ЗАД: Трапезном формулом израчунати интеграл

$$\int_0^1 \frac{e^{-x}}{x+1}\,dx \quad \text{са грешком} \quad \varepsilon = 0.005$$

РЈЕШЕЊЕ: $\frac{b-a}{12} h^2 M_2 < \varepsilon$, $M_2 = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$, $h = \frac{b-a}{m}$

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{x+1} = e^{-x}(x+1)^{-1}, \quad f'(x) = \frac{-(x+2)e^{-x}}{(x+1)^2}$$

$$f''(x) = e^{-x}\left[(x+1)^{-1} + 2(x+1)^{-2} + 2(x+1)^{-3}\right]$$

$$M_2 = \max_{x\in[0,1]} |f''(x)| = |f''(0)| = 5$$

$$\frac{1}{12} h^2 \cdot 5 < 0{,}005 \Rightarrow h < 0{,}1095 \Rightarrow \boxed{h = 0.1}, \quad \boxed{m = 10}$$

x_i	$f(x_i)$
0	1
0.1	0.8226
0.2	0.6823
0.3	0.5699
0.4	0.4788
0.5	0.4044
0.6	0.3430
0.7	0.2921
0.8	0.2496
0.9	0.2140
1	0,184

$$\int_0^1 \frac{e^{-x}}{x+1}\,dx \approx \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\big(f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)+f(x_5)+f(x_6)+f(x_7)+f(x_8)+f(x_9)\big)+f(x_{10})\right]$$

$$\int_0^1 \frac{e^{-x}}{x+1}\,dx \approx \frac{0{,}1}{2}\left(1{,}184 + 2\cdot 4{,}0567\right) \approx 0{,}4649$$

Зад: Користећи Симпсонову формулу израчунати са грешком $\varepsilon = 10^{-4}$ интеграл $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$.

Решење:

$$f(x) = e^{-x^2}, \quad f'(x) = -2x\,e^{-x^2}, \quad f''(x) = e^{-x^2}(4x^2-2)$$

$$f'''(x) = e^{-x^2}(12x-8x^3), \quad f^{IV}(x) = e^{-x^2}(16x^4-48x^2+12)$$

$$f^{V}(x) = 8x\,e^{-x^2}(-4x^4+8x^3+12x^2-15)$$

$$f^{V}(x) = 0 \Leftrightarrow x=0 \ \vee \ -4x^4+8x^3+12x^2-15=0$$

$$M_4 = \max_{x\in[0,1]} |f^{IV}(x)| = \max_{x\in[0,1]} \left|\frac{16x^4-48x^2+12}{e^{x^2}}\right| \Rightarrow M_4 = 12$$

$$\frac{b-a}{180} h^4 \cdot M_4 < \varepsilon \Rightarrow \frac{h^4\cdot 12}{180} < 10^{-4} \Rightarrow h < 0{,}197$$

$h = 0.125$, $\quad m = 8$

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0)+f(x_8)+2(f(x_2)+f(x_4)+f(x_6))+4(f(x_1)+f(x_3)+f(x_5)+f(x_7))\right]$$

x_i	$f(x_i)$
0	1
0.125	0,9845
0.25	0.9394
0.375	0.8688
0.5	0.7788
0,625	0,6766
0.75	0.5698
0.875	0.4650
1	0.3679

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx \frac{0{,}125}{3}\left[1{,}3679 + 2\cdot 2{,}288 + 4\cdot 2{,}9949\right] \approx \underline{0{,}7468}$$

3.13: Користећи Симпсонову формулу израчунати са грешком $\varepsilon = 10^{-4}$ интеграл $\int_0^1 \sin x^2\,dx$.

Рјешење: $f(x) = \sin x^2$, $f'(x) = 2x\cos x^2$, $f''(x) = 2\cos x^2 - 4x^2 \sin x^2$

$f'''(x) = -12x\sin x^2 - 8x^3\cos x^2$, $f^{IV}(x) = -12\sin x^2 - 48x^2\cos x^2 + 16x^4 \sin x^2$

$|f^{IV}(x)| = |-12\sin x^2 - 48x^2\cos x^2 + 16x^4\sin x^4| \le 76 \Rightarrow M_4 = 76$

$$\boxed{h^4 M_4 \frac{b-a}{180} < \varepsilon \qquad h = \frac{b-a}{n}}$$

$\Rightarrow h^4 \cdot 76 \cdot \frac{1}{180} < 10^{-4} \Rightarrow h^4 < \frac{180}{76} \cdot 10^{-4} \Rightarrow \underline{h < 0{,}124}$

