Електротехнички факултет 4.07.2006.
Источно Сарајево

Писмени дио испита из Математике 1

1. Дискутовати и ријешити систем линеарних једначина у зависности од параметра a

$$ax + y + \left(a - \frac{1}{2}\right)z = a$$

$$x - 2ay + \left(2a + \frac{3}{2}\right)z = a$$

$$2x - 4y + 5z = -2a\,, \quad a \in R.$$

2. Ријешити матричну једначину $AX - B - C = 0$, ако је дато

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 3 & 3 & 5 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & -4 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Одредити реалне бројеве a и b тако да -3+i буде корјен једначине $x^3 + x^2 + ax + b = 0$, па затим ријешити добијену једначину.

4. Наћи једначину заједничке нормале мимоилазних правих

$$(p_1)\quad \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-1}{2} \quad \text{и} \quad (p_2)\begin{cases} 2x + y - 6 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}.$$

5. Испитати и графички представити функцију $y = e^{\frac{2x}{x^2-1}}$.

6. Израчунати $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$

а) директно
б) Лопиталовим правилом.

Рјешења:

1.

$$D = 2a(a+2),\ D_x = -4a^2(a+2),\quad D_y = 4a^2(a+2),\quad D_z = 4a^2(a+2),$$

1° $D \neq 0$ за $a \neq 0 \wedge \lambda \neq -2$, систем има јединствено рјешење $(-2a, 2a, 2a)$.

2° $D = 0$

а) $a = 0 \Rightarrow D_x = D_y = D_z = 0$

$$y - \frac{1}{2}z = 0$$

$$x + \frac{3}{2}z = 0 \qquad\qquad y = \frac{1}{2}z,\quad x = -\frac{3}{2}z$$

$$2x - 4y + 5z = 0.$$

Систем је неодређен и има бесконачно много рјешења $\left(-\frac{3}{2}z, \frac{1}{2}z, z\right)$, $z \in R$.

б) $a = -2 \Rightarrow D_x = D_y = D_z = 0$

$$\begin{array}{ll} (1) & -2x+y-\frac{5}{2}z=-2 \\ (2) & x+4y-\frac{5}{2}z=-2 \\ (3) & 2x+4y+5z=4 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ll} (1)+(3) & x+y=0 \\ (2)+(3) & x+y=0 \end{array}$$

$$x=-y,\quad \left(-y,y,\frac{6}{5}y+\frac{4}{5}\right),\ y\in R$$

Систем је неодређе, тј. има бесконачно много рјешења.

2.

$$X=A^{-1}(B+C)$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{**}=\frac{1}{24}\begin{bmatrix} 23 & 13 & 4 \\ 7 & 5 & -4 \\ -18 & -6 & 0 \end{bmatrix},\ B+C=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 5 & 5 & -3 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow X=\frac{1}{24}\begin{bmatrix} 142 & 104 & 38 \\ 38 & 16 & -2 \\ -84 & -48 & -36 \end{bmatrix}$$

3.

$$(-3+i)^2=8-6i,\quad (-3+i)^3=-18+26i$$

$$26i-18+8-6i+a(-3+i)+b=0$$

$$20+a=0$$

$$b-3a-10=0 \qquad \Rightarrow a=-20, b=-50$$

$$x_{1,2}=-3\pm i$$

$$(x+3-i)(x+3+i)=x^2+6x+10$$

$$x_{1,2}=-3\pm i,\quad x_3=5\,.$$

4.

$$p_2\begin{cases} 2x+y-6=0 \Rightarrow y=\dfrac{x-3}{-\frac{1}{2}} \\ y+z-1=0 \Rightarrow y=\dfrac{z-1}{-1} \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{x-3}{-1}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{-2}$$

$\vec{p}$ - вектор правца заједничке нормале правих p_1 и p_2

$$\vec{p}=\overrightarrow{p_1}\times\overrightarrow{p_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$$

Нађимо једначину равни која садржи праву p_1 и паралелна је вектору $\vec{p}$

$$\pi:\ \vec{N}=\left(\overrightarrow{p_1}\times\overrightarrow{p_2}\right)\times\overrightarrow{p_1}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix}=7\vec{i}-2\vec{j}-10\vec{k}$$

$$7(x+1)-2(y+2)-10(z-1)=0 \quad \Rightarrow \quad 7x-2y-10z+13=0$$

Права p_2 продире раван π у тачки A

$$p_2:\quad x=3-t, y=2t, z=1-2t \Rightarrow\ t=\frac{8}{3},\ A\left(\frac{1}{3},\frac{16}{3},-\frac{13}{3}\right)$$

Тражена права пролази кроз тачку A и паралелна је вектору $\vec{p}$, њена једначина је

$$p:\frac{x-\frac{1}{3}}{2}=\frac{y-\frac{16}{3}}{2}=\frac{z+\frac{13}{3}}{1}.$$

5.

- Д.П. $x^2-1\neq 0 \Rightarrow \quad \forall x\in R\setminus\{\pm 1\}$
- нема нуле
- знак функције, $y>0\ \forall x$ из Д.П.
- вертикалне асимптоте

$$\lim_{x\to(-1)_-} e^{\frac{2x}{x^2-1}}=0\ ,\ \lim_{x\to(-1)_+} e^{\frac{2x}{x^2-1}}=+\infty,\ \lim_{x\to 1_-} e^{\frac{2x}{x^2-1}}=0\ ,\ \lim_{x\to 1_+} e^{\frac{2x}{x^2-1}}=+\infty$$

- коса асимптота

$k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{e^{\frac{2x}{x^2-1}}}{x}=0$, нема косу асимптоту

- хоризонтална асимптота

$$n=\lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{2x}{x^2-1}}=1$$

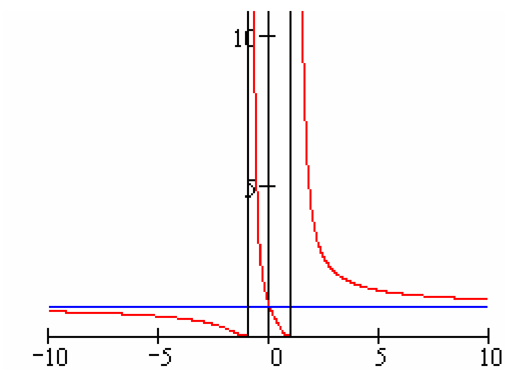
- екстреми

$y'=-2e^{\frac{2x}{x^2-1}}\dfrac{x^2+1}{\left(x^2-1\right)^2}\Rightarrow y'\neq 0\ \forall x$ из Д.П.

тј. функција нема екстрема.

$y'<0\ ,\ \forall x$ из Д.П.

$\Rightarrow$ Функција је монотоно опадајућа $\forall x$ из Д.П.



- пресјек са y – осом

$x=0,\ y=1$

- превојне тачке

$y''=\dfrac{4e^{\frac{2x}{x^2-1}}}{\left(x^2-1\right)^4}\left(x^5+x^4+2x^3+2x^2-3x+1\right),$

нема рационалних нула

6.

а)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x\cos 2x}{x^2\left(1+\cos x\sqrt{\cos 2x}\right)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x\cos 2x}{x^2}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x+\cos^2 x-\cos^2 x\cos 2x}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}+\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x\left(1-\cos 2x\right)}{x^2}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x^2}=\frac{3}{2}.$$

б)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\sqrt{\cos 2x}-\cos x\dfrac{-2\sin 2x}{2\sqrt{\cos 2x}}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\sqrt{\cos 2x}}{2x}+\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\sin 2x}{2x\sqrt{\cos 2x}}=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}.$$