $u(x, y, z)$ i određuje se prema formuli

$$u(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} P(x, y, z)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y, z)\,dy + \int_{z_0}^{z} R(x_0, y_0, z)\,dz + c \ .$$

Za $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 1)$ se dobija

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \int_0^x P(x, y, z)\,dx + \int_0^y Q(0, y, z)\,dy + \int_1^z R(0, 0, z)\,dz + c \\ &= \int_0^x \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,dx + \int_0^y \frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}}\,dy + \int_1^z dz + c \\ &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + c_1 \ , \end{aligned}$$

gde je $c = u(x_0, y_0, z_0) = u(0, 0, 1)$ i $c_1 = c - 1$.

Kako je $A(x_1, y_1, z_1) \in S_1$, $B(x_2, y_2, z_2) \in S_2$, važi

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = a^2 \ , \ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = b^2 \ ,$$

pa je

$$I = u(B) - U(A) = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} + c_1 - \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} - c_1 = b - a \ .$$

$\boxed{\mathbf{90}}$. Izračunati potpuni krivolinijski integral II vrste

$$I = \oint_L f(x^2 + y^2 + z^2)(x\,dx + y\,dy + z\,dz) \ ,$$

gde je L proizvoljna kontura i $f(t)$ neprekidna realna funkcija sa neprekidnim izvodom $f'(t)$ za svako $t \in \mathbb{R}$.

Rešenje. Kako je

$$P(x,y,z) = xf\big(x^2+y^2+z^2\big)\ ,\ Q(x,y,z) = yf\big(x^2+y^2+z^2\big)\ ,\ R(x,y,z) = zf\big(x^2+y^2+z^2\big)\ ,$$

to je

$$\begin{aligned} &\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xyf'\big(x^2+y^2+z^2\big)\ ,\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = 2xzf'\big(x^2+y^2+z^2\big)\ ,\\ &\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} = 2yzf'\big(x^2+y^2+z^2\big)\ . \end{aligned}$$

Funkcije $f(t)$, $f'(t)$ i $t = t(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ su neprekidne, pa su neprekidne funkcije $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$, kao i njihovi navedeni izvodi za svako $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Ako je D prosto povezana oblast, integral

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f\big(x^2+y^2+z^2\big)(x\,dx + y\,dy + z\,dz)$$

ne zavisi od puta integracije $\overset{\frown}{AB} \subset D$ prema Teoremi 4.8.3. Budući da je L zatvorena kriva, prema Teoremi 4.8.1 tada je i

$$I = 0\ .$$

PRILOG

Česta je pojava određenih integrala oblika

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin^m \varphi \cos^n \varphi \, d\varphi \ ,$$

gde je $m, n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Takvi su, npr., integrali u Zadacima 31 i 34, koje smo rešavali transformacijom podintegralne funkcije. U slučaju velikih brojeva m, n, ovakav način rešavanja je izuzetno naporan. Rešavanje je neuporedivo jednostavnije pomoću beta i gama funkcije ([**1**], str. 404–414), pri čemu $m, n \geq 0$ mogu da budu proizvoljni realni brojevi.

Beta funkcija ili *Eulerov integral drugog reda* je određeni integral

$$\mathrm{B}(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} \, dx \ ,$$

gde su $p, q > 0$ realni brojevi. Ako su p, q prirodni brojevi, za beta funkciju važi

$$\mathrm{B}(p, q) = \frac{(p-1)! \, (q-1)!}{(p+q-1)!} \ .$$

Gama funkcija ili *Eulerov integral prvog reda* je nesvojstveni integral

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} \, dx \ ,$$

gde je $p > 0$ realan broj. Za gama funkciju važi:

$$\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) = \sqrt{\pi} \ , \ \Gamma(1) = 1 \ , \ \Gamma(p+1) = p \, \Gamma(p)$$

i, ako je p prirodan broj,

$$\Gamma(p) = (p-1)! \ .$$

Veza između beta i gama funkcije iskazana je jednakošću

$$\mathrm{B}(p,q)=\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\ .$$

Rešavanje integrala I upotrebom beta i gama funkcije ilustrujemo sa tri primera.

