

Писмени дио испита из Математике 1

1. Дискутовати и ријешити систем линеарних једначина у зависности параметра b , ($b \in \mathbb{R}$)

$$x + y - bz = b$$

$$x + by - z = 1$$

$$bx - y - z = b \quad .$$

2. У полиному $P(x) = x^4 - ax^3 + 8x^2 - 4x + b$ одредити параметре a и b ако је $2 - i\sqrt{3}$ нула полинома, а потом одредити све нуле датог полинома.

3. Ријешити матричну једначину $(A - E)X(A + E) = E + A^2$, ако је матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Наћи једначину равни која садржи праву $\begin{cases} x - 2y + z - 6 = 0 \\ x + z - 2 = 0 \end{cases}$, а налази се на растојању 2 од координатног почетка.

5. Испитати и графички представити функцију $f(x) = 1 - x + \sqrt{\frac{x^3}{x+3}}$.

Рјешење:

1.

$$D = b(b^2 - 1), D_x = (b-1)(b^2 - 1), D_y = -(b-1)^2, D_z = -(b-1)(b^2 + 1)$$

Г $D \neq 0 \Leftrightarrow b \neq 0, b \neq \pm 1$, систем има јединствено рјешење

$$\left(\frac{b-1}{b}, \frac{1-b}{b(b+1)}, -\frac{b^2+1}{b(b+1)} \right)$$

$$2^* D = 0$$

a) $b = 0, D_x = 1$ – систем је противрјечан

б) $b = 1, D_x = D_y = D_z = 0$

$$x + y - z = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y - z = 1 \\ x - y - z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow x - z = 1 \Rightarrow x = 1 + z$$

$$1 + z + y - z = 1 \Rightarrow y = 0$$

$(1 + z, 0, z)$ $z \in R$ – систем има бесконачно много рјешења

в) $b = -1 \Rightarrow D_y = -4$ – систем је противрјечан

2.

$$(2 - i\sqrt{3})^2 = 1 - 4\sqrt{3}i, (2 - i\sqrt{3})^3 = -10 - 9\sqrt{3}i, (2 - i\sqrt{3})^4 = 47 - 8\sqrt{3}i$$

$$10a + b = 47$$

$$9\sqrt{3}a - 36\sqrt{3} = 0, a = 4, b = 7$$

$$x_{1,2} = 2 \pm i\sqrt{3}$$

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - 4x + 7$$

$$(x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 4x + 7) : (x^2 - 4x + 7) = x^2 + 1$$

$$x_{3,4} = \pm i$$

3.

$$A - E = B, A + E = C \Rightarrow X = B^{-1}(E + A^2)C^{-1}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 \\ -1 & 3 & -4 \\ 3 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$|B| = -3, |C| = 13$$

$$B^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, C^{-1} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 10 & -1 & -7 \\ -1 & 4 & 2 \\ -3 & -1 & 6 \end{pmatrix}, X = -\frac{1}{39} \begin{pmatrix} 17 & 10 & -60 \\ -16 & 53 & 6 \\ -22 & 10 & -12 \end{pmatrix}$$

4.

$$x - 2y + z - 6 + \lambda(x + z - 2) = 0$$

$$(1 + \lambda)x - 2y + (1 + \lambda)z - 6 - 2\lambda = 0$$

$$2 = \frac{|-6 - 2\lambda|}{\sqrt{(1 + \lambda)^2 + 4 + (1 + \lambda)^2}} \Rightarrow 2\sqrt{2\lambda^2 + 4\lambda + 6} = |-6 - 2\lambda| \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0,$$

$$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$$

$$2x - y + z - 6 = 0, y + 2 = 0$$

5. Д.П. $\frac{x}{x-3} \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -3) \cup [0, +\infty)$

Нула функције

$$\sqrt{\frac{x^3}{x+3}} = x-1 \Big| ^2, \quad x-1 \geq 0$$

$$x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$$

Нула функције је у $x_1 = \frac{5 + \sqrt{13}}{2}$, друго рјешење не узимамо јер је мање од 1

Пресјек са у- осом (0,1)

Знак

$$f(x) > 0, \quad \sqrt{\frac{x^3}{x+3}} = x-1 \Big| ^2, \quad x-1 \geq 0$$

Асимптоте:

- вертикална

$$\lim_{x \rightarrow (-3)_+} \left(1 - x + \sqrt{\frac{x^3}{x+3}} \right) = +\infty$$

- коса

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - x + x\sqrt{\frac{x}{x+3}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} - 1 + \sqrt{\frac{x}{x+3}} \right) = 0$$

$$k_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - x - x\sqrt{\frac{x}{x+3}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} - 1 - \sqrt{\frac{x}{x+3}} \right) = -2$$

$$n_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - x + x\sqrt{\frac{x}{x+3}} \right) = 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{\frac{x}{x+3}} - 1 \right) = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$n_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - x - x\sqrt{\frac{x}{x+3}} + 2x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + x - x\sqrt{\frac{x}{x+3}} \right) = 1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(1 - \sqrt{\frac{x}{x+3}} \right) = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

$$y = -2x + \frac{5}{2} \quad (x \rightarrow -\infty)$$

Хоризонтална асимптота је $y = -\frac{1}{2} \quad (x \rightarrow +\infty)$

Екстреми

$$f'(x) = -1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x+3}{x^3} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{2x^3 + 9x^2}{(x+3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{x+3}{x^3} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{2x^3 + 9x^2}{(x+3)^2} = 1$$

$$\left(\frac{x+3}{x^3} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{x^2 (2x+9)^2}{(x+3)^2} = 2 \Big| ^2, \quad 2x+9 > 0$$

$$-27x = 108 \Rightarrow x = -4$$

(-4,13) минимум