

Писмени дио испита из Математике 1
2. колоквиј

ГРУПА А:

1. Дате су праве $l_1: \frac{x-3}{\lambda} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-2}{0}$ и $l_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{\lambda} = \frac{z-2}{1}$
- а) Наћи најкраће растојање између правих l_1 и l_2 у функцији од λ .
- б) Одредити параметар λ тако да се праве сијекну и за тако добијено λ написати једначину праве која је нормална на раван коју одређују l_1 и l_2 и која пролази кроз пресјечну тачку тих правих.
2. Нека је $f(x) = \begin{cases} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$
- а) Одредити a тако да функција $f(x)$ буде непрекидна у тачки $x = 0$.
- б) За a одређено под а) испитати да ли је функција $f'(x)$ непрекидна у тачки $x = 0$.
3. Испитати и графички представити функцију $f(x) = x \left(\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{1}{x} \right)$.

Рјешења:

1.

а)

$$d = \frac{\left| (\vec{p}_1 \times \vec{p}_2) \cdot \overrightarrow{M_1 M_2} \right|}{\left| \vec{p}_1 \times \vec{p}_2 \right|}, \quad \vec{p}_1 = (\lambda, 2, 0), \quad \vec{p}_2 = (2, \lambda, 1) \Rightarrow \vec{p}_1 \times \vec{p}_2 = 2\vec{i} - \lambda\vec{j} + (\lambda^2 - 4)\vec{k},$$

$$\overrightarrow{M_1 M_2} = (-2, -3, 0), \quad (\vec{p}_1 \times \vec{p}_2) \cdot \overrightarrow{M_1 M_2} = -4 + 3\lambda, \quad \left| \vec{p}_1 \times \vec{p}_2 \right| = \sqrt{\lambda^4 - 7\lambda^2 + 20}$$

$$d = \frac{|3\lambda - 4|}{\sqrt{\lambda^4 - 7\lambda^2 + 20}}$$

б)

$$d = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{4}{3}$$

пресјечна тачка правих l_1 и l_2 је $(1, 1, 2)$

вектор правца тражене праве p је $\vec{p} = \vec{p}_1 \times \vec{p}_2 = \left(2, -\frac{4}{3}, -\frac{20}{9} \right)$

$$p: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-\frac{4}{3}} = \frac{z-2}{-\frac{20}{9}}$$

2.

$$а) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \stackrel{Л.Н.}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2(1+x)} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

б)

$$f'(x) = \frac{-\frac{2x+x^2}{1+x} + 2\ln(1+x)}{x^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{2x+x^2}{1+x} + 2 \ln(1+x)}{x^3} \stackrel{\text{Л.П.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{1+x} + \frac{-x^2-2x-2}{(1+x)^2}}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{3x^2(1+x)^2} = -\frac{1}{3}$$

или

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h - \ln(1+h)}{h^2} - \frac{1}{2}}{h} = \dots = -\frac{1}{3}$$

тј. функција $f'(x)$ је непрекидна у тачки $x = 0$.

3.

Д.П. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Нема нула јер $x = 0$ не припада Д.П.

Како је $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{x} > 0$ ($\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$), онда је $f(x) > 0$ за $x > 0$ и $f(x) < 0$ за $x < 0$

Вертикална асимптота

$$\lim_{x \rightarrow 0 \pm} x \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \right) = 0, \text{ нема вертикалну асимптоту}$$

Коса асимптота

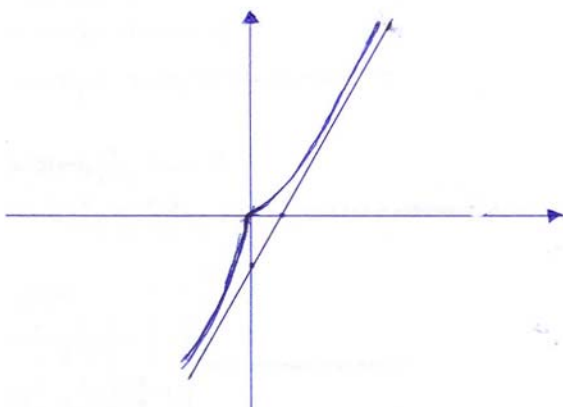
$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \right) = \frac{\pi}{2},$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(x \frac{\pi}{2} - x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} - x \frac{\pi}{2} \right) = - \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = - \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = - \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right)}{-\frac{1}{x^2}} = -1$$

$$y = \frac{\pi}{2}x - 1$$

$$f'(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+1}$$

$$f''(x) = \frac{2}{(x^2+1)^2} \text{ - нема превојне тачке}$$



Писмени дио испита из Математике 1
2. колоквиј

ГРУПА Б:

- Одредити параметар k тако да права $p: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{k}$ лежи у равни $\pi: x+2y-z+2=0$, па за тако добијено k наћи једначину равни која пролази кроз праву p и нормална је на раван π .
- Нека је $f(x) = \begin{cases} (x-2)\operatorname{arctg} \frac{1}{x-2}, & x \neq 2 \\ a, & x = 2 \end{cases}$
 - Одредити a тако да функција $f(x)$ буде непрекидна у тачки $x=2$.
 - За a одређено под а) испитати да ли је функција $f(x)$ диференцијабилна за све $x \in \mathbb{R}$.
- Испитати и графички представити функцију $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x^2}$.

Рјешења:

- $\vec{p} \cdot \vec{N} = 0 \Rightarrow (3, 2, k) \cdot (1, 2, -1) = 0 \Rightarrow k = 7$
 $p: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{7} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y-7=0 \\ 7y-2z+11=0 \end{cases}$
једначина равни која пролази кроз праву је $\pi_1: 2x-3y-7+\lambda(7y-2z+11)=0$
 $2x+(-3+7\lambda)y-2\lambda z+11\lambda-7=0$
 $(2, -3+7\lambda, -2\lambda) \cdot (1, 2, -1) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{4}$
 $\pi_1: 2x-3y-7+\frac{1}{4}(7y-2z+11)=0 \Rightarrow 8x-5y-2z-17=0$
- $\lim_{x \rightarrow 2} (x-2)\operatorname{arctg} \frac{1}{x-2} = 0 \Rightarrow a = 0$
 - $f'(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x-2} - \frac{x-2}{(x-2)^2+1}$, $f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{x-2} - \frac{x-2}{(x-2)^2+1} \right) = \frac{\pi}{2}$ тј. $f(x)$ је диференцијабилна за све $x \in \mathbb{R}$.
- Д.П. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
 $\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0_-} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x^2} \right) &= -\frac{\pi}{2} - 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0_+} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x^2} \right) &= \frac{\pi}{2} - 1 \end{aligned} \right\} \text{ - нема вертикалну асимптоту}$

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\arctg \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x^2}}{x} = 0 \text{ - нема косу асимптоту}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\arctg \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x^2} \right) = 0 \Rightarrow \text{хоризонтална асимптота је } y = 0$$

$$f'(x) = -\frac{(x-1)^2}{(x^2+1)^2} \Rightarrow f(x) \text{ је опадајућа на цијелој области дефинисаности, па у } x=1 \text{ нема екстрем}$$

$$f''(x) = \frac{2(x-1)(x^2-2x-1)}{(1+x^2)^3}, \text{ има превојне тачке у } x_1 = 1-\sqrt{2}, x_2 = 1, x_3 = 1+\sqrt{2}$$

