

ГРУПА: А

Писмени дио испита из Математике 1
2. колоквиј

- Наћи једначину равни која је паралелна правама $p_1 : \begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ 3x - z + 2 = 0 \end{cases}$ и $p_2 : \begin{cases} -x - y + 2 = 0 \\ 4x - z - 1 = 0 \end{cases}$ и пролази кроз средину растојања између њих.
- Наћи површину и висину BD троугла ABC ако је $A(1, -2, 8)$, $B(0, 0, 4)$ и $C(6, 2, 0)$.
- Испитати и графички представити функцију $f(x) = \arctg \frac{2x+1}{2x+2}$.
- Одредити параметре $a, b \in \mathbb{R}$ тако да функција дефинисана са

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 2, & x \leq 3 \\ -x^2 + ax + b, & x > 3 \end{cases} \quad \text{буде диференцијабилна у тачки } x = 3$$

Рјешење:

1.

$$\vec{p}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} + 3\vec{k} + 2\vec{j} \quad \vec{p}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} + 4\vec{k} - \vec{j}$$

праве p_1 и p_2 нису паралелне, а како систем :

$$\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ 3x - z + 2 = 0 \\ -x - y + 2 = 0 \\ 4x - z - 1 = 0 \end{cases}$$

нема рјешења то значи да праве p_1 и p_2 немају пресјечних тачака тј. мимоилазне су.

Једначина равни која пролази кроз праву p_1 , а паралелна је са p_2 :

$$2x - y - 1 + \lambda(3x - z + 2) = 0$$

$$x(2 + 3\lambda) - y - \lambda z + 2\lambda - 1 = 0$$

$$\vec{N}_1 \perp \vec{p}_2 \Rightarrow 2 + 3\lambda + 1 - 4\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 3$$

$$\pi_1 : 11x - y - 3z + 5 = 0$$

Једначина равни која пролази кроз праву p_2 , а паралелна је са p_1 :

$$-x - y + 2 + \lambda(4x - z - 1) = 0$$

$$x(-1 + 4\lambda) - y - \lambda z + 2 - \lambda = 0$$

$$\vec{N}_2 \perp \vec{p}_1 \Rightarrow -1 + 4\lambda - 2 - 3\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 3$$

$$\pi_2 : 11x - y - 3z - 1 = 0$$

Ако узмемо тачку $M_1(0, -1, 2)$ са праве p_1 и онда тражимо једначину нормале праве p_1 у тачки M_1 , њен вектор правца је вектор нормале равни π_1 .

$$n : \frac{x}{11} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{-3}$$

Тачка продора те нормале кроз раван π_2 је $M_2\left(\frac{66}{131}, -\frac{137}{131}, \frac{244}{131}\right)$, тачка на средини дужи $\overline{M_1M_2}$ је

$$M_s = \left(\frac{33}{131}, -\frac{134}{131}, \frac{253}{131}\right)$$

Једначина тражене равни пролази кроз тачку M_s , а њен вектор нормале је $\vec{N} = \vec{p}_1 \times \vec{p}_2$

$$\pi : 11\left(x - \frac{33}{131}\right) - \left(y + \frac{134}{131}\right) - 3\left(z - \frac{253}{131}\right) = 0$$

2.

$$P = \frac{1}{2} |\vec{AC} \times \vec{AB}|, \quad \vec{AC} = (5, 4, -8), \quad \vec{AB} = (-1, 2, -4)$$

$$\vec{AC} \times \vec{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 4 & -8 \\ -1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 28\vec{j} + 14\vec{k} \Rightarrow P = \frac{1}{2} \sqrt{28^2 + 14^2} = 7\sqrt{5}, \quad P = \frac{|\vec{AC}| \cdot |\vec{BD}|}{2} \Rightarrow |\vec{BD}| = \frac{2P}{|\vec{AC}|} = \frac{2}{3} \sqrt{21}$$

3.

