Електротехнички факултет **23.04.2007.**
Источно Сарајево

Писмени дио испита из Математике 1

<u>Група А:</u>

1. **Дискутовати и ријешити систем линеарних једначина у зависности од параметра** $b,\ (b\in R)$

$$\begin{aligned} x+by+z&=3\\ bx+3by+z&=1\\ x+by+3z&=1\ . \end{aligned}$$

2. **Знајући да је збир два корјена једначине** $2x^3-x^2-7x+\lambda=0$ **једнак један, одредити параметар** λ**, а потом наћи нуле полинома.**

3. **У зависности од параметра** a **наћи ранг матрице**

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4\\ a & 4 & 10 & 1\\ 1 & 7 & 17 & 3\\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. **Одредити параметар** a **тако да праве** $l_1:\begin{cases}2x+2y-z-10=0\\ x-y-z-22=0\end{cases}$ **и** $l_2:\ \frac{x+7}{3}=\frac{y-5}{a}=\frac{z-9}{4}$ **буду паралелне, а потом одредити раван која их садржи.**

5. **Испитати и графички представити функцију** $f(x)=(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}$.

***Рјешење*:**

1.

$D=2b(3-b),\ D_x=20b,\ D_y=4(1-2b),\ D_z=2b(b-3)$

1° $D\neq 0 \Leftrightarrow b\neq 0,\ b\neq 3$, систем има јединствено рјешење

$$\left(\frac{10}{3-b},\frac{2(1-2b)}{b(3-b)},-1\right)$$

2° $D=0$

а) $b=0,\ D_x=0,\ D_y=4-$ систем је противрјечан

б) $b=3,\ D_x=60-$ систем је противрјечан

2.

$x_1+x_2=1$

$x_1+x_2+x_3=\frac{1}{2}\Rightarrow x_3=-\frac{1}{2}$

$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-\frac{7}{2}$

$x_1x_2x_3=-\frac{\lambda}{2}$

$x_1x_2=\lambda\Rightarrow\lambda=-3$

$x_1=1-x_2$

$x^2-x-3=0$

$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$

3.

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & 4\\ 4 & a & 10 & 1\\ 7 & 1 & 17 & 3\\ 2 & 2 & 4 & 3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & 4\\ 0 & a-12 & 6 & -15\\ 0 & -20 & 10 & -25\\ 0 & -4 & 2 & -5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & 4\\ 0 & 6 & a-12 & -15\\ 0 & 10 & -20 & 25\\ 0 & 2 & -4 & -5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & 4\\ 0 & 6 & a-12 & -15\\ 0 & 10 & -20 & -25\\ 0 & 2 & -4 & -5\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & a-3\end{pmatrix}$$

r(A)= 3 за $a \neq 0$, r(A)= 2 за $a = 0$.

4.

$$\vec{l}_1 = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 2 & -1\\ 1 & -1 & -1\end{vmatrix} = -3\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k}$$

$z=0$

$2x+2y=10 \Rightarrow x=\dfrac{27}{2},\ y=-\dfrac{17}{2}$

$x-y=22$

$$l_1:\ \frac{x-\frac{27}{2}}{-3}=\frac{y+\frac{17}{2}}{1}=\frac{z}{-4} \quad \Rightarrow\ a=-1$$

$$l_2:\ \frac{x+7}{3}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z-9}{4} \quad \Rightarrow l_2:\ \begin{cases}-x-3y=-8\\ 4y+z=29\end{cases}$$

$z=0,\ y=\dfrac{29}{4},\ x=-\dfrac{55}{4}$ тј. $M_3\left(-\dfrac{55}{4},\dfrac{29}{4},0\right)$

Сада можемо наћи једначину равни која садржи тачке $M_1\left(\dfrac{27}{2},-\dfrac{17}{2},0\right), M_2(-7,5,9), M_3\left(-\dfrac{55}{4},\dfrac{29}{4},0\right)$

Једначина тражене равни је $63x+99y-5z-9=0$

5. Д.П. $\forall x\in R\setminus\{1\}$

Нула функције $(-1,0)$

Пресјек са y- осом $\left(0,e^{-1}\right)$

Знак

$f(x)>0,\ x\in(-1,+\infty)\setminus\{1\}$

$f(x)<0,\ x\in(-\infty,-1)$

Асимптоте:

