12

Numeričko rešavanje jednačina

Neka je data jednačina

$$f(x) = 0 \tag{12.1}$$

i neka je funkcija $f = f(x)$ definisana i neprekidna u konačnom ili beskonačnom intervalu (α, β). Neka je tačno rešenje ove jednačine $x = \eta$. Numerički metod približnog rešavanja daje iterativni niz $x_0, x_1, , \ldots$ takav da je $\lim\limits_{n\to\infty} = \eta$. Za približno rešenje jednačine (12.1) uzima se onaj član iterativnog niza x_n koji prvi zadovolji postavljeni izlazni kriterijum.
Izlazni kriterijumi su:

1) greška aproksimacije $|x_n - \eta|$
2) tolerancija funckije $|f(x_n)|$
3) tolerancija postupka $|x_n - x_{n-1}|$
4) prisilan kraj (zadaje se broj koraka n).

Rešavanje jednačine (12.1) sastoji se iz dve etape:

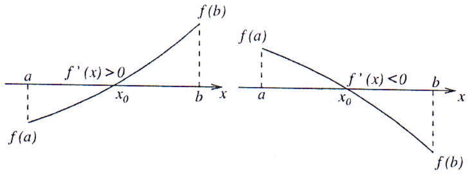
1) Lokalizacija korena jednačine (12.1), tj. određivanje svih intervala u kojima se nalaze jedinstveni koreni jednačine (12.1).

2) Primena nekog od poznatih numeričkih metoda koji sužava početni interval, tj. omogućava nalaženje približne vrednosti rešenja jednačine (12.1) sa proizvoljnom tačnošću.

Lokalizacija korena

Za lokalizaciju korena jednačine (12.1), koriste se sledeći kriterijumi:

- Ako je $f = f(x)$ nad intervalom $[a, b]$ monotona funkcija i ako na



krajevima intervala ima vrednosti različitog znaka, tada u $[a, b]$ postoji jedno i samo jedno rešenje jednačine (12.1).

- Grafički metod je često pogodan za određivanje intervala u kome se nalaze nule jednačine (12.1). Ovaj metod se zasniva na činjenici da je koren jednačine (12.1) zapravo presek grafika funkcije f sa x-osom. U slučaju kada je teško nacrtati grafik funkcije f, koristi se zapis funkcije f u obliku

$$f(x) = g(x) - h(x).$$

Tada je jednačina (12.1) ekvivalentna sa jednačinom

$$g(x) = h(x).$$

Sada se određivanje realnih korena jednačine (12.1) svodi na određivanje apscisa tačaka preseka krivih $g = g(x)$ i $h = h(x)$.

Numerički metodi za nalaženje približnih vrednosti korena jednačina

- **Metod polovljenja**
Metodom polovljenja delimo interval $[a_n, b_n]$, $n = 0, 1, \ldots$ ($[a, b] = [a_0, b_0]$) u kome jednačina $f(x) = 0$ ima rešenje, tačkom $x_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ i proveravamo da li je $f(x_n) = 0$. Ako je to ispunjeno, onda je tačka x_n traženi koren jednačine. Ako tačka x_n nije koren, onda se od intervala $[a_n, x_n]$ i $[x_n, b_n]$ bira onaj na čijim krajevima funkcija f ima različit znak, tj.

$$a_{n+1} = x_n, \quad b_{n+1} = b_n \qquad \text{ako je} \qquad f(x_n) \cdot f(b_n) < 0$$

ili

$$a_{n+1} = a_n, \quad b_{n+1} = x_n \qquad \text{ako je} \qquad f(a_n) \cdot f(x_n) < 0.$$

metod nastavljamo do željene tačnosti. Ocena greške sa kojom je određeno približno rešenje posle n koraka je $|x_n - \eta| \leq \dfrac{b-a}{2^n}$.

- **Metod sečice**

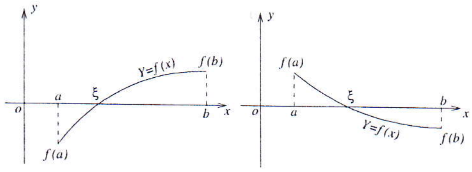
Neka je za jednačinu $f(x) = 0$ lokalizovan koren η u intervalu $[a, b]$ i neka važi

(1) $f(a) \cdot f(b) < 0$

(2) f' i f'' su neprekidne funkcije stalnog znaka nad intervalom $[a, b]$.

