Зад: Користећи уопштену формулу правоугаоника израчунати интеграл $I = \int_1^2 \sqrt{x}\,dx$, разбијајући сегмент $[1,2]$ на десет једнаких дијелова и оцијенити грешку добијене вриједности.

Рјешење: $\int_a^b f(x)dx \approx h(y_{1/2} + y_{3/2} + \dots + y_{M-1/2}) = \sum_{k=1}^{M} h\, y_{k-1/2}$

$= h\sum_{i=0}^{M-1} f(x_i + \frac{h}{2})$

$h = x_k - x_{k-1}$

$|R_M(f)| \le \frac{(b-a)h^2}{24} M_2$, $\quad M_2 = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$

$\boxed{h = \frac{b-a}{M}} \Rightarrow h = 0{,}1$

$\frac{h}{2} = 0.05$

x_i	$x_i + \frac{h}{2}$	$f(x_i + \frac{h}{2})$
1	1.05	1.0247
1.1	1.15	1.0724
1.2	1.25	1.1180
1.3	1.35	1.1619
1.4	1.45	1.2042
1.5	1.55	1.2450
1.6	1.65	1.2845
1.7	1.75	1.3229
1.8	1.85	1.3602
1.9	1.95	1.3964
2		

$\boxed{f''(x) = -\frac{1}{4} x^{-3/2}}$

$\int_1^2 \sqrt{x}\,dx \approx 0{,}1[1.0247 + 1.0724 + 1.1180 + 1.1619 + 1.2042 + 1.2450$

$+ 1.2845 + 1.3229 + 1.3602 + 1.3964]$

$\int_1^2 \sqrt{x}\,dx \approx 1{,}21902$, $\quad M_2 = \max_{x\in[1,2]} |f''(x)| = \frac{1}{4}$

$|R_{10}(f)| \le \frac{(2-1)\cdot(0{,}1)^2}{24}\cdot\frac{1}{4} \approx 0{,}0001$

ПР1: Користећи уопштену трапезну формулу израчунати интеграл $I = \int_1^2 \sqrt{x}\,dx$, разбијајући сегмент $[1,2]$ на десет једнаких дијелова, па оцијенити грешку добијене вриједности.

Рјешење: $n = 10$, $h = \frac{b-a}{n}$, $h = \frac{2-1}{10} \Rightarrow h = 0.1$

$x_0 = 1$, $x_k = x_0 + kh$, $k = 1, 2, \dots 10$

$f(x) = \sqrt{x}$

$y_0 = f(x_0) = \sqrt{x_0} = 1$

$y_1 = \sqrt{1.1} = 1.049$, $y_2 = 1.095$, $y_3 = 1.140$, $y_4 = 1.183$

$y_5 = 1.225$, $y_6 = 1.265$, $y_7 = 1.304$, $y_8 = 1.342$, $y_9 = 1.378$

$y_{10} = 1.414$

$$\boxed{I \approx h\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{k-1} + \frac{y_k}{2}\right)}$$

$$I \approx 0{,}1\left(\frac{1}{2} + 1.049 + 1.095 + 1.140 + 1.183 + 1.225 + 1.265 + 1.304 + 1.342 + 1.378 + \frac{1.414}{2}\right) = \underline{1.218}$$

$$\boxed{R_k(f) \le \frac{(b-a)h^2}{12} M_2, \quad M_2 = \max_{x\in[1,2]} |f''(x)|}$$

$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-1/2}$, $f''(x) = -\frac{1}{4} x^{-3/2} = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$

$M_2 = \max_{x\in[1,2]} |f''(x)| = \frac{1}{4}$

$|R_{10}(f)| \le \frac{(2-1)\cdot(0{,}1)^2}{12} \cdot \frac{1}{4} \approx 0{,}0002$

Можемо писати $I = 1.218 \pm 0{,}0002$

к23.

ПР2: Израчунати $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ трапезном формулом узимајући да је $n=10$. Израчунати грешку

Решење: $h = \frac{b-a}{n}$, $h = \frac{1}{10} = 0,1$, $f(x) = \frac{1}{1+x}$

$x_0 = 0$, $x_1 = 0,1$, . . . , $x_{10} = 1$

$y_0 = 1$, $y_1 = 0,9091$, $y_2 = 0,8333$, $y_3 = 0,7692$, $y_4 = 0,7143$

$y_5 = 0,6667$, $y_6 = 0,6250$, $y_7 = 0,5882$, $y_8 = 0,5556$,

$y_9 = 0,5263$, $y_{10} = 0,5$

$$I \approx \frac{1}{10}\left(\frac{1+0,5}{2} + 0,9091 + 0,8333 + 0,7692 + 0,7143 + 0,6667 + 0,6250 + 0,5882 + 0,5556 + 0,5263\right) \approx \underline{\underline{0,6938}}$$

$f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$, $f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$

$$M_2 = \max_{x\in[0,1]} |f''(x)| = 2$$

$$|R_{10}(f)| \le \frac{(b-a)\cdot h^2}{12} M_2 = \frac{1\cdot 0,1^2}{12}\cdot 2 \approx \underline{\underline{0,0017}}$$

тачно решење $\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2 \approx 0,69315$

$$\frac{(b-a)h^2}{12} M_2 < \varepsilon$$

ПР 3: Користећи уопштену Симпсонову формулу израчунати интеграл $I = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$ са тачношћу $\varepsilon = 0{,}0001$.

Решење:

Одредимо корак h.

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad f''(x) = \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}, \quad f'''(x) = \frac{-3x}{\sqrt{(1+x^2)^5}}$$

$$f^{(IV)}(x) = \frac{12x^2-3}{\sqrt{(1+x^2)^7}}, \quad f^{(V)}(x) = \frac{15x(1-4x^2)}{(1+x^2)^{9/2}}, \quad f^{(V)}(x) = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} x=0 \\ x = 1/2 \\ x = -1/2 \notin [0,1] \end{array}$$

макс. достиже у $x=0$

$$M_4 = \max_{x\in[0,1]} |f^{(IV)}(x)| = 3, \quad \boxed{\frac{(b-a)h^4}{180} M_4 < \varepsilon}$$

$$\frac{h^4}{\cancel{180}} \cdot \cancel{3} < 10^{-4} \Rightarrow h^4 < 60 \cdot 10^{-4}$$

$$h^4 < 0{,}006$$

$$h < \sqrt[4]{0{,}006}$$

$$h < 0{,}2783$$

$h = \frac{b-a}{n}$, n - паран број

$n = \frac{b-a}{h}$, ако узмемо $h = 0{,}125$ или $h = 0{,}25$

$n = \frac{1}{0{,}25} \Rightarrow \boxed{n=4}$

$n = \frac{1}{0{,}125} \Rightarrow \boxed{n=8}$

$x_0 = 0, \; x_1 = 0{,}125, \; x_2 = 0{,}25, \; \ldots$

$y_0 = 1, \; y_1 = 1{,}00778, \; y_2 = 1{,}03078, \; y_3 = 1{,}06800, \; y_4 = 1{,}11803$

$y_5 = 1{,}17925, \; y_6 = 1{,}25000, \; y_7 = 1{,}32877, \; y_8 = 1{,}41428$

$$I \approx \frac{0{,}125}{3}\Big[1 + 4(1.00778 + 1.068 + 1.17925 + 1.32877)$$

$$+ 2(1.03078 + 1.11803 + 1.25) + 1.41428\Big] \approx 1.14779$$

тј. $I = 1.1480 \pm 0.0001$.