- Д.П. $2x+2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

- нуле $x = -\frac{1}{2}$

- пресјек са y - осом $x = 0 \Rightarrow y = \arctg \frac{1}{2}$

- знак $f(x) > 0 \Rightarrow \frac{2x+1}{2x+2} > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right), \quad f(x) < 0 \Rightarrow x \in \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$

- вертикална асимптота

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \arctg \frac{2x+1}{2x+2} = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \arctg \frac{2x+1}{2x+2} = -\frac{\pi}{2}$$

нема вертикалних асимптота

- коса асимптота

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\arctg \frac{2x+1}{2x+2}}{x} = 0, \text{ нема косу асимптоту}$$

- хоризонтална асимптота

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \arctg \frac{2x+1}{2x+2} = \frac{\pi}{4}$$

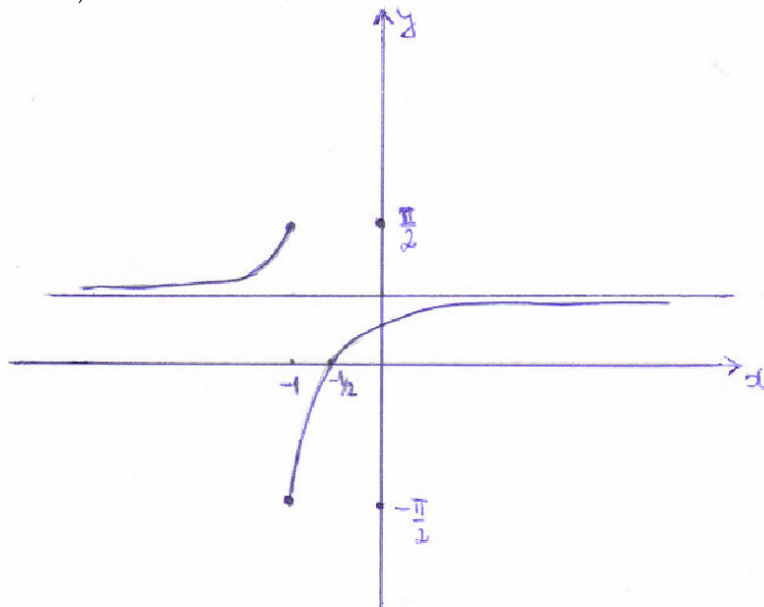
- екстрими

$$f'(x) = \frac{2}{(2x+2)^2 + (2x+1)^2}, \quad f'(x) > 0 \text{ на цијелом домену па је } f(x) \text{ растућа на цијелом домену и нема екстрема}$$

- превојне тачке

$$f''(x) = \frac{-8(4x+3)}{(8x^2+12x+5)^2}, \quad f''(x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{4} \quad f'' > 0 \text{ за } x < -\frac{3}{4} \wedge f'' < 0 \text{ за } x > -\frac{3}{4} \text{ тј. у } \left(-\frac{3}{4}, -\frac{\pi}{4}\right) \text{ је}$$

превојна тачка.



4.

$$\lim_{x \rightarrow 3_-} (x^2 - x - 2) = \lim_{x \rightarrow 3_+} (-x^2 + ax + b)$$

$$3a + b = 13$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \leq 3 \\ -2x + a, & x > 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3_-} (2x - 1) = \lim_{x \rightarrow 3_+} (-2x + a)$$

$$a = 11$$

$$3a + b = 3$$

$$b = -20$$

ГРУПА: Б

Писмени дио испита из Математике 1
2. колоквиј

1. Дата је равна $x + y = 0$ и праве $p_1: \frac{x}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{-2}$ и $p_2: \begin{cases} y-z-2=0 \\ x=1 \end{cases}$.

Одредити праву p паралелну датој равни и која сијече дате праве у тачкама чије је растојање 3.

2. Нека је $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 5$ и $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$. Наћи површину паралелограма конструисаног над векторима $2\vec{b} - \vec{a}$ и $3\vec{a} + 2\vec{b}$.

3. Испитати и графички представити функцију $f(x) = \arccos \frac{1-x}{1-2x} - 4$.

4. Одредити параметре $a, b \in \mathbb{R}$ тако да функција дефинисана са

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & |x| \leq 1 \\ x^2 + ax + b, & |x| > 1 \end{cases} \text{ буде непрекидна.}$$

Да ли постоје a и b такви да је функција диференцијабилна на $\mathbb{R}$?