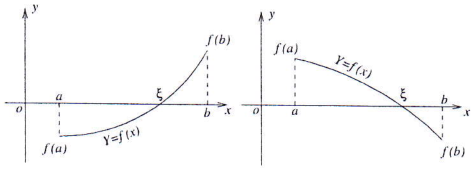
Razlikujemo dva slučaja:

a) $f(a) \cdot f''(a) > 0$ i $f(b) \cdot f''(b) < 0$



tada je $x_0 = a$ i $x_1 = b$.

b) $f(b) \cdot f''(b) > 0$ i $f(a) \cdot f''(a) < 0$



tada je $x_0 = b$ i $x_1 = a$.

Iterativni niz u oba slučaja ima oblik:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \cdot \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{12.2}$$

Ocena greške ovog postupka u n-tom koraku je data sa

$$|x_n - \eta| \leq \frac{|f(x_n)|}{m},$$

gde je $m = \min\limits_{x \in [a,b]} |f'(x)|$.

- **Metod tangente**
Neka funkcija f iz jednačine $f(x) = 0$ zadovoljava uslove (1) i (2). Razlikujemo dva slučaja:

a) ako važi $f(a) \cdot f''(a) > 0$,

monotono rastući niz aproksimacija se izračunava po formuli:

$$x_0 = a, \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{12.3}$$

b) ako važi $f(b) \cdot f''(b) > 0$,

monotono opadajući niz aproksimacija ima oblik:

$$x_0 = b, \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{12.4}$$

Ocena greške ovog postupka u n-tom koraku izračunava se na isti način kao i kod postupka sečice.

Zadaci

Lokalizacija korena

1. **Lokalizovati korene jednačine** $x^3 - 3x - 4 = 0$.

Rešenje:

Funkcije $f(x) = x^3 - 3x - 4$ i $f'(x) = 3x^2 - 3$ su neprekidne nad celim skupom realnih brojeva. Iz jednačine

$$3x^2 - 3 = 0$$

dobijamo intervale monotonosti funkcije f :

$$(-\infty, -1), \quad (-1, 1), \quad (1, +\infty).$$

Kako je

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{i} \quad f(-1) < 0, \quad f(1) < 0,$$

sledi da u intervalima $(-\infty, -1)$ i $(-1, 1)$ ne postoji ni jedan realan koren zadate jednačine.

Pošto je $f(1) < 0$, a $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$, jedini realan koren se nalazi u intervalu $(1, +\infty)$. Polazeći od toga, odredićemo konačan interval (a, b) u kom se nalazi koren jednačine. Kako važi

$$f(2) = -2 < 0 \quad \text{i} \quad f(3) = 14 > 0,$$

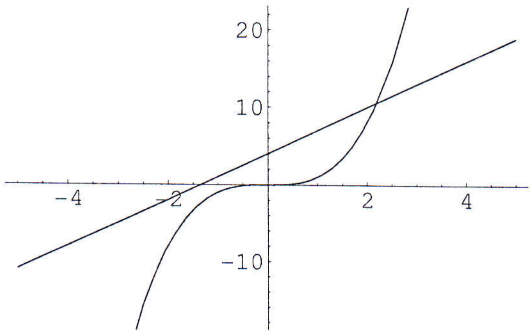
sledi da se jedini realan koren jednačine $x^3 - 3x - 4 = 0$ nalazi u intervalu $[2, 3]$.

Na istom primeru ćemo pokazati kako se za lokalizaciju korena može koristiti i grafički metod.

Početnu jednačinu $x^3 - 3x - 4 = 0$ ćemo zapisati u obliku $g(x) = h(x)$:

$$x^3 = 3x + 4.$$

Grafici krivih $g(x) = x^3$ i $h(x) = 3x + 4$ su dati na slici.



Sa slike se vidi da se apscisa presečne tačke krivih $g(x) = x^3$ i $h(x) = 3x + 4$, tj. realan koren zadate jednačine, nalazi u intervalu $[2, 3]$.

2. **Lokalizovati koren jednačine** $\sin 2x - 2x \cos 2x = 0$.

Rešenje:

Funkcija $f(x) = \sin 2x - 2x \cos 2x$ i njen prvi izvod $f'(x) = 4x \sin 2x$ su neprekidne nad skupom realnih brojeva. Granice intervala monotonosti funkcije $f(x)$ se dobijaju rešavanjem jednačine $f'(x) = 0$.