$\frac{1}{n} < 0{,}124 \Rightarrow n > 8{,}065 \Rightarrow \boxed{n = 10}$

$\boxed{h = 0{,}1}$

$$\int_0^1 \sin x^2\,dx \approx \frac{h}{3}\Big[f(x_0) + f(x_{10}) + 2\big(f(x_2)+f(x_4)+f(x_6)+f(x_8)\big) + 4\big(f(x_1)+f(x_3)+f(x_5)+f(x_7)+f(x_9)\big)\Big]$$

x_i	$f(x_i)$
0	0
0,1	0,01
0,2	0,03999
0,3	0,08988
0,4	0,15932
0.5	0,24740
0.6	0.35227
0.7	0.47063
0.8	0.5972
0.9	0.72429
1	0.84147

$$\int_0^1 \sin x^2\,dx \approx \frac{0{,}1}{3}\left[0.84147 + 2\cdot 1{,}14878 + 4\cdot 1{,}5422\right] \approx \underline{0{,}31026}$$

ЗАД: Користећи Симпсонову формулу израчунати са грешком $\varepsilon = 10^{-4}$ интеграл $\int_0^1 \frac{sh x}{x} dx$

РЈЕШЕЊЕ:

$$sh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \frac{sh x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$$

$$f(x) = \frac{sh x}{x}, \quad f^{IV}(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)\, x^{2n-4}}{(2n+1)!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n-4}}{(2n+1)(2n-4)!}$$

$$M_4 = \max_{x\in[0,1]} |f^{IV}(x)|, \quad M_4 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\overbrace{|x^{2n-4}|}^{<1}}{(2n+1)(2n-4)!} < \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n-4)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} = ch 1$$

$$M_4 < ch 1, \quad ch x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad ch 1 = 1,54308$$

$$\boxed{M_4 = 1,54} \quad \frac{b-a}{180} h^4 M_4 < 10^{-4} \Rightarrow h^4 < \frac{180}{1,54} \cdot 10^{-4} \Rightarrow h < 0,329$$

$$\boxed{h = 0.25, \quad n = 4}$$

$$f(0) = \lim_{x\to 0} \frac{sh x}{x} = 1$$

x_i	$f(x_i)$
0	1
0.25	1.01045
0.5	1.04219
0.75	1.09642
1	1.1752

$$\int_0^1 \frac{sh x}{x} \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + f(x_4) + 2\cdot f(x_2) + 4(f(x_1) + f(x_3))\right]$$

$$\int_0^1 \frac{sh x}{x} \approx \frac{0.25}{3}(2.1752 + 2.08438 + 8.42748) \approx \underline{\underline{1,0573}}$$

Зад: Користећи Симпсонову формулу израчунати са грешком $\varepsilon = 10^{-4}$ интеграл $\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x} dx$.

Рјешење: $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$, $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $e^x - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!}} \quad f^{IV}(x) = \sum_{n=5}^{\infty} \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{n!} x^{n-5}$$

$$|f^{IV}(x)| = \sum_{n=5}^{\infty} \frac{\cancel{(n-1)(n-2)(n-3)}(n-4)\,|x^{n-5}|}{\cancel{n!}} < \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n(n-5)!} < \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(n-5)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

$$|f^{IV}(x)| < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_4 = 2{,}7}$$

$$\frac{b-a}{180} h^4 M_4 < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad h^4 < \frac{180}{M_4} \cdot 10^{-4} \quad \Rightarrow \quad h < 0{,}2857$$

$\boxed{h = 0.25}$ $\boxed{n = 4}$

$$f(0) = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

x_i	$f(x_i)$
0	1
0.25	0.1361
0.5	1.2974
0.75	1.4893
1	1.71828

$$\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x} dx \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + f(x_4) + 2f(x_2) + 4(f(x_1) + f(x_3))\right]$$

$$\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x} dx \approx \frac{0.25}{3}\left[2.71828 + 2.5948 + 4 \cdot 2{,}6254\right] \approx \boxed{1.3179}$$

ЗАД: Користећи Симпсонову формулу израчунати са грешком $\varepsilon = 10^{-4}$ интеграл $\int_0^1 \frac{\operatorname{ch}x}{\sqrt{x}}\,dx$

Решење:

