ИНТЕРПОЛАЦИЈА

ЛАГРАНЖОВ ИНТЕРПОЛАЦИОНИ ПОЛИНОМ

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \right) y_i \,, \qquad y_i = f(x_i)$$

Оцјена грешке: $f(\bar{x}) - L_n(\bar{x}) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,\omega_{n+1}(\bar{x})$

гдје је $\omega_{n+1}(x) = \prod\limits_{i=0}^{n}(x-x_i)$, $\bar{x} \in I$.

ПРИМЈЕР 1. а) Одредити Лагранжов интерполациони полином који пролази тачкама $(-2,-5)$, $(0,1)$, $(1,1)$ и $(2,7)$.

б) Користећи Лагранжов полином $L_2(x)$ израчунати приближно $\sqrt{116}$ и процијенити грешку.

РЈЕШЕЊЕ.

а)

i	x_i	y_i
0	-2	-5
1	0	1
2	1	1
3	2	7

$$L_3(x) = \sum_{i=0}^{3} \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \right) y_i = x^3 - x + 1$$

б) Нека је $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 100$, $x_1 = 121$, $x_2 = 144$, $I = [100, 144]$

$$|\sqrt{\bar{x}} - L_2(\bar{x})| \leq \frac{1}{3!} \max_{x\in I} |f'''(x)| \cdot |\omega_2(\bar{x})|$$

Рачунајмо на 3 децимале.

$$f'''(x)=\frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}, \quad \max_{x\in I}|f'''(x)|=f'''(100)=\frac{3}{8}\cdot 10^{-5}$$

$$L_2(116)=\dots=10,769, \quad |\omega_2(116)|=16\cdot 5\cdot 28.$$

$$|\sqrt{116}-L_2(116)|\leq \frac{1}{3!}\cdot\frac{3}{8}\cdot 10^{-5}\cdot 16\cdot 5\cdot 28=1,4\cdot 10^{-3}.$$

Дакле, са грешком $\varepsilon=1,4\cdot 10^{-3}$ је $\sqrt{116}=10,769$.

ПРИМЈЕР 2. а) Одредити интерполациони полином $L_4(x)$ за функцију $x\to|x|$, ако су интерполациони чворови у тачкама чије су апсцисе $x=-2,-1,0,1,2$.

б) Израчунати максималну грешку апроксимације на сегменту $[-2,2]$.

РЈЕШЕЊЕ. а) Како су чворови симетрични у односу на тачку $x=0$ и функција $x\to|x|$ парна, слиједи да је $L_4(x)$ парна функција, тј. $L_4(x)=ax^4+bx^2+c$.

Из $L_4(x)=|x|$ за $x=0,1,2$ добијамо систем

$$c=0, \quad a+b+c=1, \quad 16a+4b+c=2,$$

одакле је $a=-\frac{1}{6}$, $b=\frac{7}{6}$, $c=0$, тј.

$$L_4(x)=-\frac{1}{6}x^4+\frac{7}{6}x^2.$$

б) За $x\geq 0$ грешка је $R(x)=-\frac{1}{6}x^4+\frac{7}{6}x^2-x$. Грешка достиже екстремну вриједност у оним тачкама за које је $R'(x)=0$, тј. $-\frac{2}{3}x^3+\frac{7}{3}x-1=0$. Одавде добијамо два

корјена у интервалу $(0,2)$, и то
$x_1 = 0,45559$ и $x_2 = 1,60096$ (са 5 децимала).
За ове вриједности имамо

$$|R(x_1)| \approx 0,22061 \quad \text{и} \quad |R(x_2)| \approx 0,29440.$$

Према томе, за грешку важи неједнакост

$$|R(x)| < 0,2945 \quad (-2 \leq x \leq 2).$$

ЊУТНОВ ИНТЕРПОЛАЦИОНИ ПОЛИНОМ

Први Њутнов интерполациони полином (за интерполацију унапријед)

$$P_n(x) = P_n(x_0 + qh) = f_0 + q\Delta f_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \dots + \frac{q(q-1)\cdots(q-n+1)}{n!}\Delta^n f_0, \quad q = \frac{x - x_0}{h}.$$

Други Њутнов интерполациони полином (за интерполацију уназад)

$$P_n(x) = P_n(x_0 + qh) = f_0 + q\Delta f_{-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 f_{-2} + \dots + \frac{q(q+1)\cdots(q+n-1)}{n!}\Delta^n f_{-n},$$