Kako je $4x \sin 2x = 0$ za $x = \frac{k\pi}{2}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ i kako $f'(x)$ pri prolasku kroz $x = \frac{k\pi}{2}$ za $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ menja znak, to su intervali monotonosti funkcije f :

$$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{i} \quad \left(\frac{k\pi}{2}, \frac{(k+1)\pi}{2}\right) \quad k = 1, \pm 2, \ldots$$

Potrebno je još proveriti da li f ima vrednosti različitog znaka na krajevima intervala monotonosti:

$$f\left(\frac{k\pi}{2}\right) \cdot f\left(\frac{(k+1)\pi}{2}\right) =$$

$$= (\sin(k\pi) - k\pi\cos(k\pi)) \cdot (\sin(k+1)\pi - (k+1)\pi\cos(k+1)\pi) =$$

$$= k\pi(-1)^{k+1}(k+1)\pi(-1)^{k+2} = -k(k+1)\pi^2 < 0, \quad k = 1, \pm 2, \ldots$$

Dakle, $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$.

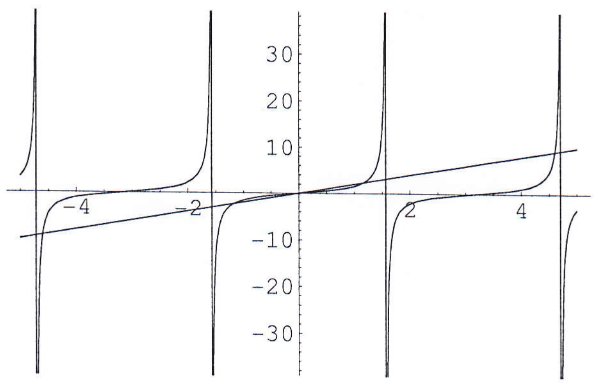
Kako funkcija f imaraličit znak na svakom od krajeva intervala monotonosti, možemo zaključiti da u svakom od intervala monotonosti postoji po jedan koren jednačine $\sin 2x - 2x\cos 2x = 0$.

3. **Grafičkim metodom naći približnu vrednost najmanjeg pozitivnog i najvećeg negativnog realnog korena jednačine**

$$\operatorname{tg} x - 2x = 0.$$

Rešenje:

Neka je $g(x) = \operatorname{tg} x$ a $h(x) = 2x$. Tada se polazni problem svodi na nalaženje preseka ove dve krive. Primetimo da je $f(x) = \operatorname{tg} x - 2x$ neparna funkcija $(f(-x) = -f(x))$, pa su njeni koreni raspoređeni simetrično u odnosu na koordinatni početak. To znači da je dovoljno pronaći najmanji pozitivan koren x_0, jer će najveći negativan koren onda biti $-x_0$.

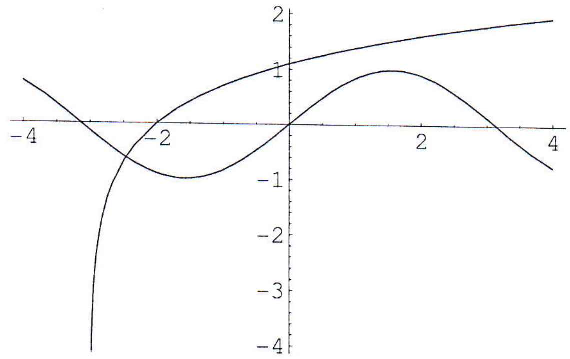


Posmatrajući sliku, vidimo da se najmanji pozitivan koren jednačine $f(x) = 0$ nalazi u intervalu $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$. Onda je njen najveći negativan koren u intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right)$.

4. **Lokalizovati koren jednačine** $\ln(x+3) - \sin x = 0$.

Rešenje:

Napisaćemo zadatu jednačinu u obliku $\ln(x+3) = \sin x$ i grafički odrediti apscisu presečne tačke grafika funkcija $g(x) = \ln(x+3)$ i $h(x) = \sin x$.



Sa slike se vidi da se jedini realan koren nalazi u intervalu $(-3, -2)$.

Numerički metodi za nalaženje približnih vrednosti korena jednačina

1. **Metodom polovljenja naći najveći realan koren jednačine**

$$x^3 - 6x + 2 = 0$$

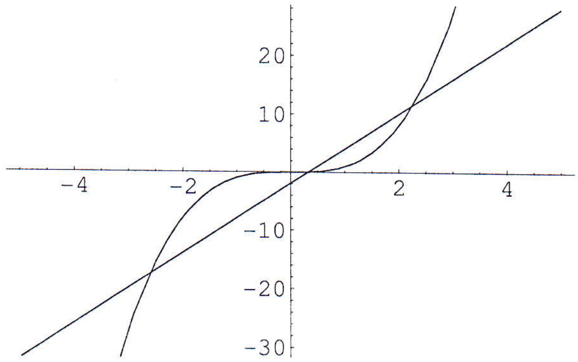
sa greškom koja je manja od 10^{-2}.

