

Писмени дио испита из Математике 1

1. Одредити параметре a, b и c тако да полином $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ буде дјелив са биномима $x - 1$ и $x + 2$, а при дијелењу са биномом $x - 4$ даје остатак 18.
2. Ријешити матричну једначину $AX + X - B = 0$, ако је дато

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Дате су праве $\frac{x-2}{\lambda} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{0}$; $\frac{x-5}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{1}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

а) Одредити λ за које се праве сијеку.

б) За $\lambda \in \mathbb{Z}$ за које су праве мимоилазне наћи једначину заједничке нормале.

4. Испитати и графички представити функцију $f(x) = \frac{x-1}{x^2-5} \cdot e^{\frac{1}{x^2-5}}$.

5. Одредити параметре $a, b \in \mathbb{R}$ тако да функција дефинисана са

$$f(x) = \begin{cases} ax+1, & x \leq 1 \\ 3-bx^2, & x > 1 \end{cases} \quad \text{буде диференцијабилна у тачки } x = 1.$$

6. Тачке A(2, 3, 1), B(4, 1, -2), C(6, 3, 7) и D(-5, -4, 8) су тјемена пирамиде,

а) израчунати запремину пирамиде,

б) израчунати висину која одговара основи ABC.

II колоквиј: 3, 4, 5, 6.

Цијели испит: 1, 2, 3, 4, 5.

Рјешење:

1. На основу Безуове теореме имамо

$$p(1) = 0 \Rightarrow 1 + a + b + c = 0$$

$$p(-2) = 0 \Rightarrow -8 + 4a - 2b + c = 0 \Rightarrow a = -2, b = -5, c = 6$$

$$p(4) = 18 \Rightarrow 64 + 16a + 4b + c = 18$$

- 2.

$$(A + E)X = B \Rightarrow X = (A + E)^{-1}B$$

$$A + E = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \det A = 4, (A + E)^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(A+E)^{**} = \begin{bmatrix} \left| \begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix} \right| & - \left| \begin{smallmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix} \right| & \left| \begin{smallmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix} \right| \\ - \left| \begin{smallmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix} \right| & \left| \begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix} \right| & - \left| \begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix} \right| \\ \left| \begin{smallmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{smallmatrix} \right| & - \left| \begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{smallmatrix} \right| & \left| \begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{smallmatrix} \right| \end{bmatrix}, \quad (A+E)^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 5 & -6 & -2 \\ 3 & -2 & -2 \\ -9 & 10 & 6 \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 5 & -6 & -2 \\ 3 & -2 & -2 \\ -9 & 10 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -7 & -12 & -7 \\ -1 & -8 & -1 \\ 11 & 28 & 11 \end{bmatrix}$$

3. a) $M_1(2,1,2)$, $M_2(5,2,3)$, $\vec{p}_1 = (\lambda, 1, 0)$, $\vec{p}_2(2,3,1)$

праве p_1 и p_2 се сијеку ако је задовољено $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$

б) ако ставимо $\lambda=1$

$$p_1: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{0}, \quad p_2: \frac{x-5}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{1}$$

$\vec{p}$ - вектор правца заједничке нормале правих p_1 и p_2

$$\vec{p} = \vec{p}_1 \times \vec{p}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$$

Нађимо једначину равни која садржи праву p_1 и паралелна је вектору $\vec{p}$

$$\pi: \vec{N} = (\vec{p}_1 \times \vec{p}_2) \times \vec{p}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$$

$$-(x-2) + y - 1 + 2(z-2) = 0 \Rightarrow x - y - 2z + 3 = 0$$

Правна p_2 продира раван π у тачки M_3

$$p_2: x = 2t + 5, y = 3t + 2, z = t + 3 \Rightarrow 2t + 5 - 3t - 2 - 2t - 6 + 3 = 0 \Rightarrow t = 0, M_3(5, 2, 3)$$

Тражена права пролази кроз тачку M_3 и паралелна је вектору $\vec{p}$, њена једначина је

$$p: \frac{x-5}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{1}$$

4. - Д.П. $x^2 - 5 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm\sqrt{5}$ тј. $\forall x \in R \setminus \{\pm\sqrt{5}\}$

