ЊУТНОВА МЕТОДА (МЕТОДА ТАНГЕНТЕ)

ТЕОРЕМА: Ако функција $f:[a,b]\to R$ има сљедеће особине

1) непрекидно је диференцијабилна, $f\in C^{1}[a,b]$
2) има различит знак на крајевима интервала $[a,b]$, $f(a)\cdot f(b)<0$
3) $\forall x\in[a,b]$ постоји $f''(x)$
4) на интервалу $[a,b]$, $f'(x)$ и $f''(x)$ не мијењају знак и $f'(x)\neq 0$ $\forall x\in[a,b]$
5) тачка $x_0\in[a,b]$ је таква да је $f(x_0)\cdot f''(x_0)>0$

Онда низ $\{x_n\}$ са првим чланом x_0 и одређен формулом

$$\boxed{x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}},\quad n=0,1,\dots$$

конвергира ка јединственом рјешењу $x^*\in[a,b]$ једначине $f(x)=0$.

ОЦЈЕНА ГРЕШКЕ АПРОКСИМАЦИЈЕ x_n

$$|x^*-x_n|\leq\frac{|f(x_n)|}{m_1},\quad m_1=\min_{x\in[a,b]}|f'(x)|$$

x^* - тачно рјешење

ПРИМЈЕДБА: Њутнова метода представља линеаризацију једначине $f(x)=0$, а приближно рјешење x_n је рјешење добијене линеарне једначине.
У једнодимензионалном случају се оне своди на апроксимирање криве њеном тангентом у тачки $(x_n, f(x_n))$

ЗАД 1: Користећи методу тангенте одредити позитивни корјен једначине $x^3-2x^2+3x-5=0$ са тачношћу $\varepsilon=10^{-4}$

РЈЕШЕЊЕ:

$f(x)=x^3-2x^2+3x-5$

x	0	1	2
$f(x)$	-5	-3	1

Значи да функција $f(x)$ има нулу у $[1,2]$.

Ако преполовимо тај сегмент тј. посматрамо сегменте $[1; 1.5]$ и $[1.5; 2]$.

$f(1.5)=3.375-4.5+4,5-5=-1.625$; $\boxed{f(1.5)\cdot f(2)<0}$

Значи да функција има нулу у $[1.5; 2]$

$f'(x)=3x^2-4x+3 > 0 \quad \forall x\in[1.5; 2]$

$f''(x)=6x-4>0 \quad , \forall x\in[1,5; 2]$

из услова $f(2)\cdot f''(2)>0 \Rightarrow \boxed{x_0=2}$

$m_1=\min\limits_{x\in[1.5;\,2]}|f'(x)|$, $\boxed{m_1=f'(1,5)=3,75}$

$$\boxed{x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\ |x^*-x_n|\le\frac{|f(x_n)|}{m_1}<\varepsilon}$$

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$
0	2	1	7
1	1.85714	0.0787	5.91835
2	1.84384	0.00062	5.82388
3	$\boxed{1.84373}$	-0.00002	

$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=2-\frac{1}{7}=1,85714$, $f(x_1)=6.40522-6.89794+0.57142$

$\frac{0,0787}{3,75}=0.021 \not< 10^{-4}$

$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}=1.85714-0,01330=1.84384$

$$\frac{f(x_2)}{m_1} < 10^{-4} \quad \perp$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 1.84373 \quad , \quad \frac{f(x_3)}{m_1} < 10^{-4} \quad T$$

$$\boxed{x^* = 1,84373}$$

ЗАД 2: МЕТОДОМ ТАНГЕНТЕ ОДРЕДИТИ СА ГРЕШКОМ $\varepsilon = 10^{-4}$ НЕГАТИВНИ КОРЈЕН ЈЕДНАЧИНЕ $(1+x)^5 = 1+5x$.

РЈЕШЕЊЕ:

$$\cancel{1+5x} + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5 \cancel{-1-5x} = 0$$

$$x^2(10 + 10x + 5x^2 + x^3) = 0$$

$$f(x) = x^2(x^3 + 5x^2 + 10x + 10)$$

КАКО ТРАЖИМО НЕГАТИВНЕ КОРЈЕНЕ ФУНКЦИЈЕ $f(x)$ ПОСМАТРАМО САМО $x^3 + 5x^2 + 10x + 10 = 0$.