Rešenje:

Prvo ćemo grafičkim metodom lokalizovati korene date jednačine da bismo odredili interval u kome se nalazi njen najveći koren. Jednačinu $f(x) = 0$, gde je $f(x) = x^3 - 6x + 2$, zapisaćemo u obliku

$$x^3 = 6x - 2$$

i nacrtati grafike funkcija $g(x) = x^3$ i $h(x) = 6x - 2$.



Sa slike se vidi da se najveći koren jednačine $f(x) = 0$ nalazi u intervalu $[a, b] = [2, 3]$. Kako je $f(a) \cdot f(b) < 0$ i $f'(x) = 3x^2 - 6 > 0$ za svako $x \in [2, 3]$, (tj. funkcija f je monotona na $[2, 3]$), data jednačina na intervalu $[2, 3]$ ima tačno jedno rešenje.

Broj koraka n nalazimo iz uslova

$$\frac{b-a}{2^n} \le 10^{-2} \Leftrightarrow \frac{1}{2^n} \le 10^{-2} \Leftrightarrow 2^n \ge 100 \Leftrightarrow n \ge 7.$$

Primenjujući metod polovljenja dobijamo niz aproksimacija tako što nalazimo sredinu intervala

$$x_1 = \frac{a+b}{2} = \frac{2+3}{2} = 2.5,$$

a zatim, pomoću znaka funkcije ($f(x_1) > 0$) proveravamo u kojoj polovini intervala se nalazi koren jednačine. Isti metod se ponavlja na toj polovini intervala, sa novim a i b.

Kako je $f(2) < 0$ i $f(2.5) > 0$, uzimamo $a = 2$ i $b = x_1 = 2.5$. Ponovo tražimo sredinu intervala i metod ponavljamo $n = 7$ puta. Sve vrednosti su date u tabeli.

n	a	b	x_n	$f(x_n)$
1	2	3	2.5	2.625
2	2	2.5	2.25	-0.109375
3	2.25	2.5	2.375	1.14648
4	2.25	2.375	2.3125	0.491455
5	2.25	2.3125	2.28125	0.184357
6	2.25	2.28125	2.25782	-0.0371155
7	2.25782	2.28125	2.26954	0.0727334

Vrednost $x_7 = 2.26954$ je traženo približno rešenje polazne jednačine .

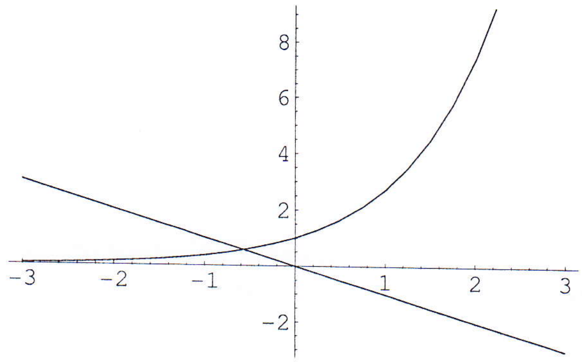
2. **Metodom sečice naći koren jednačine** $x + e^x = 0$ **sa tačnošću** 10^{-4}.

Rešenje:

Grafičkim metodom ćemo lokalizovati korene jednačine $f(x) = 0$, gde je $f(x) = x + e^x$. Zapisaćemo datu jednačinu u obliku

$$e^x = -x$$

i tražiti apscise tačaka preseka funkcija $g(x) = e^x$ i $h(x) = -x$.



Sa slike se vidi da se jedini koren jednačine $f(x) = 0$ nalazi u intervalu $[a, b] = [-1, 0]$.

Da bismo mogli primeniti metod sečice, proveravamo da li su ispunjeni uslovi:
(1) $f(-1) \cdot f(0) < 0$
(2) funkcije $f'(x) = 1 + e^x$ i $f''(x) = e^x$ su neprekidne i važi $f'(x) > 0$ i $f''(x) > 0$ za svako $x \in [-1, 0]$.

Pošto je $f(-1) \cdot f''(-1) < 0$, posmatramo $f(0) \cdot f''(0) > 0$ i za početne vrednosti uzimamo $x_0 = 0$ i $x_1 = -1$. Gornju granicu greške ćemo, u svakom koraku, ocenjivati sa $\delta(x_n) = \frac{|f(x_n)|}{m}$, gde je $m = \min_{x \in [-1,0]} |f'(x)| = 1.36788$.

