

Писмени дио испита из Математике 1

1. Дискутовати и ријешити систем линеарних једначина у зависности од параметра a , ($a \in R$)

$$\begin{aligned}x + y - z &= 1 \\(2a + 1)x + ay + z &= a + 2 \\(a + 1)x + y + z &= a + 1 \quad .\end{aligned}$$

2. Дата је једначина $x^3 + 2x^2 - 5x + a = 0$. Одредити вриједност параметра $a \in R$, тако да збир два рјешења те једначине буде једнак 1, а затим ријешити једначину.

3. У зависности од параметра a наћи ранг матрице

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ a & 2 & 2 & 2 \\ 9 & 9 & a & 3 \end{pmatrix}.$$

4. а) Израчунати запремуну тетраедра ограниченог равнима $x + y + z - 1 = 0$, $x - y - 1 = 0$, $x - z - 1 = 0$, $z - 2 = 0$.

- б) Израчунати висину тетраедра спуштену из тјемена које лежи у равни Oyz .

5. Испитати и графички представити функцију $f(x) = 3 - x + \sqrt{\frac{(x-2)^3}{x+1}}$.

Рјешење:

1.

$$D = (a+1)(a-2), D_x = a^2 + a - 4, D_y = (a+2)(1-a), D_z = a(1-a)$$

1* $D \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -1, a \neq 2$, систем има јединствено рјешење

$$\left(\frac{a^2 + a - 4}{(a+1)(a-2)}, \frac{(1-a)(a+2)}{(a+1)(a-2)}, \frac{a(1-a)}{(a+1)(a-2)} \right)$$

2* За $a = -1 \vee a = 2$ систем је противрјечан јер је $D_x \neq 0$.

2.

$$x_1 + x_2 + x_3 = -2 \quad \Rightarrow \quad 1 + x_3 = -2 \Rightarrow x_3 = -3$$

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = -5 \quad \Rightarrow \quad x_1 x_2 + x_3 (x_1 + x_2) = -5 \Rightarrow x_1 x_2 = -2$$

$$x_1 x_2 x_3 = -a \quad \Rightarrow \quad a = -6$$

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$(x^3 + 2x^2 - 5x - 6) : (x+3) = x^2 - x - 2$$

$$x_1 = 2, x_2 = -1$$

3.

$$|A| = (a+6)(a-2), r(A) = 4 \text{ ако је } a \neq -6, a \neq 2, r(A) = 3 \text{ ако је } a = -6 \vee a = 2.$$

4.

а)

$$\left. \begin{array}{l} x+y+z-1=0 \\ x-y-1=0 \\ x-z-1=0 \end{array} \right\} \Rightarrow A(1, 0, 0) \quad \left. \begin{array}{l} x+y+z-1=0 \\ x-y-1=0 \\ z-2=0 \end{array} \right\} \Rightarrow B(0, -1, 2) \quad \left. \begin{array}{l} x+y+z-1=0 \\ x-z-1=0 \\ z-2=0 \end{array} \right\} \Rightarrow C(3, -4, 2)$$

$$\left. \begin{array}{l} x-y-1=0 \\ x-z-1=0 \\ z-2=0 \end{array} \right\} \Rightarrow D(3, 2, 2)$$

$$\overrightarrow{AC} = (2, -4, 2), \overrightarrow{AD} = (2, 2, 2), \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -12\vec{i} + 12\vec{k}$$

$$(\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AB} = (-12\vec{i} + 12\vec{k}) \cdot (-\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}) = 36 \text{ - запремина паралелопипеда}$$

$$\text{Запремина тетраедра је } V_T = \frac{1}{6} V_p = 6$$

$$6) \quad V = \frac{BH}{3} \Rightarrow H = \frac{3V}{B}, \quad B = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}| = 6\sqrt{2}, \quad H = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

5.

$$\text{Д.П.} \quad \frac{x-2}{x+1} \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup [2, +\infty)$$

Нула функције

$$\sqrt{\frac{(x-2)^3}{x+1}} = x-3 \Bigg|, x-3 \geq 0$$

$$x^2 - 9x + 17 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{13}}{2}$$

Нула функције је у $x_1 = \frac{9 + \sqrt{13}}{2} \approx 6.3$, друго рјешење не узимамо јер је мање од 3

Пресјек са y- осом нема

Знак

$$f(x) > 0, \sqrt{\frac{x^3}{x+3}} = x-1 \Bigg|, x-1 \geq 0$$

Асимптоте:

- вертикална

$$\lim_{x \rightarrow (-1)_-} \left(3 - x + \sqrt{\frac{(x-2)^3}{x+1}} \right) = +\infty$$

- коса

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - x + (x-2)\sqrt{\frac{x-2}{x+1}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{x} - 1 + \frac{x-2}{x} \sqrt{\frac{x}{x+3}} \right) = 0$$

$$k_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - x - (x-2)\sqrt{\frac{x-2}{x+1}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{x} - 1 - \frac{x-2}{x} \sqrt{\frac{x}{x+3}} \right) = -2$$

$$n_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 - x + (x-2)\sqrt{\frac{x-2}{x+1}} \right) = 3 + \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{\frac{x-2}{x+1}} - 1 \right) - 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x-2}{x+1}} = \dots = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$n_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3 - x - (x-2)\sqrt{\frac{x-2}{x+1}} + 2x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3 + x - x\sqrt{\frac{x-2}{x+1}} + 2\sqrt{\frac{x-2}{x+1}} \right) = 3 + 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x-2}{x+1}} + \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(1 - \sqrt{\frac{x-2}{x+1}} \right) = 5 + \frac{3}{2} = \frac{13}{2}$$

$$y = -2x + \frac{13}{2} \quad (x \rightarrow -\infty)$$

Хоризонтална асимптота је $y = -\frac{1}{2} \quad (x \rightarrow +\infty)$

Екстреми

$$f'(x) = -1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x+1}{(x-2)^3} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{(x-2)^2 (2x+5)}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{x+1}{(x-2)^3} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{(x-2)^2 (2x+5)}{(x+1)^2} = 1$$

$$\left(\frac{x+1}{(x-2)^3} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{(x-2)^2 (2x+5)}{(x+1)^2} = 2 \Bigg|, 2x+5 > 0$$

$$-27x = -54 \Rightarrow x = -2$$

$(-2, 13)$ минимум