ОЗНАЧИМО СА $g(x) = x^3 + 5x^2 + 10x + 10$

x	-1	-2	-3
$g(x)$	4	2	-2

$\Rightarrow$ $g(x)$ ИМА НУЛУ У $[-3, -2]$

$$g'(x) = 3x^2 + 10x + 10 > 0 \quad , \forall x \in [-3, -2]$$

$$g''(x) = 6x + 10 < 0 \quad , \quad \forall x \in [-3, -2]$$

$$g(-3) \cdot g''(-3) > 0 \Rightarrow \boxed{x_0 = -3} \quad , \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$m_1 = \min_{x \in [-3,-2]} |g'(x)| \quad , \quad g''(x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{5}{3} = -1.66667 \notin [-3, -2]$$

$\Rightarrow$ $g'(x)$ ИМА МИНИМУМ У $x = -1.66667$

$$\boxed{m_1 = |g'(-2)| = 2}$$

n	x_n	$g(x_n)$	$g'(x_n)$
0	-3	-2	7
1	-2.71429	-0.30323	4.95921
2	-2.65315	-0.01145	4.58611
3	-2.65063	-0.00009	

$$x_1 = -3 + \frac{2}{7} = -\frac{19}{7} = -2.71429 \quad , \quad \frac{|-0.30323|}{2} < \varepsilon \ \perp$$

$$x_2 = x_1 - \frac{g(x_1)}{g'(x_1)} = -2.71429 + \frac{0.30323}{4.95921} = -2.65315$$

$$\frac{|g(x_2)|}{m_1} < 10^{-4} \ \perp$$

$$\frac{|g(x_3)|}{m_1} = 0.000045 < 10^{-4}$$

$$\boxed{x^* = -2.65063}$$

ЗАД 3: (13.7.2011.)

Њутновом методом одредити са грешком $\varepsilon = 10^{-5}$ корјен једначине $x^3 - 3x - 8 = 0$.

Рјешење:

$$f(x) = x^3 - 3x - 8$$

x	0	1	2	3
$f(x)$	-8	-10	-6	10

, $f(x)$ има нулу на $[2, 3]$.

Ако преполовимо сегмент

$f(2.5) = 2.5^3 - 3 \cdot 2.5 - 8 = 0.125$,

посматраћемо сегмент $[2; 2.5]$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) > 0 \quad \forall x \in [2; 2.5]$$

$$f''(x) = 6x > 0, \ \forall x \in [2; 2.5]$$

На основу $f(2.5) \cdot f''(2.5) > 0 \Rightarrow x_0 = 2.5$

$m_1 = \min\limits_{x\in[2;2.5]} |f'(x)| \Rightarrow f'(2) = 9 \Rightarrow \boxed{m_1 = 9}$

$f'(2.5) = 15.75$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad |x^* - x_n| \le \frac{|f(x_n)|}{m_1} < \varepsilon$$

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$
0	2.5	0.125	15.75
1	2.492063	0.000464	15.631134
2	$\underline{2.492033}$	−0,000005	$3[(2,5\cdot 10^{-6})^2 - 1)]$

$\frac{15,75}{9} = 1,75 \not< 10^{-5}$

$\frac{15.631134}{9} = 1,73 \not< \varepsilon$

$\frac{|\cancel{3}(25\cdot 10^{-2} - 1)|}{\cancel{9}} = \frac{|2,5\cdot 10^{-11} - 1|}{3} < \varepsilon$

$$\boxed{x^* = 2.492033}$$

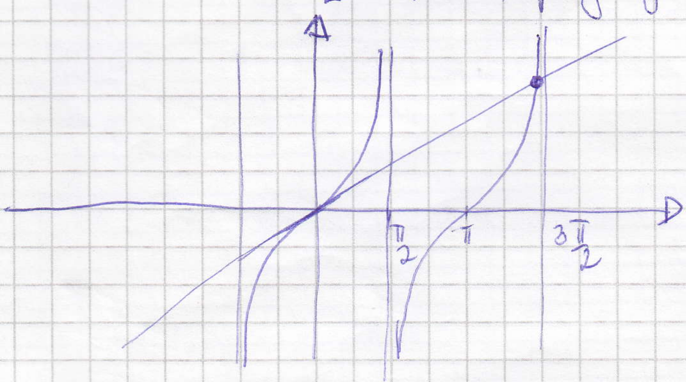
ЗАД 4: (1.07.2010.)

ЊУТНОВОМ МЕТОДОМ ОДРЕДИТИ СА ГРЕШКОМ $\varepsilon = 10^{-4}$ НАЈМАЊИ ПОЗИТИВАН КОРЈЕН ЈЕДНАЧИНЕ $tg\,x = x$.

