Електротехнички факултет 20.06.2006.
Источно Сарајево

Писмени дио испита из Математике 1

1. Дискутовати и ријешити систем линеарних једначина у зависности од параметра λ

$$\lambda x + y + z = 1$$
$$x + \lambda y + z = \lambda$$
$$x + y + \lambda z = \lambda$$

2. Одредити колико има троцифрених бројева код којих је збир цифара једнак 10.

3. Одредити параметре a и b тако да 1-2i буде корјен једначине $2x^5 - x^4 + ax^2 - 22x + b = 0$, па затим ријешити једначину.

4. Дата је тачка $A(1, 2, 8)$ и права $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z}{1}$

а) наћи пројекцију тачке A на дату праву,

б) наћи тачку B која је симетрична тачки A у односу на дату праву.

5. Израчунати угао између дијагонала паралелограма конструисаног над векторима $\vec{a}$ и $\vec{b}$, ако је $\left|\vec{a}\right| = 2, \left|\vec{b}\right| = 1, \angle\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \dfrac{2\pi}{3}$.

6. Испитати и графички представити функцију $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - x}{x^2 - 5x + 6}}$.

7. Израчунати $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(a+2x) - 2\cos(a+x) + \cos a}{x^2}$

а) директно,

б) Лопиталовим правилом.

Цијели испит: 1, 2, 3,4, 6.

II колоквиј: 4, 5, 6, 7.

Рјешење :

1.

$$D = (\lambda-1)^2(\lambda+2),\ D_x = -(\lambda-1)^2,\quad D_y = -(\lambda-1)^2(\lambda+1),\quad D_z = -(\lambda-1)^2(\lambda+1),$$

1° $D \neq 0$ за $\lambda \neq -2 \wedge \lambda \neq 1$, систем има јединствено рјешење $\left(-\dfrac{1}{\lambda+2}, \dfrac{\lambda+1}{\lambda+2}, \dfrac{\lambda+1}{\lambda+2}\right)$.

2° $D = 0$

$a)$ $\lambda = 1 \Rightarrow D_x = D_y = D_z = 0$

Систем је неодређен и има бесконачно много рјешења.

$x + y + z = 1 \Rightarrow x = 1 - y - z \Rightarrow (1 - y - z, y, z),\quad y, z \in R$.

б) $\lambda = -2 \Rightarrow D_x \neq 0, D_y \neq 0, D_z \neq 0$

$$\begin{aligned}-2x+y+z&=1\\ x-2y+z&=-2\\ x+y-2z&=-2\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad\begin{aligned}3x-3y&=3\\ 3x-3y&=0\end{aligned}$$

Систем је противрјачан тј. нема рјешења.

2.

$$x+y+z=10$$

$$\left.\begin{matrix}018\\028\\037\\046\end{matrix}\right\}\ 4(3!-2!)=16\qquad\left.\begin{matrix}118\\226\\244\\334\end{matrix}\right\}\ 4\cdot\frac{3!}{2!}=12\qquad\left.\begin{matrix}127\\136\\145\\235\end{matrix}\right\}\ 4\cdot 3!=24$$

$$055-\frac{3!}{2!}-1=2$$

N=16+2+12+24=54.

3.

$$(1-2i)^2=-3-4i,\quad (1-2i)^4=-7+24i,\ (1-2i)^5=41+38i$$

$$2(41+38i)-(-7+24i)+a(-3-4i)-22(1-2i)+b=0$$

$$67-3a+b=0$$

$$-96+4a=0\qquad\Rightarrow a=24, b=5$$

$$x_{1,2}=1\pm 2i$$

$$(x-1-2i)(x-1+2i)=x^2-2x+5$$

$$2x^5-x^4+24x^2-22x+5=(x^2-2x+5)(2x^3+3x^2-4x+1)$$

$$2x^3+3x^2-4x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)(x^2+2x-1)$$

$$x_{1,2}=1\pm 2i,\ \ x_3=\frac{1}{2},\ x_{4,5}=-1\pm\sqrt{2}\,.$$

4.

а) Нађимо једначину равни која садржи тачку А и окомита је на дату праву. Пресјек дате праве и добијене равни је тражена тачка Р.

$$\vec{p}=(2,-1,1)\Rightarrow\vec{N}=(2,-1,1)$$

$$2(x-1)-(y-2)+z-8=0$$

$$2x-y+z-8=0$$

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{1}\Rightarrow x=2t+1, y=-t, z=t\Rightarrow t=1\Rightarrow P(3,-1,1)$$

б)

$$3=\frac{1+x_2}{2},-1=\frac{2+y_2}{2},1=\frac{8+z_2}{2}\Rightarrow x_2=5, y_2=-4, z_2=-6\Rightarrow B(5,-4,-6)\,.$$

5.

$$\overrightarrow{d_1}=\vec{a}+\vec{b},\quad \overrightarrow{d_2}=\vec{a}-\vec{b}\ ,\quad \overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2}=\left|\overrightarrow{d_1}\right|\left|\overrightarrow{d_2}\right|\cos\left(\overrightarrow{d_1},\overrightarrow{d_2}\right)$$

$$\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2}=(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2=3$$

$$\left|\overrightarrow{d_1}\right|=\sqrt{|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2}=\sqrt{3}$$

$$\left|\overrightarrow{d_2}\right|=\sqrt{|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2}=\sqrt{7}$$

$$\Rightarrow\ \cos\left(\overrightarrow{d_1},\overrightarrow{d_2}\right)=\frac{\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2}}{\left|\overrightarrow{d_1}\right|\left|\overrightarrow{d_2}\right|}=\frac{3}{\sqrt{21}}\,.$$

6.

- Област дефинисаности, $\dfrac{x^2-x}{x^2-5x+6}\ge 0 \Rightarrow x\in(-\infty,0]\cup[1,2)\cup(3,+\infty)$
- знак, $f(x)>0$ за свако x из области дефинисаности
- нуле, $x=0\wedge x=1$
- вертикална асимптота

$$\lim_{x\to 2_-} f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to 3_+} f(x)=+\infty$$

- коса асимптота

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{\dfrac{x^2-x}{x^2-5x+6}}}{x}=0$$, нема косу асимптоту

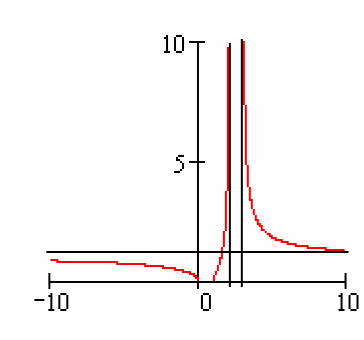
- хоризонтална асимптота

$$n=\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\sqrt{\frac{x^2-x}{x^2-5x+6}}=1$$

- екстреми

$$y'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2-5x+6}{x^2-x}}\cdot\frac{-4x^2+12x-6}{\left(x^2-5x+6\right)^2}\Rightarrow y'=0\Rightarrow x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{3}}{2}\notin \text{Д.П.}$$

нема екстрема



7.

а)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(a+2x)-\cos(a+x)-(\cos(a+x)-\cos a)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\frac{x}{2}\sin\left(a+\frac{3x}{2}\right)+2\sin\frac{x}{2}\sin\left(a+\frac{x}{2}\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\frac{x}{2}\cdot 2\sin\frac{x}{2}\cos(a+x)}{x^2}=-\cos a$$

б)

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin(a+2x)+2\sin(a+x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-4\cos(a+2x)+2\cos(a+x)}{2}=-\cos a$$