Rezultati dobijeni primenom ovog postupka dati su u tabeli.

n	x_n	$f(x_n)$	$\delta(x_n)$
0	0	1	
1	-1	-0.632121	0.462117
2	-0.6127	-0.070814	0.0517691
3	-0.563838	0.0051824	0.0037886
4	-0.56717	-0.000040	0.000031

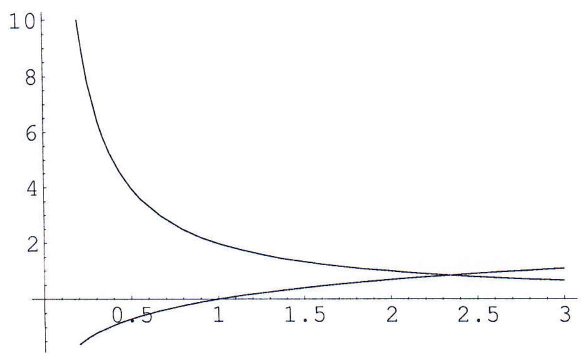
Približno rešenje je $x_5 = -0.56717$, a greška aproksimacije je

$$|x_5 - \eta| < 3.1 \cdot 10^{-5}.$$

3. **Metodom tangente naći koren jednačine** $x \ln x - 2 = 0$ **sa tačnošću** 10^{-3}.

Rešenje:

Grafičkim metodom ćemo lokalizovati korene jednačine $f(x) = 0$, gde je $f(x) = x \ln x - 2$. Jednačinu ćemo zapisati u obliku $\ln x = \dfrac{2}{x}$ i nacrtati grafike funkcija $g(x) = \ln x$ i $h(x) = \dfrac{2}{x}$.



Sa slike se vidi da se jedini koren jednačine $f(x) = 0$ nalazi u intervalu $[2, 3]$. Da bismo mogli da primenimo metod tangente, proverićemo da li važe uslovi:

(1) $f(2) \cdot f(3) < 0$,

(2) Kako je $f'(x) = \ln x + 1$ i $f''(x) = \dfrac{1}{x}$ na intervalu $x \in [2, 3]$, su funkcije $f'(x)$ i $f''(x)$ su pozitivne i neprekidne.

Kako je $f(3) \cdot f''(3) > 0$, monotono opadajući niz aproksimacija se izračunava po formuli:

$$x_0 = 3, \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Gornju granicu greške se ocenjuje sa $\delta(x_n) = \frac{|f(x_n)|}{m}$, gde je $m = \min\limits_{x \in [2,3]} |f'(x)| = 1.69315$. Izračunate vrednosti se nalaze u tabeli.

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\delta(x_n)$
0	3	1.29584	2.09861	0.765342
1	2.38253	0.068478	1.86816	0.040412
2	2.3459	0.000283	1.85267	0.000163

Približno rešenje je $x_2 = 2.3459$, a greška aproksimacije

$$|x_2 - \eta| < 1.63 \cdot 10^{-4}.$$

Zadaci za samostalni rad

1. Lokalizovati najmanji koren jednačine $x^3 - 4x + 2 = 0$.

   Rezultat: $[-3, -1]$.

2. Metodom polovljenja naći približno rešenje jednačine $\cos x - x = 0$ sa greškom manjom od 0.05.

   Rezultat: $[0, 1]$, $x_5 = 0.71875$.

3. Metodom polovljenja naći koren jednačine $e^{-x} - x = 0$, sa greškom manjom od $5 \cdot 10^{-2}$.

   Rezultat: $[0, 1]$, $x_5 = 0.59375$.

4. Metodom sečice izračunati realan koren jednačine $x^3 - 2x^2 - 1 = 0$ sa tolerancijom funkcije manjom od $5 \cdot 10^{-2}$.

   Rezultat: $[2, 3]$, $x_4 = 2.20899$.

5. Metodom sečice rešiti jednačinu $x^2 - e^x + 2 = 0$ sa tolerancijom postpuka manjom od $5 \cdot 10^{-3}$. *Rezultat:* $[1, 2]$, $x_6 = 1.31895$.

6. Metodom tangente naći približno rešenje jednačine $\sin(x + \frac{\pi}{2}) - x = 0$ sa greškom manjom od 10^{-4}.

   Rezultat: $[0, \frac{\pi}{4}]$, $x_2 = 0.739085$.

7. Metodom tangente izračunati manji pozitivan koren jednačine $x^3 - 5x + 1 = 0$ sa tolerancijom funkcije manjom od 10^{-5}.

   Rezultat: $[0, 1]$, $(x_0 = 0)$, $x_2 = 0.201639$.