

Писмени дио испита из Математике 1

1. Дискутовати и ријешити систем линеарних једначина у зависности од параметра a , ($a \in \mathbb{R}$)

$$(a-1)x + 2y - 6z = 1$$

$$(a-2)x + 3y - z = 2$$

$$x + ay + (a-4)z = -2 \quad .$$

2. Дата је једначина $2x^3 + 3x^2 + ax - 2 = 0$. Одредити вриједност параметра $a \in \mathbb{R}$, тако да збир два рјешења те једначине буде једнак -1, а затим ријешити једначину.

3. Ријешити матричну једначину $AXB = E + A$, ако је дато $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. На правој $p: \begin{cases} 2x - y + z - 8 = 0 \\ 4x + 3y - z + 14 = 0 \end{cases}$ одредити тачку удаљену 7 јединица од равни $2x + 3y - 6z - 10 = 0$.

5. Испитати и графички представити функцију $f(x) = x - 2 - \frac{6}{x-1}$.

Рјешења:

1. $D = -4a^2 + 8a + 12 = -4(a^2 - 2a - 3) = -4(a-3)(a+1)$

$$D_x = -12a - 28 = -4(3a+7), \quad D_y = a^2 + 6a - 11, \quad a_{1,2} = -3 \pm 2\sqrt{5}$$

$$D_z = -a^2 - 2a - 1 = -(a+1)^2$$

1° $D \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 3 \wedge a \neq -1$ систем има јединствено рјешење

$$\left(\frac{3a+7}{(a-3)(a+1)}, \frac{a^2+6a-11}{-4(a-3)(a+1)}, \frac{a+1}{4(a-3)} \right)$$

2° $a = 3 \Rightarrow D = 0, D_x = -64$ систем је противрјечан тј. нема рјешење

3° $a = -1 \Rightarrow D = 0, D_x = -16$ систем је противрјечан тј. нема рјешење

2.

$$(1) \quad x_1 + x_2 = -1$$

$$(2) \quad x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{3}{2}$$

$$(3) \quad x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = \frac{a}{2}$$

$$(4) \quad x_1 x_2 x_3 = 1$$

$$\text{Из (1) и (2)} \Rightarrow -1 + x_3 = -\frac{3}{2} \Rightarrow x_3 = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Из (3)} \Rightarrow x_1 x_2 + x_3 (x_1 + x_2) = \frac{a}{2} \Rightarrow x_1 x_2 = \frac{a}{2} - \frac{1}{2} \quad \text{и то уврстимо у (4)}$$

$$\frac{a-1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) = 1 \Rightarrow a = -3$$

$$2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$(2x^3 + 3x^2 - 3x - 2) : \left(x + \frac{1}{2} \right) = 2x^2 + 2x - 4$$

$$2x^2 + 2x - 4 = 2(x^2 + x - 2) = 2(x-1)(x+2)$$

$$x_1 = -2, x_2 = 1, x_3 = -\frac{1}{2}$$

3. $AXB = E + E \Rightarrow X = A^{-1}(E + A)B^{-1}$

$$A + E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, |A| = -8, A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, A^{adj} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 3 \\ -5 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix},$$

$$|B| = -3, B^T = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B^{adj} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, B^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} -3 & -1 & 3 \\ -5 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} -14 & -11 & 22 \\ -2 & 19 & -14 \\ 12 & 18 & -20 \end{pmatrix}$$

4.
$$d = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$7 = \frac{2x + 3y - 6z - 10}{\pm \sqrt{49}} \Rightarrow \pm 49 = 2x + 3y - 6z - 10$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x - y + z - 8 = 0 \\ 4x + 3y - z + 14 = 0 \end{array} \right\}^+ \Rightarrow 6x + 2y + 6 = 0 \Rightarrow y = -3x - 3, x - \text{произвольно}$$

$$z = 8 - 2x + y = -5x + 5$$

$$\pm 49 = 2x + 3(-3x - 3) - 6(-5x + 5) - 10$$

$$49 = 23x - 49 \Rightarrow x = \frac{98}{23}, y = -\frac{363}{23}, z = -\frac{375}{23} \quad \text{тj. } A_1 \left(\frac{98}{23}, -\frac{363}{23}, -\frac{375}{23} \right)$$

$$-49 = 23x - 49 \Rightarrow x = 0, y = -3, z = 5 \quad \text{тj. } A_2 = (0, -3, 5)$$

5.

Д.П. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\text{Нуле: } f(x) = 0 \Rightarrow x - 2 - \frac{6}{x-1} = 0 \Rightarrow \frac{(x+1)(x-4)}{x-1} = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 4$$

Пресјек са y - осом: $x = 0 \Rightarrow y = 4$

Асимптоте:

- вертикална

$$\lim_{x \rightarrow 1_-} \left(x - 2 - \frac{6}{x-1} \right) = +\infty, \lim_{x \rightarrow 1_+} \left(x - 2 - \frac{6}{x-1} \right) = -\infty$$

-коса

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x - 2 - \frac{6}{x-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 - \frac{2}{x} - \frac{6}{x(x-1)} \right) = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(x - 2 - \frac{6}{x-1} - x \right) = -2$$

$$y = x - 2$$

-нема хоризонталну асимптоту

Екстрими:

$$f'(x) = 1 + \frac{6}{(x-1)^2}, \quad 1 + \frac{6}{(x-1)^2} \neq 0 - \text{нема}$$

екстрема

$$f''(x) = -\frac{12}{(x-1)^3}, \quad \text{нема превојне тачке}$$

Знак функције

$$f(x) = \frac{(x+1)(x-4)}{(x-1)}$$

$$f(x) > 0 \text{ за } x \in (-1, 1) \cup (4, +\infty)$$

$$f(x) < 0 \text{ за } x \in (-\infty, -1) \cup (1, 4)$$