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{ch}x}{\sqrt{x}} = \left| \begin{array}{l} x = t^2 \\ dx = 2t\,dt \end{array} \quad \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 1 \\ \hline t & 0 & 1 \end{array} \right| = 2\int_0^1 \operatorname{ch}t^2\,dt$$

$f(t) = \operatorname{ch}t^2$

$f'(t) = 2t\operatorname{sh}t^2$

$f''(t) = 2\operatorname{sh}t^2 + 4t^2\operatorname{ch}t^2$

$f'''(t) = 12t\operatorname{ch}t^2 + 8t^3\operatorname{sh}t^2$

$f^{IV}(t) = 12\operatorname{ch}t^2 + 48t^2\operatorname{sh}t^2 + 16t^4\operatorname{ch}t^2$

$f^{IV}(0) = 12$, $f^{IV}(1) \approx 99{,}604$

$|f^{IV}(t)| < 100 \Rightarrow M_4 = 100$

$\boxed{\frac{b-a}{180} h^4 \cdot M_4 < \varepsilon}$ $\quad h = \frac{b-a}{n}$, n – паран број

$n > \sqrt[4]{\frac{10^5}{18}} \Rightarrow n > 8{,}633 \Rightarrow \boxed{n = 10}$, $\boxed{h = 0{,}1}$

$$I = 2\frac{h}{3}\left[f(t_0) + f(t_{10}) + 4(f(t_1) + f(t_3) + f(t_5) + f(t_7) + f(t_9)) + 2(f(t_2) + f(t_4) + f(t_6) + f(t_8))\right]$$

t_i	$f(t_i)$
0	1
0.1	1.00005
0.2	1.00080
0.3	1.00405
0.4	1.01283
0.5	1.03141
0.6	1.06550
0.7	1.12247
0.8	1.21189
0.9	1.34638
1	1.54308

$I = \frac{0{,}02}{3}(2.54308 + 4 \cdot 5.50436 + 2 \cdot 4{,}29102) = \frac{0{,}02}{3} \cdot 33{,}14256$

$I = 0{,}22095$

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{ch}x}{\sqrt{x}} \approx 0{,}22095$$

Први колоквијум из Нумеричке анализе и дискретне математике
(Други део-задаци)

Други део колоквијума траје 90 минута. Сваки од задатака бодује се са 30 поена. Кандидат је успешно положио овај део колоквијума, уколико освоји најмање 30 поена. Рад, и поступак решавања задатака можете писати на полеђини листа. Вежбанке и слични додатни папири неће бити прегледани. Молимо Вас да пишете хемијском оловком. Никаква литерарура није дозвољена за време испита.

Презиме и име	Бр. Индекса.	Датум, сала и број са списка
		4.12.2004.

Задатак.	1.	2.	$\sum$	Теорија	Укупно ×0,4
Бодова.					

1. Симпсоновом методом, са тачношћу $2\cdot 10^{-4}$, решити интеграл $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$.

У табели су дате вредности ф-је $\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$

x	f
0.05	0.22351
0.10	0.31570
0.15	0.38585
0.20	0.44424
0.25	0.49481
0.30	0.53954
0.35	0.57960
0.40	0.61572
0.45	0.64841
0.50	0.67801
0.55	0.70479
0.60	0.72895
0.65	0.75064
0.70	0.76999
0.75	0.78709
0.80	0.80203
0.85	0.81488
0.90	0.82570
0.95	0.83455
1.00	0.84147

$$\underline{\underline{I_{0.1}}} = \frac{0.1}{3}\Big[f(0) + 4\times[f(0.1)+f(0.3)+f(0.5)+f(0.7)+f(0.9)] + 2\times[f(0.2)+f(0.4)+f(0.6)+f(0.8)]+f(1.0)\Big]$$

$$= \frac{0.1}{3}\left[0 + 4\times 3.12894 + 2\times 2.59094 + 0.84147\right]$$

$$= \underline{\underline{0.61797}}$$

$$\underline{\underline{I_{0.05}}} = \frac{0.05}{3}\Big[f(0) + 4\times[f(0.05)+f(0.15)+\dots+f(0.95)] + 2\times[f(0.1)+f(0.2)+\dots+f(0.9)]+f(1.0)\Big]$$

$$= \frac{0.05}{3}\left[0 + 4\times 6.22413 + 2\times 5.71988 + 0.84147\right]$$

$$= \underline{\underline{0.61963}}$$

Рунге: $\frac{I_{0.05} - I_{0.1}}{15} = 0.00011 < 2\cdot 10^{-4}$

Дакле, $I \approx \underline{\underline{0.61963}}$