- нуле функције: $f(x) = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

- знак функције зависи од $\frac{x-1}{x^2-5}$ јер је $e^{\frac{1}{x^2-5}} > 0, \forall x$ из Д.П.

$$f(x) > 0 \Rightarrow x \in (-\sqrt{5}, 1) \cup (\sqrt{5}, +\infty)$$

$$f(x) < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -\sqrt{5}) \cup (1, \sqrt{5})$$

- вертикална асимптота

$$\lim_{x \rightarrow (-\sqrt{5})_-} \frac{x-1}{x^2-5} \cdot e^{\frac{1}{x^2-5}} = -\infty \cdot \infty = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (-\sqrt{5})^+} \frac{x-1}{x^2-5} \cdot e^{\frac{1}{x^2-5}} = +\infty \cdot 0 = \lim_{x \rightarrow (-\sqrt{5})^+} \frac{x-1}{x^2-5} \stackrel{\text{Л.П.}}{=} \lim_{x \rightarrow (-\sqrt{5})^+} \frac{x^2-5-(x-1) \cdot 2x}{x^2-5} =$$

$$e^{-\frac{1}{x^2-5}} \cdot \frac{2x}{(x^2-5)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-\sqrt{5})^+} \frac{-x^2+2x-5}{2x} \cdot e^{\frac{1}{x^2-5}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow (\sqrt{5})^-} \frac{x-1}{x^2-5} \cdot e^{\frac{1}{x^2-5}} = -\infty \cdot 0 = \bullet \bullet \bullet = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow (\sqrt{5})^+} \frac{x-1}{x^2-5} \cdot e^{\frac{1}{x^2-5}} = +\infty$$

- коса асимптота

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-1}{x(x^2-5)} \cdot e^{\frac{1}{x^2-5}} = 0 \cdot 1 = 0, \text{ нема косу асимптоту}$$

- хоризонтална асимптота

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-1}{x^2-5} \cdot e^{\frac{1}{x^2-5}} = 0 \cdot 1 = 0$$

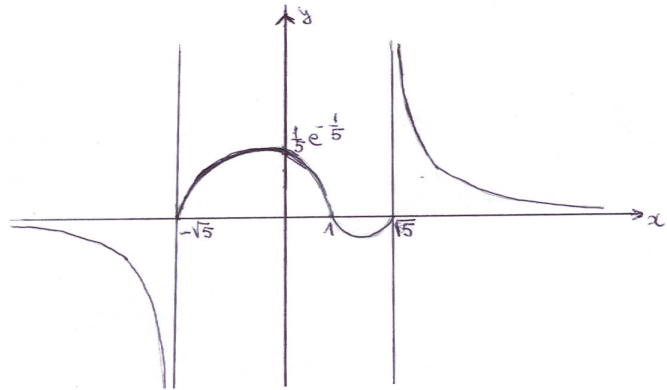
- екстреми

$$f'(x) = \frac{-x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 8x + 25}{(x^2-5)^3} \cdot e^{\frac{1}{x^2-5}}, f'(x) = 0 \Rightarrow -x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 8x + 25 = 0$$

нема рационалних нула, па неможемо одредити екстреми

- пресјек са y – осом

$$x=0, y = \frac{1}{5 \cdot e^{\frac{1}{5}}}$$



5.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (ax+1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3-bx^2) \Rightarrow a+1 = 3-b$$

$$f'(x) = \begin{cases} a, & x \leq 1 \\ -2bx, & x > 1 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} a = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-2bx) \Rightarrow a = -2b$$

$$a=4, b=-2$$

$$6. a) \quad V = \frac{1}{6} (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB} = (2, -2, -3), \overrightarrow{AC} = (4, 0, 6), \overrightarrow{AD} = (-7, -7, 7)$$

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 7 \end{vmatrix} = \frac{154}{3}$$

$$6) h = \frac{6 \cdot V}{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|} = 11 \text{ или } h = pr_{\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}} \overrightarrow{AD} = \frac{\overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC})}{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}$$

Писмени дио испита из Математике 1
-разлика-

1. Одредити константе a , b и c тако да функција $f(x) = \begin{cases} b^2x + 2c - 1 & , x \leq 0 \\ 2ax - b & , 0 < x < 1 \\ 2x^2 - 2bx - c & , 1 \leq x < 2 \\ 3ax + c + 1 & , x \geq 2 \end{cases}$

буде непрекидна.