<u>РЈЕШЕЊЕ:</u>

$$f(x) = tg\,x - x$$

Пошто на $[0, \frac{\pi}{2}]$ вриједи $tg\,x > x$



нула је близу $\frac{3\pi}{2} \approx 4,71$

$f(4) = tg\,4 - 4 = -2,84218$

$f(4.5) = tg\,4.5 - 4.5 = 0,13733$

Посматраћемо на сегменту $[4; 4.5] \in$ III квадранту

$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} > 0, \quad f'(x) = tg^2 x$

$f''(x) = 2\,tg\,x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} > 0$

$f(4.5) \cdot f''(4.5) > 0 \Rightarrow x_0 = 4.5$

$m_1 = \min_{x \in [4; 4.5]} |f'(x)|$, $f'(x) = tg^2 x \Rightarrow m_1 = f'(4)$

$f'(4) = 1,34055$, $\boxed{m_1 = 1,34055}$

$f'(4.5) = 21,50485$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$
0	4,5	0,13733	21,50485
1	4,49361	0,00405	20,22897
2	4,49341	0,00001	

$\frac{|f(x_1)|}{m_1} \not< \varepsilon$

$\frac{|f(x_2)|}{m_1} < \varepsilon$ T

$0,000008 < 10^{-4}$

$\boxed{x^* = 4,49341}$

ЗАД. МЕТОДОМ ТАНГЕНТЕ ОДРЕДИТИ СА ГРЕШКОМ $\varepsilon = 10^{-5}$ НАЈМАЊУ ПОЗИТИВНУ ТАЧКУ ЛОКАЛНОГ МИНИМУМА ФУНКЦИЈЕ $f(x) = \frac{tg x}{x^2}$.

РЈЕШЕЊЕ:

$f(x)$ је дефинисана у $[0, \frac{\pi}{2}]$ па је и непрекидна

$$\lim_{x\to 0+} \frac{tg x}{x^2} \overset{L.П.}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{2x} = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{2x\cos^2 x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}-} \frac{tg x^{\to +\infty}}{x^2_{\to\frac{\pi^2}{4}}} = +\infty$$

па $f(x)$ има локални минимум у коме је $f'(x)=0$.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}\cdot x^{\cancel{2}} - tg x \cdot 2\cancel{x}}{x^{\cancel{4}}} = \frac{\frac{x}{\cos^2 x} - \frac{2\sin x}{\cos x}}{x^3} = \frac{\frac{x - 2\sin x\cos x}{\cos^2 x}}{x^3}$$

$$f'(x) = \frac{x - \sin 2x}{x^3 \cdot \cos^2 x}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x - \sin 2x = 0$

означимо $g(x) = x - \sin 2x$

$g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - \sin 1 = -0{,}34147$

$g(1) = 1 - \sin 2 = 0{,}09070$

$[0.5; 1]$

$g'(x) = 1 - 2\cos 2x$, $g'(0{,}5) = -0{,}0806$, $g'(1) = 1{,}832294$

$g''(x) = 4\sin 2x$

мијења знак на $[0.5; 1]$

$g'(0{,}7) = +$

$g'(x) > 0$

па посматрамо $[0.7; 1]$

$g''(x) > 0$

$g(1) \cdot g''(1) > 0 \Rightarrow \boxed{x_0 = 1}$

$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}$, $m_1 = \min_{x\in[0,7;\,1]} |g'(x)|$

$m_1 = g'(0,7) = 0,66007$

n	x_n	$g(x_n)$	$g'(x_n)$
0	1	0,09070	1,83229
1	0,95050	0,00452	1,64847
2	0,94776	0,00002	1,63809
3	0,94775	0,000005	

$\frac{|g(x_1)|}{m_1} = 0,0068 \not< \varepsilon$

$\frac{|g(x_2)|}{m_1} = 0,00003 \not< \varepsilon$

$\frac{|g(x_3)|}{m_1} = 0,0000075 < \varepsilon$

$\boxed{x^* = 0,94775}$

$g(0,7) =$ ___

ЗАД 2 (23.06.2015.)

Њутновом методом одредити најмању позитивну нулу функције $f(x)=\sin x+\ln x$ са грешком $\varepsilon=10^{-4}$.