- вертикална

$$\lim_{x\to 1_-}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}=0,\quad \lim_{x\to 1_+}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty$$

- коса

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+1}{x}e^{\frac{1}{x-1}}=1$$

$$n=\lim_{x\to\pm\infty}\left[(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}-x\right]=1+\lim_{x\to\pm\infty}x\left(e^{\frac{1}{x-1}}-1\right)=1+\lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^{\frac{1}{x-1}}-1}{\frac{1}{x}}=2$$

$y=x+2$

Екстреми

$$f'(x)=e^{\frac{1}{x-1}}+(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}\left(-\frac{1}{(x-1)^2}\right)=e^{\frac{1}{x-1}}\cdot\frac{x(x-3)}{(x-1)^2}$$

$f'(x)=0 \Rightarrow x=0 \vee\ x=3$

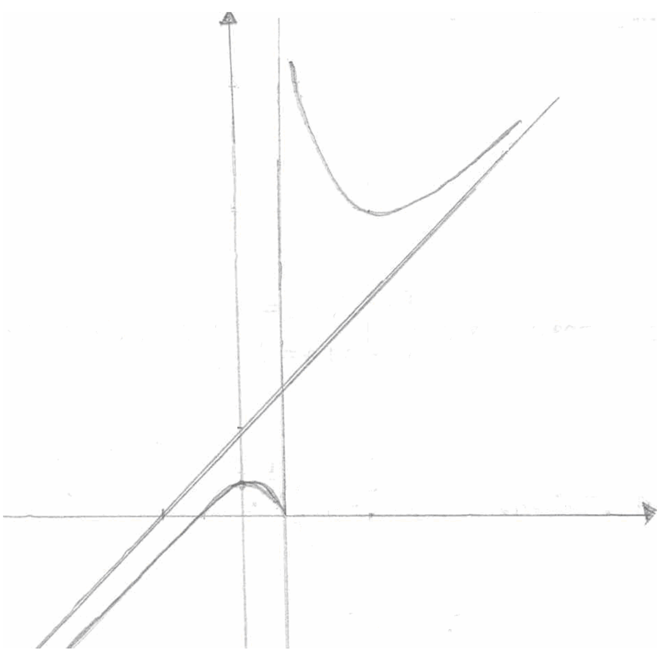
$\left(0,e^{-1}\right)$ максимум, $\left(3,4e^{\frac{1}{2}}\right)$ минимум.

Превојне тачке

$$f''(x)=e^{\frac{1}{x-1}}\left(-\frac{1}{(x-1)^2}\right)\frac{x^2-3x}{(x-1)^2}+e^{\frac{1}{x-1}}\frac{(2x-3)(x-1)^2-2(x-1)\left(x^2-3x\right)}{(x-1)^4}=e^{\frac{1}{x-1}}\frac{5x-3}{(x-1)^4}$$

$f''(x)=0 \Rightarrow x=\frac{3}{5}$

$\left(\frac{3}{5},\frac{8}{5e^2\sqrt{e}}\right)$ превојна тачка



Електротехнички факултет **23.04.2007.**
Источно Сарајево

Писмени дио испита из Математике 1

<u>Група Б:</u>

1. Дискутовати и ријешити систем линеарних једначина у зависности параметра $b,\ (b\in R)$

$$(b-1)x+z=0$$
$$(b+1)x-by-z=-1$$
$$y+bz=1\ .$$

2. Одредити параметре p и q тако да $x=1+\sqrt{3}$ буде нула полинома $P(x)=x^4+px^3+qx^2+6x+2$. За тако одређене параметре p и q наћи остале нуле полинома.

3. У зависности од параметра a наћи ранг матрице

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 5 & 9 \\ 5 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

4. Наћи једначину равни која пролази кроз праву $p:\begin{cases} x+5y+z=0 \\ x-z+4=0 \end{cases}$ и са равни $\alpha:\ x-4y-8z+12=0$ гради угао од 45°

5. Испитати и графички прдставити функцију $f(x)=(x+2)e^{\frac{1}{x}}$.

***Рјешење*:**

1.