2. Испитати и графички представити функцију $f(x) = 1 - xe^{-\frac{2}{x}}$.

3. Израчунати $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos x}{\sin^2 x}$

- а) директно
б) Лопиталовим правилом

Рјешење:

1.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0_-} (b^2x + 2c - 1) &= \lim_{x \rightarrow 0_+} (2ax - b) \Rightarrow 2c - 1 = -b \\ \lim_{x \rightarrow 1_-} (2ax - b) &= \lim_{x \rightarrow 0_+} (2x^2 - 2bx - c) \Rightarrow 2a - b = 2 - 2b - c \\ \lim_{x \rightarrow 2_-} (2x^2 - 2bx - c) &= \lim_{x \rightarrow 2_+} (3ax + c + 1) \Rightarrow 8 - 4b - c = 6a + c + 1 \\ a &= \frac{1}{2}, b = 1, c = 0 \end{aligned}$$

2.

- Д.П. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

- Нуле : $1 - xe^{-\frac{2}{x}} = 0 \Rightarrow x \cdot e^{-\frac{2}{x}} = 1$ не могу се одредити

- вертикална асимптота

$$\lim_{x \rightarrow 0_-} \left(1 - xe^{-\frac{2}{x}} \right) = 1 - \lim_{x \rightarrow 0_-} \frac{e^{-\frac{2}{x}}}{\frac{1}{x}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0_+} \left(1 - xe^{-\frac{2}{x}} \right) = 1$$

- коса асимптота

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1}{x} - e^{-\frac{2}{x}} \right) = -1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 - xe^{-\frac{2}{x}} + x \right) = 1 - \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \left(e^{-\frac{2}{x}} - 1 \right) = \bullet \bullet \bullet = 3$$

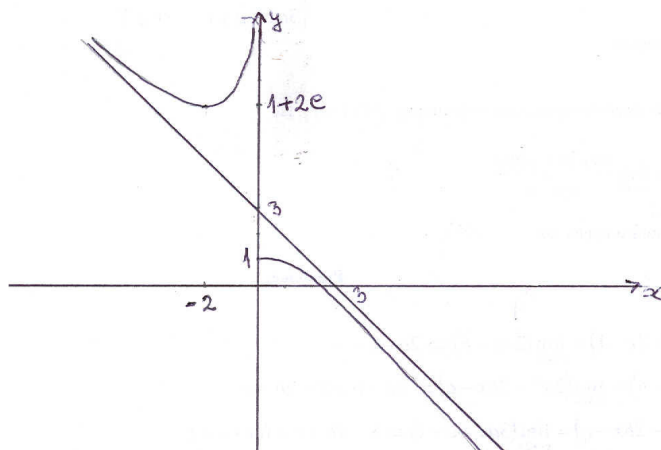
$$y = -x + 3$$

- екстрими

$$f'(x) = -e^{-\frac{2}{x}} \left(\frac{x+2}{x} \right), f'(x) = 0 \Rightarrow x = -2, (-2, 1+2e) \text{ - минимум}$$

- превојне тачке

$$f''(x) = e^{-\frac{2}{x}} \left(-\frac{4}{x^3} \right), \text{ нема превојних тачака}$$



$$3. a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x - \cos x}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x (\cos x - 1)}{1 - \cos^2 x} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{\cos x}{\cos x + 1} - 1 \right) = -\frac{3}{2}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin 2x + \sin x}{2 \sin x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4 \sin x \cos x + \sin x}{2 \sin x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4 \cos x + 1}{2 \cos x} = -\frac{3}{2}$$