Рјешење:

1. $\alpha: x + y + a = 0$

$$p_1: \frac{x}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{-2} = t \Rightarrow x = 3t, y = t-1, z = -2t+3$$

$$p_2: \begin{cases} y-z-2=0 \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow x=1, y=s, z=s-2$$

$$\{A\} = p_1 \cap \alpha \Rightarrow 3t + t - 1 + a = 0 \Rightarrow t = \frac{1-a}{4} \Rightarrow A = \left(\frac{3}{4}(1-a), \frac{-3-a}{4}, \frac{5+a}{2} \right)$$

$$\{B\} = p_2 \cap \alpha \Rightarrow 1 + s + a = 0 \Rightarrow s = -1-a \Rightarrow B = (1, -1-a, -3-a)$$

$$d(A, B) = 3 \Rightarrow \left(\frac{3}{4}(1-a) - 1 \right)^2 + \left(\frac{-3-a}{4} + 1 + a \right)^2 + \left(\frac{5+a}{2} + 3 + a \right)^2 = 9$$

$$9a^2 + 46a + 57 = 0 \Rightarrow a_1 = -\frac{19}{9}, a_2 = -3$$

$$A_1 = \left(\frac{7}{3}, -\frac{2}{9}, \frac{13}{9} \right), A_2 = (3, 0, 1), B_1 = \left(1, \frac{10}{9}, -\frac{8}{9} \right), B_2 = (1, 2, 0)$$

$$\text{једначина праве кроз тачке } A_1 \text{ и } B_1 \text{ је } \frac{x-1}{4} = \frac{y-\frac{10}{9}}{-4} = \frac{z+\frac{8}{9}}{7}$$

$$\text{једначина праве кроз тачке } A_2 \text{ и } B_2 \text{ је } \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z}{1}$$

2. $P = \left| (2\vec{b} - \vec{a}) \times (3\vec{a} + 2\vec{b}) \right| = \left| 6\vec{b} \times \vec{a} - 2\vec{a} \times \vec{b} \right| = \left| -8\vec{a} \times \vec{b} \right| = 8|\vec{a}||\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b}) = 100\sqrt{2}$.

3. Д.П. $-1 \leq \frac{1-x}{1-2x} \leq 1$

$$\frac{1-x}{1-2x} + 1 \geq 0 \wedge \frac{1-x}{1-2x} - 1 \leq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0] \cup \left[\frac{2}{3}, +\infty \right)$$

- Нема нула, јер је $\arccos x \in [0, \pi]$, тј. функција је негативна за све x из области дефинисаности.
- пресјек са y , $x = 0 \Rightarrow \arccos 1 - 4 = -4$ тј. $(0, -4)$
- нема вертикалну асимптоту

- коса асимптота

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{\arccos \frac{1-x}{1-2x}}{x} - \frac{4}{x} \right) = 0, \text{ нема косу асимптоту}$$

- хоризонтална асимптота

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\arccos \frac{1-x}{1-2x} - 4 \right) = \arccos \frac{1}{2} - 4 = \frac{\pi}{3} - 4$$

- екстреми

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1-x}{1-2x}\right)^2}} \cdot \frac{-(1-2x) + 2(1-x)}{(1-2x)^2} = \dots = \frac{-|1-2x|}{(1-2x)^2 \sqrt{3x^2 - 2x}}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-1}{(1-2x)\sqrt{x(3x-2)}}, & x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{(1-2x)\sqrt{x(3x-2)}}, & x > \frac{1}{2} \end{cases}, f'(x) < 0 \text{ на цијелом домену, значи да је } f(x) \text{ опадајућа}$$