Рјешење:

x	$0,5$	1
$f(x)$	$-0,21372$	$0,84147$

$f(a)\cdot f(b)<0$

$[0,5;\ 1]\subset[0,\frac{\pi}{2}]$

$$\left.\begin{aligned} f'(x)&=\cos x+\frac{1}{x}>0\\ f''(x)&=-\sin x-\frac{1}{x^2}<0\end{aligned}\right\}\ \text{за}\ x\in[0,5;\ 1]$$

$f''(x)<0 \Rightarrow f'(x)$ је опадајућа $\Rightarrow m_1=\min\limits_{x\in[0,5;1]}|f'(x)|=|f'(1)|$

$m_1=\cos 1+1=1,54030$

$f(a)\cdot f''(a)\geq 0 \Rightarrow \boxed{x_0=0,5}$

$$\boxed{x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$
0	0,5	-0,21372	2,87758
1	0,57427	-0,01144	2,58093
2	0,57870	-0,00003	

$x_1=0,5+\frac{0,21372}{2,87758}=0,57427$

$\frac{|f(x_1)|}{m_1}=\frac{0,01144}{1,5403}=0,00743\not<\varepsilon$

$x_2=0,57427+\frac{0,01144}{2,58093}=0,57870$

$\frac{|f(x_2)|}{m_1}=0,00002<10^{-4}$

$$\boxed{x^*=0,57870}$$

ЗАД 1: (16.04. 2015.)

Њутновом методом са грешком $\varepsilon = 10^{-4}$ одредити негативан корјен једначине $2x^3 - x^2 - 7x + 5 = 0$.

Рјешење:

x	-1	-2
$f(x)$	9	-1

$[-2, -1]$

$f(x) = 2x^3 - x^2 - 7x + 5$

$f'(x) = 6x^2 - 2x - 7 > 0$

$\forall x \in [-2, 1]$

$f''(x) = 12x - 2 \quad < 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x)$ опадајућа $\Rightarrow$

$m_1 = \min_{x \in [-2,-1]} |f'(x)| = |f'(-1)| = 1$, $\boxed{m_1 = 1}$

тачност: $\frac{|f(x_n)|}{m_1} < \varepsilon$

$\underbrace{f(a) \cdot f''(a) > 0}$ или $f(b) \cdot f''(b) > 0$

$\Downarrow$

$x_0 = -2$

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$
0	-2	-1	21
1	$-1,9524$	$-0,02964$	19,77549
2	$-1,9509$	0	

$x_1 = -2 - \frac{-1}{21} = -1,95238 \doteq -1,9524$

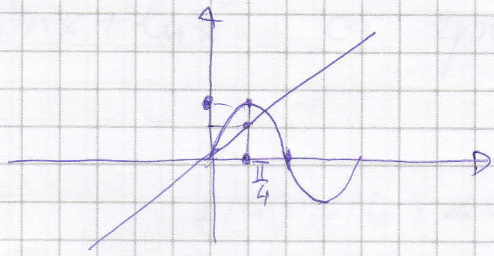
$f(-1,9509) = -14,85029 - 3,80601 + 13,6563 + 5 = 0$ $\quad \frac{|f(x_1)|}{m_1} = 0 < \varepsilon$

Тражено рјешење је $\boxed{x^* = -1,9509}$

ЗАД: Методом тангенте одредити са грешком $\varepsilon = 10^{-5}$ највећи корјен једначине $x = \sin 2x$.

Рјешење: $f(x) = x - \sin 2x$

$\frac{\pi}{4} \approx 0{,}785398$



$f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4} - 1 = -0{,}214602 < 0$

$f(1) = 1 - \sin 2 = 0{,}090703 > 0$

$[\frac{\pi}{4}, 1]$

$f'(x) = 1 - 2\cos 2x > 0 \quad x \in [\frac{\pi}{4}, 1]$

$f''(x) = 4\sin 2x > 0 \Rightarrow f'(x)$ је растућа

$m_1 = \min_{x \in [\frac{\pi}{4}, 1]} |f'(x)| = |1 - 2\cdot\cos\frac{\pi}{2}| = 1$

$f(1)\cdot f''(1) > 0$

$\boxed{x_0 = 1}$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n - \sin 2x_n}{1 - 2\cos 2x_n}$$

$$x_1 = 1 - \frac{1 - 0{,}909297}{1 - 2\cdot(-0{,}416147)} = 1 - \frac{0{,}090703}{1{,}832294} = 0{,}950498,$$

$$x_2 = 0{,}950498 - \frac{0{,}950498 - 0{,}945978}{\underbrace{1 - 2\cdot(-0{,}324232)}_{1{,}648464}} = 0{,}950498 - \underbrace{\frac{0{,}00452}{1{,}648464}}_{0{,}000274} = 0{,}947756$$

$$x_3 = 0{,}947756 - \frac{0{,}947756 - 0{,}947741}{1 + 0{,}638022} = 0{,}947756 - \frac{0{,}000015}{1{,}638022} = 0{,}947747$$

$$x_4 = 0{,}947747 - \frac{\overbrace{0{,}947747 - 0{,}9477472}^{0}}{1 + 0{,}638045} = \boxed{0{,}947747}$$

$$\boxed{x^* = 0{,}947747}$$