$D=-b(b-2)(b+1),\ D_x=b-1,\ D_y=b(3-b),\ D_z=-(b-1)^2$

1° $D\neq 0 \Leftrightarrow b\neq 0,\ b\neq 2,\ b\neq -1$, систем има јединствено рјешење

$$\left(\frac{b-1}{-b(b-2)(b+1)},\frac{b-3}{(b-2)(b+1)},\frac{(b-1)^2}{b(b-2)(b+1)}\right)$$

2° $D=0$

а) $b=0,\ \ D_x=-1,$ систем је противрјечан

б) $b=2,\ \ D_x=1,$ систем је противрјечан

в) $b=-1,\ \ D_x=-2,$ систем је противрјечан

2.

$x_1=1+\sqrt{3}$

$(1+\sqrt{3})^2=4+2\sqrt{3},\ (1+\sqrt{3})^3=10+6\sqrt{3},\ (1+\sqrt{3})^4=28+16\sqrt{3}$

$28+16\sqrt{3}+p\left(10+6\sqrt{3}\right)+q\left(4+2\sqrt{3}\right)+6\left(1+\sqrt{3}\right)+2=0$

$$28+10p+4q+6+2=0$$
$$16+6p+2q+6=0$$
$$10p+4q=-36$$
$$6p+2q=-22$$
$$p=-4,\ q=1$$

$$x_2=1-\sqrt{3},\ (x-x_1)(x-x_2)=x^2-2x-2$$
$$(x^4+px^3+qx^2+6x+2):(x^2-2x-2)=x^2-2x-1$$
$$x_{3,4}=1\pm\sqrt{2}$$

3.

$$\begin{pmatrix}6&3&5&9\\5&2&3&6\\0&1&2&3\\2&1&1&a\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}3&6&5&9\\2&5&3&6\\1&0&2&3\\1&2&1&a\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&2&3\\2&5&3&6\\3&6&5&9\\1&2&1&a\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&2&3\\0&-1&5&0\\0&-1&6&0\\0&-1&2&a-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&2&3\\0&-1&5&0\\0&0&1&0\\0&0&0&a-3\end{pmatrix}$$

$$r(A)=4,\ a\neq 3$$
$$r(A)=3,\ a=3$$

4.

$$x+5y+z+\alpha(x-z+4)=0$$
$$x(1+\alpha)+5y+z(1-\alpha)+4\alpha=0$$
$$\cos 45^\circ=\frac{(1+\alpha,5,1-\alpha)\cdot(1,-4,-8)}{\sqrt{(1+\alpha)^2+25+(1-\alpha)^2}\sqrt{1+16+64}}$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\alpha-3}{\sqrt{2\alpha^2+27}}\Rightarrow\sqrt{2(2\alpha^2+27)}=2(\alpha-3)\Rightarrow\alpha=-\frac{3}{4}$$
$$x+20y+7z-12=0$$

5. Д.П. $\forall x\in R\setminus\{0\}$

Нула функције $(-2,0)$

Знак

$f(x)>0,\ x\in(-2,+\infty)$

$f(x)<0,\ x\in(-\infty,-2)$

Асимптоте:

- вертикална

$$\lim_{x\to 0_-}(x+2)e^{\frac{1}{x}}=0,\quad \lim_{x\to 0_+}(x+2)e^{\frac{1}{x}}=+\infty$$

- коса

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+2}{x}e^{\frac{1}{x}}=1$$
$$n=\lim_{x\to\pm\infty}\left[(x+2)e^{\frac{1}{x}}-x\right]=2+\lim_{x\to\pm\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)=2+\lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=3$$
$$y=x+3$$

Екстреми

$$f'(x)=e^{\frac{1}{x}}+(x+2)e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{x^2-x-2}{x^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow x^2-x-2=0,\ x_1=2,\ x_2=-1$$

$\left(-1,e^{-1}\right)$ максимум, $\left(2,4e^{\frac{1}{2}}\right)$ минимум.

Превојне тачке

$$f''(x)=e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\frac{x^2-x-2}{x^2}+e^{\frac{1}{x}}\frac{(2x-1)x^2-\left(x^2-x-2\right)2x}{x^4}=e^{\frac{1}{x}}\frac{5x+2}{x^4}$$

$$f''(x)=0\Rightarrow x=-\frac{2}{5}$$

$\left(-\frac{2}{5},\frac{8}{5}e^{-\frac{5}{2}}\right)$ превојна тачка