ИСПИТНИ ЗАДАЦИ:

ЗАД 1: 25.04.2009.

Методом Гаус-Зајдела одредити четврту апроксимацију рјешења система

$$10x_1 + x_2 + x_3 = 33$$
$$x_1 + 10x_2 + 2x_3 = 25$$
$$2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 20,$$

узимајући за почетну апроксимацију

$x_1^0 = 3.3$; $x_2^0 = 2.5$; $x_3^0 = 2$.

(Рачунати на четири децимале)

Рјешење: (матрица система дијагонално доминантна)

$$10x_1 = -x_2 - x_3 + 33 \qquad\qquad x_1 = -0{,}1x_2 - 0{,}1x_3 + 3{,}3$$
$$10x_2 = -x_1 - 2x_3 + 25 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -0{,}1x_1 - 0{,}2x_3 + 2{,}5$$
$$10x_3 = -2x_1 - 2x_2 + 20 \qquad\qquad x_3 = -0{,}2x_1 - 0{,}2x_2 + 2$$

$$x^0 = \begin{bmatrix} 3.3 \\ 2.5 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad T = \begin{bmatrix} 0 & -0.1 & -0.1 \\ -0.1 & 0 & -0.2 \\ -0.2 & -0.2 & 0 \end{bmatrix}$$

$\|T\|_1 = 0{,}3 < 1$ (по колоне)

$\|T\|_\infty = 0.4 < 1$ (врсте)

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 2.85 \\ 1.815 \\ 1.067 \end{bmatrix}$$

$$x_1^{k+1} = -0{,}1x_2^k - 0{,}1x_3^k + 3{,}3$$
$$x_2^{k+1} = -0{,}1x_1^{k+1} - 0{,}2x_3^k + 2{,}5$$
$$x_3^{k+1} = -0{,}2x_1^{k+1} - 0{,}2x_2^{k+1} + 2$$

$$x^{2} = \begin{bmatrix} 3.0118 \\ 1.9854 \\ 1.0006 \end{bmatrix}, \quad x^{3} = \begin{bmatrix} 3.0014 \\ 1.9997 \\ 0.9998 \end{bmatrix}, \quad x^{4} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ЗАД 2: (12.04.2010.)

Методом Гаус-Зајдела одредити трећу апроксимацију рјешења система

$$10x_1 + 3x_2 - x_3 = 12$$
$$-x_1 + 5x_2 - x_3 = 3$$
$$x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 13$$

узимајући за почетну апроксимацију

$$x_1^{(0)} = 1.2, \quad x_2^{(0)} = 0.6, \quad x_3^{(0)} = 1.3.$$

(рачунати на четири децимале.)

Рјешење:

$$10x_1 = -3x_2 + x_3 + 12$$
$$5x_2 = x_1 + x_3 + 3$$
$$10x_3 = -x_1 - 2x_2 + 13$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = -0{,}3x_2 + 0{,}1x_3 + 1{,}2$$
$$x_2 = 0{,}2x_1 + 0{,}2x_3 + 0{,}6$$
$$x_3 = -0{,}1x_1 - 0{,}2x_2 + 1{,}3$$

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 0.6 \\ 1.3 \end{bmatrix} \qquad T = \begin{bmatrix} 0 & -0.3 & 0.1 \\ 0.2 & 0 & 0.2 \\ -0.1 & -0.2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\|T\|_1 = 0{,}5 < 1, \quad \|T\|_\infty = 0.4 < 1$$

$$x_1^{(k+1)} = -0{,}3x_2^{(k)} + 0{,}1x_3^{(k)} + 1{,}2$$
$$x_2^{(k+1)} = 0{,}2x_1^{(k+1)} + 0{,}2x_3^{(k)} + 0{,}6$$
$$x_3^{(k+1)} = -0{,}1x_1^{(k+1)} - 0{,}2x_2^{(k+1)} + 1{,}3$$

$$X^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.15 \\ 1.09 \\ 0.967 \end{bmatrix}, \quad X^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.9697 \\ 0.9873 \\ 1.0056 \end{bmatrix}, \quad X^{(3)} = \begin{bmatrix} 1.0044 \\ 1.0020 \\ 0.9992 \end{bmatrix}$$

ЗАД 3: 1.07.2010. (ЈАКОБИЈЕВ МЕТОДА)

