

ЗАДА: Методом секанте изračунати позитивни корѐн једначине $x^3 - 0,2x^2 - 0,2x - 1,2 = 0$ са грешком не већом од $\varepsilon = 10^{-3}$.

РЕШЕЊЕ:

$$f(x) = x^3 - 0,2x^2 - 0,2x - 1,2$$

x	0	1	2
f(x)	-1,2	-0,6	5,6

[1, 2]

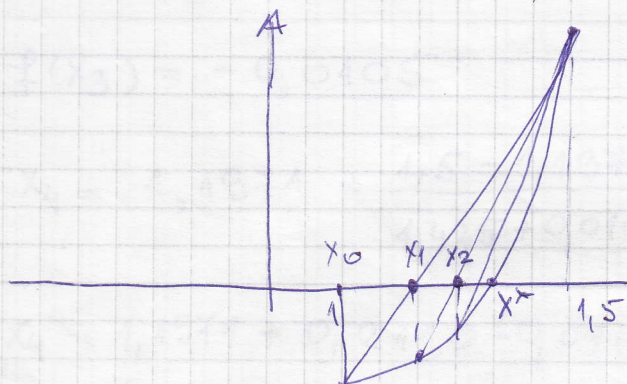
$$f(1,5) = 1,425$$

тражимо нулу на интервалу [1; 1,5]

$$\text{јер је } f(1,5) \cdot f(1) < 0$$

$$f'(x) = 3x^2 - 0,4x - 0,2, \quad f'(x) > 0 \text{ за } x \in [1; 1,5]$$

$$f''(x) = 6x - 0,4, \quad f''(x) > 0 \text{ за } x \in [1; 1,5]$$



$$f''(1,5) \cdot f(1,5) > 0$$

та је фиксирана

$$\text{тачка } \boxed{b = 1,5}$$

$$a, \quad \boxed{x_0 = a = 1}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{b - x_n}{f(b) - f(x_n)} \cdot f(x_n)$$

$$|x_n - x^*| < \frac{|f(x_n)|}{m_1} < \varepsilon$$

$$m_1 = \min_{x \in [1; 1,5]} |f'(x)|$$

$$x_0 = 1$$

$$x_1 = x_0 - \frac{b - x_0}{f(b) - f(x_0)} \cdot f(x_0) = 1 + \frac{1,5 - 1}{1,425 + 0,6} \cdot 0,6 = 1,14814$$

$f'(x) > 0$ for $x \in [1, 1.5]$ 3.
 other je $f'(x)$ pascuyma
 $f'(1) = 2,4 = m_1$

$$f'(1.5) = 5,95$$

$$m_1 = 2,4$$

n	x_n	$f(x_n)$
0	1	-0,6
1	1,14814	-0,1798
2	1,1876	-0,0446
3	1,1971	-0,0105
4	1,1993	-0,0025
5	<u>1,1998</u>	-0,00076

$$x_2 = x_1 - \frac{b - x_1}{f(b) - f(x_1)} \quad f(x_1) = 1,14814 + \frac{1,5 - 1,14814}{1,425 + 0,1798} \cdot 0,1798$$

$$x_2 = 1,14814 + \frac{0,3519}{1,6048} \cdot 0,1798 = 1,14814 + 0,2193 \cdot 0,1798 = 1,1876$$

$$x_3 = 1,1876 + \frac{1,5 - 1,1876}{1,425 + 0,0446} \cdot 0,0446 = 1,1876 + \frac{0,3124}{1,4696} \cdot 0,0446$$

$$x_3 = 1,1876 + 0,2126 \cdot 0,0446 = 1,1971$$

$$f(x_3) = -0,0105$$

$$x_4 = 1,1971 + \frac{1,5 - 1,1971}{1,425 + 0,0105} \cdot 0,0105 = 1,1971 + \frac{0,3029}{1,4355} \cdot 0,0105$$

$$x_4 = 1,1971 + 0,2110 \cdot 0,0105 = 1,1993$$

$$x_5 = 1,1993 + \frac{1,5 - 1,1993}{1,425 + 0,0025} \cdot 0,0025 = 1,1993 + \frac{0,3007}{1,4275} \cdot 0,0025$$

$$x_5 = 1,1993 + 0,21065 \cdot 0,0025 = 1,1998$$

$$\frac{0,00076}{2,4} = 0,0003 < \varepsilon$$

$$x^* = x_5 = 1,1998$$

Задан: Методом сјетнице ријешити једначину
 $x^2 - e^x + 2 = 0$ са тачношћу $\varepsilon = 10^{-4}$.

