

Писмени дио испита из Математике 1

1. Дискутовати и ријешити систем линеарних једначина у зависности од параметра m

$$mx + y + z = 1$$

$$x + my + z = m$$

$$x + y + mz = m.$$

2. Ријешити матричну једначину $XB - 2B^2 = 3E$, (E -јединична матрица), ако је дато

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Одредити реалне бројеве p и t тако да $1+i$ буде корјен једначине

$$x^5 + 2x^4 + px + t = 0, \text{ па затим ријешити добијену једначину.}$$

4. Дата је тачка $A(-1, 2, 2)$ и права $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{1}$

а) наћи пројекцију тачке A на дату праву,

б) наћи тачку B која је симетрична тачки A у односу на дату праву.

5. Испитати и графички прадставити функцију $f(x) = \sqrt{\frac{x^3 + 4x^2}{x-2}}$.

1.

$$D = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2), D_x = -(\lambda - 1)^2, D_y = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 1), D_z = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 1),$$

$$1^\circ D \neq 0 \text{ за } \lambda \neq -2 \wedge \lambda \neq 1, \text{ систем има јединствено рјешење } \left(-\frac{1}{\lambda + 2}, \frac{\lambda + 1}{\lambda + 2}, \frac{\lambda + 1}{\lambda + 2} \right).$$

$$2^\circ D = 0$$

$$a) \lambda = 1 \Rightarrow D_x = D_y = D_z = 0$$

Систем је неодређен и има бесконачно много рјешења.

$$x + y + z = 1 \Rightarrow x = 1 - y - z \Rightarrow (1 - y - z, y, z), y, z \in R.$$

$$b) \lambda = -2 \Rightarrow D_x \neq 0, D_y \neq 0, D_z \neq 0$$

$$\begin{aligned} -2x + y + z &= 1 \\ x - 2y + z &= -2 \Rightarrow \begin{aligned} 3x - 3y &= 3 \\ 3x - 3y &= 0 \end{aligned} \\ x + y - 2z &= -2 \end{aligned}$$

Систем је противрјачан тј. нема рјешења.

3.

$$\begin{aligned} x_1 = 1 - i, x_2 = 1 + i \Rightarrow \begin{aligned} (1 - i)^4 &= (1 - i)^2(1 - i)^2 = -4 \\ (1 - i)^5 &= -4(1 - i) = -4 + 4i \end{aligned} \\ -4 + 4i + 2(-4) + m(1 - i) + n &= 0 \Rightarrow \begin{aligned} m + n - 12 &= 0 \wedge 4 - m = 0 \\ m &= 4 \\ m + n - 12 + (4 - m)i &= 0 \\ n &= 8 \end{aligned} \end{aligned}$$

$$x^5 + 2x^4 + 4x + 8 = 0$$

$$(x - 1 + i)(x - 1 - i) = x^2 - 2x + 2$$

$$(x^5 + 2x^4 + 4x + 8) : (x^2 - 2x + 2) = x^3 + 4x^2 + 6x + 4$$

$$x^3 + 4x^2 + 6x + 4 = (x + 2)(x^2 + 2x + 2)$$

$$x_3 = -2, x_{4,5} = -1 \pm i$$

4.

а) Нађимо једначину равни која садржи тачку А и окомита је на дату праву. Пресјек дате праве и добијене равни је тражена тачка Р.

$$\vec{p} = (2, -1, 1) \Rightarrow \vec{N} = (2, -1, 1)$$

$$2(x - 1) - (y - 2) + z - 8 = 0$$

$$2x - y + z - 8 = 0$$

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1} \Rightarrow x = 2t + 1, y = -t, z = t \Rightarrow t = 1 \Rightarrow P(3, -1, 1)$$

б)

$$3 = \frac{1 + x_2}{2}, -1 = \frac{2 + y_2}{2}, 1 = \frac{8 + z_2}{2} \Rightarrow x_2 = 5, y_2 = -4, z_2 = -6 \Rightarrow B(5, -4, -6).$$