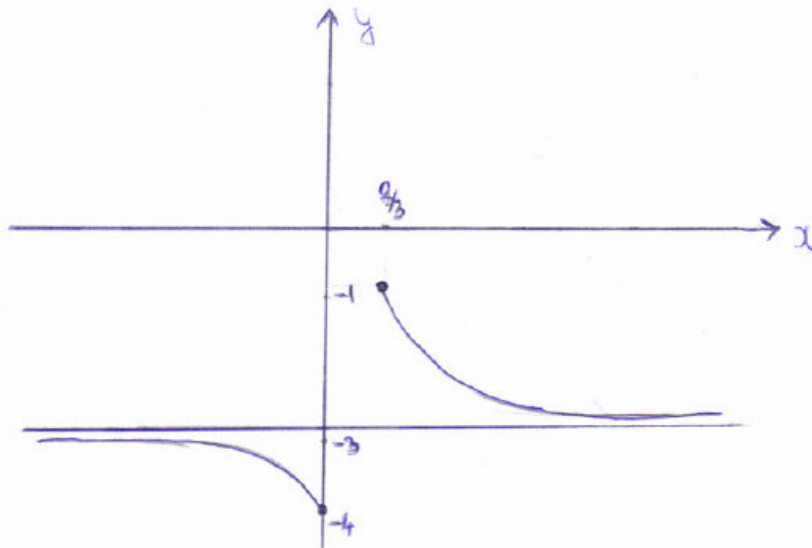
на цијелом домену и нема екстрема

- превојне тачке

$$f''(x) = \frac{-12x^2 + 9x - 1}{(1-2x)^2 \sqrt{x^3(3x-2)^3}}, \quad f''(x) = 0 \Rightarrow -12x^2 + 9x - 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{33}}{-24},$$

нема превојних тачака

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \pi - 4$$



4.

$$\lim_{x \rightarrow (-1)_-} (x^2 + ax + b) = \lim_{x \rightarrow (-1)_+} 2x \quad \lim_{x \rightarrow 1_+} (x^2 + ax + b) = \lim_{x \rightarrow 1_-} 2x \Rightarrow a = 2 \wedge b = -1$$

$$-a + b = -3$$

$$a + b = 1$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2, & x \in [-1, 1] \\ 2x + a, & x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)_-} (2x + a) = \lim_{x \rightarrow (-1)_+} 2 \Rightarrow a = 4 \quad \lim_{x \rightarrow 1_-} 2 = \lim_{x \rightarrow 1_+} (2x + a) \Rightarrow a = 0$$

није диференцијабилна на R

ГРУПА: Ц

Писмени дио испита из Математике 1
2. колоквиј

1. Наћи једначину праве која лежи у равни $2x + 3y - z + 1 = 0$, заклапа минималан угао са правом

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z}{1} \text{ и на минималном је растојању од координатног почетка.}$$

2. Израчунати пројекцију вектора $\vec{b} = \vec{c} \times \vec{d}$, ако је $\vec{c} = (1, 0, -2)$ и $\vec{d} = (1, 3, -4)$.

3. Испитати и графички представити функцију $f(x) = \arctg \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$.

4. Да ли је функција $f(x) = \begin{cases} (x-2)\arctg \frac{1}{x-2}, & x \neq 2 \\ 0, & x = 2 \end{cases}$ диференцијабилна $\forall x \in \mathbb{R}$.

Рјешење:

1. Тражена права је паралелна са пројекцијом дате праве на дату раван и пролази кроз продор нормале из координатног почетка на дату раван.

Пројекција праве p_1 на раван $2x + 3y - z + 1 = 0$ се добија тако што тражимо једначину равни која је окомита на дату раван и пролази кроз праву p_1 .

$$p_1 : \begin{cases} 2x - 6 = y - 3 \\ y - 3 = 2z \end{cases} \Rightarrow p_1 : \begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ y - 2z - 3 = 0 \end{cases}$$

из прамена равни $2x - y - 3 + \lambda(y - 2z - 3) = 0$, $2x + y(-1 + \lambda) - 2\lambda z - 3\lambda - 3 = 0$ издвајамо ону која је окомита на $2x + 3y - z + 1 = 0$.

$$4 + 3(-1 + \lambda) + 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{5}, \quad \pi_1 : 5x - 3y + z - 6 = 0$$

Права пројекције је $p_2 : \begin{cases} 5x - 3y + z - 6 = 0 \\ 2x + 3y - z + 1 = 0 \end{cases}$, једначина те праве у канонском облику је

$$\frac{x - \frac{5}{7}}{0} = \frac{y + \frac{17}{21}}{7} = \frac{z}{21}$$

Једначина нормале из координатног почетка на раван $2x + 3y - z + 1 = 0$ је $n : \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-1}$

Тачка продора нормале кроз раван $2x + 3y - z + 1 = 0$ је $\left(-\frac{1}{7}, -\frac{3}{14}, \frac{1}{14}\right)$.