Primer 1. Uvođenjem smena $t=\sin\varphi$ i $x=t^2$ redom, integral iz Zadatka 34,

$$I=\int_0^{\pi/2}\sin^5\varphi\cos^5\varphi\,d\varphi\ ,$$

postaje

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{\pi/2}\sin^5\varphi\cos^4\varphi\,d(\sin\varphi)=\int_0^{\pi/2}\sin^5\varphi\big(1-\sin^2\varphi\big)^2\,d(\sin\varphi)\\&=\int_0^1 t^5\big(1-t^2\big)^2\,dt=\frac{1}{2}\int_0^1 x^2(1-x)^2\,dx\\&=\frac{1}{2}\int_0^1 x^{3-1}(1-x)^{3-1}\,dx=\frac{1}{2}\,\mathrm{B}(3,3)=\frac{1}{2}\,\frac{2!\,2!}{5!}=\frac{1}{60}\ .\end{aligned}$$

Umesto smene $t=\sin\varphi$ može da se koristi smena $t=\cos\varphi$. Ove dve smene su ravnopravne.

Primer 2. Uvođenjem smena $t=\sin\varphi$ i $x=t^2$ redom, integral

$$I=\int_0^{\pi/2}\sin^4\varphi\cos^4\varphi\,d\varphi$$

postaje

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{\pi/2}\sin^4\varphi\cos^3\varphi\,d(\sin\varphi)=\int_0^{\pi/2}\sin^4\varphi\big(1-\sin^2\varphi\big)^{3/2}\,d(\sin\varphi)\\&=\int_0^1 t^4\big(1-t^2\big)^{3/2}\,dt=\frac{1}{2}\int_0^1 x^{3/2}(1-x)^{3/2}\,dx\\&=\frac{1}{2}\int_0^1 x^{5/2-1}(1-x)^{5/2-1}\,dx=\frac{1}{2}\,\mathrm{B}\Big(\frac{5}{2},\frac{5}{2}\Big)=\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\Big(\dfrac{5}{2}\Big)\,\Gamma\Big(\dfrac{5}{2}\Big)}{\Gamma(5)}\ .\end{aligned}$$

Sukcesivnom primenom osobine $\Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p)$ izračunavamo

$$\begin{aligned}\Gamma\Big(\frac{5}{2}\Big) &= \Gamma\Big(\frac{3}{2}+1\Big) = \frac{3}{2}\,\Gamma\Big(\frac{3}{2}\Big)\\ &= \frac{3}{2}\,\Gamma\Big(\frac{1}{2}+1\Big) = \frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\,\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}\ ,\end{aligned}$$

pa je

$$I = \frac{1}{2}\,\frac{\Big(\frac{3}{4}\sqrt{\pi}\Big)^2}{4!} = \frac{3}{256}\,\pi\ .$$

Primer 3. Uvođenjem smena $t = \cos\varphi$ i $x = t^2$ redom, za integral

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin^6\varphi\, d\varphi$$

se dobija

$$\begin{aligned}I &= -\int_0^{\pi/2} \sin^5\varphi\, d(\cos\varphi) = -\int_0^{\pi/2} \big(1-\cos^2\varphi\big)^{5/2}\, d(\cos\varphi)\\ &= -\int_1^0 \big(1-t^2\big)^{5/2}\, dt = \frac{1}{2}\int_0^1 x^{-1/2}(1-x)^{5/2}\, dx\\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 x^{1/2-1}(1-x)^{7/2-1}\, dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{B}\Big(\frac{1}{2},\frac{7}{2}\Big) = \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big)\,\Gamma\Big(\frac{7}{2}\Big)}{\Gamma(4)}\ .\end{aligned}$$

Kako je

$$\Gamma\Big(\frac{7}{2}\Big) = \frac{5}{2}\,\frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{15}{8}\sqrt{\pi}\ ,$$

to je

$$I = \frac{5}{32}\,\pi\ .$$

CIP – Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

517.3 (075.8)

СТЕФАНОВИЋ, Лидија
Integrali: krivolinijski, dvojni, trojni, površinski, Deo II: za studente tehničkih Fakulteta / Lidija Stefanović. – 1. izd. – Niš: Studentski kulturni centar, 2009 (Niš: Petrograf). – VI, 135 str. : graf. prikazi; 25 cm

Tiraž 100

ISBN 978–86–7757–154–2

a) Интеграли
COBISS.SR–ID 154627340