Методом (просте) итерације одредити трећу апроксимацију рјешења система

$$0.04x_1 - 0.08x_2 + 4x_3 = 20 \quad (1)$$

$$0.09x_1 + 3x_2 - 0.15x_3 = 9 \quad (2)$$

$$4x_1 + 0{,}24x_2 - 0{,}08x_3 = 8 \quad (3)$$

узимајући за почетну апроксимацију $x_1^{(0)} = 2$, $x_2^{(0)} = 3$, $x_3^{(0)} = 5$. (Рачунати на четири децимале)

Рјешење:

$(3):4 \Rightarrow \quad x_1 = 2 - 0{,}06x_2 + 0.02x_3$

$(2):3 \Rightarrow \quad x_2 = -0{,}03x_1 + 0.05x_3 + 3$

$(1):4 \Rightarrow \quad x_3 = 5 - 0.01x_1 + 0.02x_2$

$$X^{(0)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 0 & -0.06 & 0.02 \\ -0.03 & 0 & 0.05 \\ -0.01 & 0.02 & 0 \end{bmatrix}$$

$\|T\|_1 = 0.08 < 1$, $\|T\|_\infty = 0.08$

по колонама

МЕТОДА ИТЕРАЦИЈЕ

$$x_1^{(n+1)} = -0{,}06\, x_2^{(n)} + 0.02\, x_3^{(n)} + 2$$

$$x_2^{(n+1)} = -0.03\, x_1^{(n)} + 0.05\, x_3^{(n)} + 3$$

$$x_3^{(n+1)} = -0.01\, x_1^{(n)} + 0.02\, x_2^{(n)} + 5$$

$$X^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.92 \\ 3.19 \\ 5.04 \end{bmatrix}, \quad X^{(2)} = \begin{bmatrix} 1.9094 \\ 2.676 \\ 5.0446 \end{bmatrix}, \quad X^{(3)} = \begin{bmatrix} 1.9403 \\ 3.1950 \\ 5.0344 \end{bmatrix}$$

зад 2: (16.04.2015.)

Користећи Гаус-Зајделову методу одредити трећу апроксимацију решења система

$$1{,}02x_1 - 0{,}05x_2 - 0{,}10x_3 = 0{,}795 \quad /:1{,}02$$

$$-0{,}11x_1 + 1{,}03x_2 - 0{,}05x_3 = 0{,}849 \quad /:1{,}03$$

$$-0{,}11x_1 - 0{,}12x_2 + 1{,}04x_3 = 1{,}398 \quad /1.04$$

узимајући за почетну апроксимацију

$$x_1^{(0)} = 0{,}795\,; \quad x_2^{(0)} = 0{,}849\,; \quad x_3^{(0)} = 1{,}398$$

(рачунати на пет децимала)

Решење:

$$x_1 = 0{,}77941 + 0{,}04902\,x_2 + 0{,}09804\,x_3$$

$$x_2 = 0.82427 + 0.10680\,x_1 + 0.04854\,x_3$$

$$x_3 = 1.34423 + 0.10577\,x_1 + 0.11538\,x_2$$

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.795 \\ 0.849 \\ 1.398 \end{bmatrix} \qquad T = \begin{bmatrix} 0 & 0.04902 & 0.09804 \\ 0.10680 & 0 & 0.04854 \\ 0.10577 & 0.11538 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\|T\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = 0.21257 < 1$$

$$x_1^{(k+1)} = 0{,}77941 + 0{,}04902\,x_2^{(k)} + 0{,}09804\,x_3^{(k)}$$

$$x_2^{(k+1)} = 0{,}82427 + 0{,}10680\,x_1^{(k+1)} + 0{,}04854\,x_3^{(k)}$$

$$x_3^{(k+1)} = 1.34423 + 0.10577\,x_1^{(k+1)} + 0{,}11538\,x_2^{(k+1)}$$

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0{,}95809 \\ 0{,}99445 \\ 1{,}56031 \end{bmatrix}, \quad x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0{,}98113 \\ 1.00479 \\ 1.56394 \end{bmatrix}, \quad x^{(3)} = \begin{bmatrix} 0{,}98199 \\ 1{,}00506 \\ 1{,}56406 \end{bmatrix}$$