Електротехнички факултет **19.09.2007.**
Источно Сарајево

Писмени дио испита из Математике 1

1. Дискутовати и ријешити систем линеарних једначина у зависности од параметра a, $(a \in R)$

$$\begin{aligned} ax + 2y + z &= 1 \\ x + 2ay + z &= 2 \\ x + 2y + az &= -1 \quad . \end{aligned}$$

2. Одредити полином $P(x)$ петог степена ако он има двоструку нулу $x = 2i$ и задовољава услове $P(0) = -8,\ P(2) = 32$.

3. Ријешити матричну једначину $AX = A^3 - E$, ако је дато $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

4. Наћи једначину праве која пролази кроз тачку M(3,-2,-4) паралелна је равни $3x$-$2y$-$3z$-7=0 и сијече праву $\frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-1}{2}$.

5. Испитати и графички представити функцију $f(x) = 5 + \frac{4x + x^2}{1 - 2x}$.

Рјешења:

1. $D = 2\left(a^3 - 3a + 2\right) = 2(a-1)^2(a+2)$

$D_x = 2a(a-1),\ D_y = 2\left(a^2 - 1\right)$

$D_z = -2(a^2 + 3a - 4) = -2(a-1)(a+4)$

1° $D \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 1 \wedge a \neq -2$ **систем има јединствено рјешење**

$$\left(\frac{a}{(a-1)(a+2)}, \frac{a+1}{(a-1)(a+2)}, -\frac{a+4}{(a-1)(a+2)}\right)$$

2° $a = 1 \Rightarrow D = 0,\ D_x = D_y = D_z = 0$

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ x + 2y + z &= 2 \\ x + 2y + z &= -1 \quad . \end{aligned}$$

систем је противрјечан тј. нема рјешење

3° $a = -2 \Rightarrow D = 0,\ D_x = 12 \neq 0$ **систем је противрјечан тј. нема рјешење**

2.

$$P(x)=a(x+b)(x^2+4)^2$$

$$P(0)=ab\cdot 16\Rightarrow 16ab=-8\Rightarrow ab=-\frac{1}{2}$$

$$P(2)=a(2+b)\cdot 8^2\Rightarrow 64a(b+2)=32\Rightarrow a(b+2)=\frac{1}{2}$$

$$ab+2a=\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2}+2a=\frac{1}{2}\Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}b=-\frac{1}{2}\Rightarrow b=-1$$

$$P(x)=\frac{1}{2}(x-1)(x^2+4)^2$$

3. $AX=A^3-E\Rightarrow X=A^2-A^{-1}$

$$|A|=-19,\quad A^T=\begin{pmatrix}1&-1&3\\2&2&1\\3&2&-2\end{pmatrix},\ A^{adj}=\begin{pmatrix}-6&7&-2\\4&-11&-5\\-7&5&4\end{pmatrix},\ A^{-1}=\frac{1}{19}\begin{pmatrix}6&-7&2\\-4&11&5\\7&-5&4\end{pmatrix}$$

$$A^2=\begin{pmatrix}8&9&1\\3&4&-3\\-4&6&15\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}8&9&1\\3&4&-3\\-4&6&15\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{6}{19}&-\frac{7}{19}&\frac{2}{19}\\-\frac{4}{19}&\frac{11}{19}&\frac{5}{19}\\\frac{7}{19}&-\frac{5}{19}&\frac{4}{19}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{146}{19}&\frac{178}{19}&\frac{17}{19}\\\frac{61}{19}&\frac{65}{19}&-\frac{62}{19}\\\frac{83}{19}&\frac{119}{19}&\frac{281}{19}\end{pmatrix}.$$

4.

I начин : користећи услов за пресјек двије праве

$$\begin{vmatrix}x_2-x_1&y_2-y_1&z_2-z_1\\l_1&m_1&n_1\\l_2&m_2&n_2\end{vmatrix}=0$$

II начин:

M (3, -2, -4) , $\vec{N}=(3,-2,-3)$

$$p:\ \frac{x-3}{l}=\frac{y+2}{m}=\frac{z+4}{n}\quad,\ \vec{N}\cdot\vec{p}=0\Rightarrow 3l-2m-3n=0$$

$$p_1\cap p:\quad \frac{x-2}{3}=\frac{y+4}{-2}=\frac{z-1}{2}\ \Rightarrow\ \left.\begin{aligned}x&=2+3s\\y&=-4-2s\\z&=1+2s\end{aligned}\right\}$$

$$\frac{x-3}{l}=\frac{y+2}{m}=\frac{z+4}{n}\ \Rightarrow\ \left.\begin{aligned}x&=3+lt\\y&=-2+mt\\z&=-4+nt\end{aligned}\right\}$$

$l=\dfrac{-1+3s}{t}$, $m=\dfrac{-2-2s}{t}$, $n=\dfrac{5+2s}{t}$, **увpстимо у** $3l-2m-3n=0\ \Rightarrow\ s=2$

Пресјечна тачка правих је (8, -8, 5) $\Rightarrow$ $l=5, m=-6, n=9$

$$p: \frac{x-3}{5}=\frac{y+2}{-6}=\frac{z+4}{9}.$$

5.

$$f(x)=\frac{x^2-6x+5}{1-2x}=\frac{(x-5)(x-1)}{1-2x}$$

Д.П. $\forall x\in R\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$

Нуле: $f(x)=0\Rightarrow \frac{(x-5)(x-1)}{1-2x}=0\Rightarrow\ x_1=1,\ x_2=5$

Пресјек са y- осом: $x=0\Rightarrow y=5$

Није ни парна ни непарна

Знак функције

$$f(x)=\frac{(x-5)(x-1)}{1-2x}$$

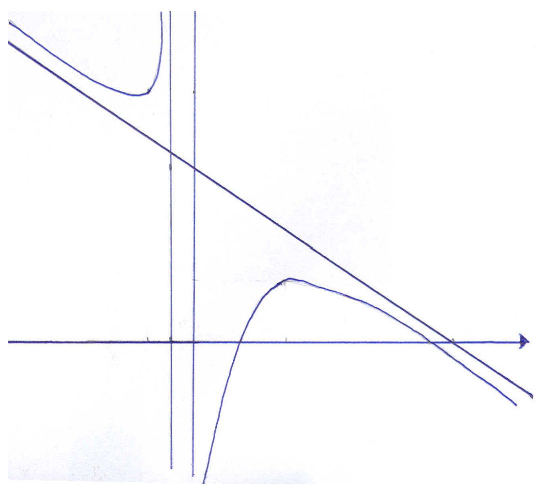
$f(x)>0$ за $x\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\cup(1,5)$

$f(x)<0$ за $x\in\left(\frac{1}{2},1\right)\cup(5,+\infty)$

Асимптоте:

- вертикална

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}_-}\frac{(x-5)(x-1)}{1-2x}=+\infty,\ \lim_{x\to\frac{1}{2}_+}\frac{(x-5)(x-1)}{1-2x}=-\infty$$



-коса

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x-5)(x-1)}{x(1-2x)}=-\frac{1}{2}$$

$$n=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-6x+5}{1-2x}+\frac{1}{2}x\right)=\frac{11}{4}$$

$$y=-\frac{1}{2}x+\frac{11}{4}$$

-нема хоризонталну асимптоту

Екстреми:

$f'(x)=\frac{(2-x)(x+1)}{(1-2x)^2}$, $(-1,4)$ -минимум, $(2,1)$ -максимум

$f''(x)=\frac{18}{(1-2x)^3}$, нема превојне тачке