$\boxed{f_0 = f_n}$

1. Примјеном првог Њутновог интерполационог полинома наћи суму

$$S_n = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2.$$

РЈЕШЕЊЕ. Како је $\Delta S_n = S_{n+1} - S_n = (n+1)^2$,
$\Delta^2 S_n = (n+2)^2 - (n+1)^2 = 2n+3$, $\Delta^3 S_n = 2n+5-(2n+3) = 2$,
$\Delta^4 S_n = 0$,

закључујемо да је S_n полином трећег степена по n. Из првих чланова низа $S_1=1$, $S_2=5$, $S_3=14$ добијамо $\Delta S_1=4$ и $\Delta^2 S_1=5$, док је $\Delta^3 S_1=2$.
За $h=1$ и израчунате коначне разлике први Њутнов интерполациони полином је

$$S_n=1+4(n-1)+\frac{5}{2}(n-1)(n-2)+\frac{2}{6}(n-1)(n-2)(n-3)=$$
$$=\frac{1}{6}(n)(n+1)(2n+1).$$

НАПОМЕНА. Рачунање је једноставније ако узмемо $S_0=0$, $S_1=1$, $S_2=5$. Тада је

$$S_n=0+1\cdot n+\frac{3}{2}n(n-1)+\frac{2}{6}n(n-1)(n-2)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2. Функцију задану табеларно

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	1	0	0	1	1

апроксимирати Њутновим интерполационим полиномима за интерполацију унапријед и уназад. Користећи добијени резултат израчунати приближно $f'(0)$ и $f''(0)$.

РЈЕШЕЊЕ.
Таблица коначних разлика је

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0	-1	1				
			-1			
1	0	0		1		
			0		0	
2	1	0		1		-2
			1		-2	
3	2	1		-1		
			0			
4	3	1				

$x_0=-1, \; h=1$

$x=x_0+qh=-1+q$

$q=x+1$

$$P_I(x)=1-1\cdot(x+1)+\frac{1}{2!}(x+1)x-\frac{2}{4!}(x+1)x(x-1)(x-2)$$

$$P_{II}(x)=1-\frac{1}{2!}(x-3)(x-2)-\frac{2}{3!}(x-3)(x-2)(x-1)-\frac{2}{4!}(x-3)(x-2)(x-1)x$$

$$P_I(x)=P_{II}(x)=\frac{1}{12}\left(-x^4+2x^3+7x^2-8x\right)$$

$$P_I'(x)=\frac{1}{6}\left(-2x^3+3x^2+7x-4\right), \quad P_I''(x)=\frac{1}{6}\left(-6x^2+6x+7\right)$$

Добијамо да је приближно

$$f'(0)\approx P_I'(0)=-\frac{2}{3}, \quad f''(0)\approx P_I''(0)=\frac{7}{6}.$$

3. Функција $f(x)=\sin x$ дата је табелом

x	5°	7°	9°	11°	13°	15°
$f(x)$	0,087156	0,121869	0,156434	0,190809	0,224951	0,258819

Одредити користећи Њутнов интерполациони полином

a) $\sin 6^\circ$,

б) $\sin 14^\circ$.

РЈЕШЕЊЕ.

a) Аргумент $x=6^\circ$ се налази на почетку интервала па ћемо користити први

Њутнов интерполациони полином.
Таблица коначних разлика је

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
5°	0,087156	0,034713	−0,000148	−0,000042
7°	0,121869	34565	− 190	− 43
9°	0,156434	34375	− 233	− 41
11°	0,190809	34142	− 274	
13°	0,224951	33868		
15°	0,258819			

Узмимо $n=3$. Имамо $x_0=5^\circ$, $h=2^\circ$, $q=\frac{6^\circ-5^\circ}{2^\circ}=\frac{1}{2}$.

$$P_3(6^\circ)=P_3(x_0+qh)=0,087156+0,034713\cdot\frac{1}{2}-$$
$$-0,000418\cdot\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)-0,000042\cdot\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)=$$
$$=0,104528$$

(Тачна вриједност на 6 децимала је $\sin 6^\circ = 0,104528$.)

б) Аргумент $x=14^\circ$ је при крају таблице па користимо други Њутнов интерполациони полином.

Имамо $n=3$, $x_n=15^\circ$, $h=2^\circ$, $q=\frac{14^\circ-15^\circ}{2^\circ}=-\frac{1}{2}$

па је

$$P_3(14^\circ)=0,258819-\frac{1}{2}\cdot 0,033868+\frac{1}{8}\cdot 0,000274+$$
$$+\frac{1}{16}\cdot 0,000041=0,241922$$

(Тачна вриједност је $0,2419219\ldots=\sin 14^\circ$, па су опет све цифре сигурне.)