Тражена права пролази кроз ту тачку, а паралелна је правој p_2 , па је њена једначина

$$\frac{x + \frac{1}{7}}{0} = \frac{y + \frac{3}{14}}{7} = \frac{z - \frac{1}{14}}{21}$$

2.

$$pr_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{d})}{|\vec{b}|} = \frac{6}{7}$$

3. Д.П. $x \neq \pm 1$ тј. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$

- $f(-x) = f(x)$, функција је парна
- нема нула
- $f(x) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, $f(x) < 0 \Rightarrow x \in (-1, 1)$

- пресјек са у осом $\left(0, -\frac{\pi}{4}\right)$

- вертикална асимптота

$$\lim_{x \rightarrow (-1)_-} \operatorname{arctg} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow (-1)_+} \operatorname{arctg} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 1_-} \operatorname{arctg} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1_+} \operatorname{arctg} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{\pi}{2},$$

значи нема вертикалне асимптоте

- нема косу асимптоту

- хоризонтална асимптота $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \operatorname{arctg} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{\pi}{4}$

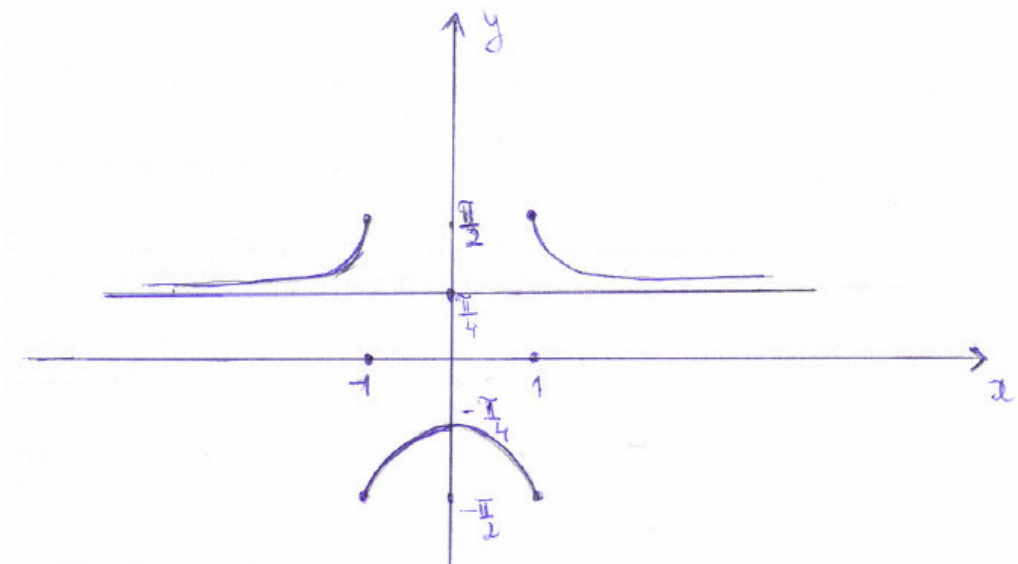
- екстрими

$$f'(x) = -\frac{2x}{x^4 + 1}, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \left(0, -\frac{\pi}{4}\right) \text{ максимум}$$

- превојне тачке

$$f''(x) = \frac{2(3x^4 - 1)}{(x^4 + 1)^2}, \quad f''(x) = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \text{ су превојне тачке јер у њима други извод функције}$$

мијења знак



4.

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x-2) \operatorname{arctg} \frac{1}{(x-2)} = 0, \text{ значи } f(x) \text{ је непрекидна } \forall x \in \mathbb{R}$$

$$x \neq 2$$

$$f'(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x-2} - \frac{x-2}{(x-2)^2 + 1}$$

$$x = 2$$

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{h}}{h} = \frac{\pi}{2}$$

Функција је диференцијабилна $\forall x \in \mathbb{R}$.