Рјешење:

$$f(x) = x^2 - e^x + 2$$

x	0	1	2
f(x)	1	0,28172	-1,38906

$[1, 2]$

$$f(1) \cdot f(2) < 0$$

$$f'(x) = 2x - e^x < 0$$

$$f''(x) = 2 - e^x < 0 \text{ за } x \in [1, 2] \Rightarrow f'(x) \text{ опадајућа}$$

$$f(2) \cdot f''(2) > 0 \Rightarrow \text{фиксирате је тачку } b = 2$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{b - x_n}{f(b) - f(x_n)} \cdot f(x_n)$$

$$\boxed{x_0 = 1}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow e^x = 2 \Rightarrow x = \ln 2 = 0,693$$

$$f'(\ln 2) = -0,61371$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{x_1 = 0,61371}$$

$$f'(1) = 0,71828$$

n	x_n	$f(x_n)$
0	1	0,28172
1	1,16862	0,14812
2	1,24873	0,07342
3	1,28645	0,03504
4	1,30400	
5	1,31213	
6	1,31588	
7	1,31760	
8	1,31840	
9	1,31876	
10	1,31893	
11	1,31901	

$$|x_{11} - x_{10}| = 0,00008 < 10^{-4}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{2 - 1}{-1,38906 - 0,28172} \cdot 0,28172 = 1 + \frac{0,28172}{1,67078}$$

$$x_1 = 1 + 0,16862 = 1,16862$$

$$x_2 = 1,16862 + \frac{2 - 1,16862}{1,38906 + 0,14812} \cdot 0,14812$$

$$x_2 = 1,16862 + \frac{0,12314}{1,53718} = 1,24873$$

$$x_3 = 1,24873 + \frac{2 - 1,24873}{1,38906 + 0,07342} \cdot 0,07342 = 1,24873 + \frac{0,05516}{1,46248}$$

$$x_3 = 1,24873 + 0,03772 = 1,28645$$

Задание (14.07.2015.)

Методом секансов определить положительный нуль функции
 $f(x) = e^{-x} - 0,5(x-1)^2 + 1$ с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$.

Решение: $f(x) = e^{-x} - \frac{(x-1)^2}{2} + 1$

x	0	1	2	3
f(x)	$\frac{3}{2}$	$e^{-1} + 1$	$e^{-2} + \frac{1}{2}$	$e^{-3} - 1$

$$f(2,5) = e^{-2,5} - \frac{(2,5-1)^2}{2} + 1 = 0,082085 - 1,125 + 1 = -0,04292$$

$$f(2) = e^{-2} - \frac{1}{2} + 1 = e^{-2} + \frac{1}{2} = 0,63534$$

$$x \in [2; 2,5] \quad f(2) \cdot f(2,5) < 0$$

$$f'(x) = -e^{-x} - x + 1 = -\frac{1}{e^x} - x + 1 < 0$$

$$f''(x) = e^{-x} - 1 = \frac{1}{e^x} - 1 = \frac{1-e^x}{e^x} < 0 \quad \forall x \in [2; 2,5]$$

$$f(2) \cdot f''(2) < 0$$

$$f(2,5) \cdot f''(2,5) > 0 \Rightarrow 2,5 \text{ не подходит, а значит}$$

$$\text{же } x_0 = 2$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) \cdot \frac{b-x_n}{f(b)-f(x_n)}}{f'(x_n)}$$

$$\frac{|f(x_n)|}{m_n} < \varepsilon$$

$$m_n = \min_{x \in [a,b]} |f'(x)|$$

$$f''(x) < 0 \Rightarrow f'(x) \searrow$$

$$m_1 = \min_{x \in [2; 2,5]} |f'(x)| = |f'(2,5)|$$

$$|f'(2)| = 1,13534, \quad |f'(2,5)| = 1,58209$$

$$m_1 = 1,13534$$

$$X_1 = X_0 - f(X_0) \frac{b - X_0}{f(b) - f(X_0)} = 2 + 0,4719 = 2,4719$$

$$X_1 = 2,4719$$

$$f(X_1) = 0,0012$$

$$\frac{|f(X_1)|}{m_1} < \varepsilon$$

$$1,0583 \cdot 10^{-3}$$

$$X_2 = 2,4727$$

$$f(X_2) = 0,0002$$

$$\frac{|f(X_2)|}{m_1} = 1,76 \cdot 10^{-4}$$

$$X_3 = 2,4728$$

$$f(X_3) = -0,0003$$

$$\frac{|f(X_3)|}{m_1} = 0,00264$$

$$X_4 = 2,4726$$

$$f(X_4) = 0,0001$$

$$\frac{|f(X_4)|}{m_1} = 8,8 \cdot 10^{-5} < \varepsilon$$

$$X_4 = X^* = 2,4726$$