

Група А

Писмени дио испита из Математике 1
1. колоквиј

1. Наћи све реалне вриједности x које задовољавају неједначину

$$\left| 4i - 1 + \log_{\frac{1}{2}} x \right| \geq 5.$$

2. Дат је систем линеарних једначина

а) Дискутовати и ријешити систем Крамеровим правилом

б) Наћи ранг проширене матрице $\overline{A}$ у тачки $a = -3$.

$$\begin{aligned}(a+1)x + y + z &= a \\ x + (a+1)y + z &= 2a \\ x + y + (a+1)z &= 3a.\end{aligned}$$

3. Ријешити матричну једначину $AX - B - A = 0$, гдје је $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

4. Одредити полином трећег степена са реалним коефицијентима тако да задовољава услове

$$P(1+i) = 3i - 6, P(-i) = 4i - 1.$$

Рјешења:

1.

$$\sqrt{\left(\log_{\frac{1}{2}} x - 1\right)^2} + 16 \geq 5, \text{ дефиниционо подручје } x > 0$$

$$\log_{\frac{1}{2}}^2 x - 2\log_{\frac{1}{2}} x + 1 + 16 - 25 \geq 0$$

$$\log_{\frac{1}{2}}^2 x - 2\log_{\frac{1}{2}} x - 8 \geq 0$$

$$\text{смјена: } \log_{\frac{1}{2}} x = t$$

$$t^2 - 2t - 8 \geq 0 \Rightarrow t_1 = 4, t_2 = -2 \Rightarrow t \in (-\infty, -2] \cup [4, +\infty)$$

$$\log_{\frac{1}{2}} x \geq 4 \Rightarrow x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^4 \Rightarrow 0 < x \leq \frac{1}{16}$$

$$\log_{\frac{1}{2}} x \leq -2 \Rightarrow x \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \Rightarrow x \geq 4$$

$$\text{Рјешење је } x \in \left(0, \frac{1}{16}\right] \cup [4, +\infty).$$

2. a) $D = a^2(a+3)$, $D_x = a^2(a-3)$, $D_y = 2a^3$, $D_z = 3a^2(a+1)$

1° $D \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0 \wedge a \neq -3$ систем има јединствено рјешење $\left(\frac{a-3}{a+3}, \frac{2a}{a+3}, \frac{3(a+1)}{a+3}\right)$.

2° $D = 0$

a) $a = 0 \Rightarrow D_x = D_y = D_z = 0$

$$x + y + z = 0$$

$$x + y + z = 0$$

$$x + y + z = 0$$

систем је неодређен и има бесконачно много рјешења $(-y-z, y, z)$ $y, z \in R$.

б) $a = -3 \Rightarrow D_x = -54$, систем је противрјечан тј. нема рјешења.

б)

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & -6 \\ 1 & 1 & -2 & -9 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -6 \\ -2 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & -9 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -6 \\ 0 & -3 & 3 & -15 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \end{array} \right] \\ & \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -6 \\ 0 & -3 & 3 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & -18 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -18 \end{array} \right], \quad r(\bar{A}) = 3 \end{aligned}$$

3.

$$X = A^{-1}(A+B)$$

$$|A| = -1, \quad A+B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^{adj} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 1 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 6 & -7 & -5 \\ 6 & -7 & -6 \\ -7 & 10 & 9 \end{bmatrix}.$$

4.

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$(1+i)^2 = 2i, \quad (1+i)^3 = 2i-2, \quad (-i)^2 = -1, \quad (-i)^3 = i$$

$$a(2i-2) + 2bi + c + ci + d = 3i-6$$

$$ai - b - ci + d = 4i - 1$$

$$2a + 2b + c = 3$$

$$\begin{aligned} -2a + c + d &= -6 \\ a - c &= 4 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{9}{5}, \quad b = \frac{4}{5}, \quad c = -\frac{11}{5}, \quad d = -\frac{1}{5}$$

$$-b + d = -1$$

Група Б

Писмени дио испита из Математике 1
1. колоквиј

1. Наћи све реалне вриједности x које задовољавају неједначину

$$\left| \frac{1+i\sqrt{7}}{4} - \cos x \right| < 1.$$

2. Дат је систем линеарних једначина

а) Дискутовати и ријешити систем Крамеровим правилом

б) Наћи ранг проширене матрице $\bar{A}$ у тачки $a = 1$.

$$ax + y + z = 1$$

$$x + ay + z = 2$$

$$x + y + az = -3.$$

3. Ријешити матричну једначину $BX + A - E = 0$, гдје је $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

4. Одредити полином трећег степена са реалним коефицијентима тако да задовољава услове

$$P(1+2i) = 2i - 16, P(-2i) = 2i + 1.$$

Рјешења:

1.

$$\sqrt{\left(\frac{1}{4} - \cos x\right)^2} + \frac{7}{16} < 1$$

$$\frac{1}{16} - \frac{1}{2} \cos x + \cos^2 x + \frac{7}{16} - 1 < 0$$

$$2 \cos^2 x - \cos x - 1 < 0$$

$$\text{смјена: } \cos x = t$$

$$2t^2 - t - 1 < 0 \Rightarrow t_1 = 1, t_2 = -\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} < \cos x < 1 \Rightarrow -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

2. $D = (a-1)^2(a+2)$, $D_x = (a-1)(a+2)$, $D_y = 2(a+2)(a-1)$, $D_z = -3(a-1)(a+2)$

$$1^\circ D \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 1 \wedge a \neq -2 \text{ систем има јединствено рјешење } \left(\frac{1}{a-1}, \frac{2}{a-1}, \frac{-3}{a-1} \right).$$

$$2^{\circ} D = 0$$

$$a) a = 1 \Rightarrow D_x = D_y = D_z = 0$$

$$x + y + z = 1$$

$$x + y + z = 2$$

$$x + y + z = -3$$

систем је противрјечан тј. нема рјешења.

$$б) a = -2 \Rightarrow D_x = D_y = D_z = 0, \text{ систем је неодређен тј. има бесконачно много рјешења}$$

$$\left(\frac{3z-4}{3}, \frac{3z-5}{3}, z \right), z \in R.$$

б)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad r(\overline{A}) = 2$$

3.

$$X = B^{-1}(E - A)$$

$$|B| = 20, E - A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}, B^{adj} = \begin{bmatrix} -9 & -1 & 16 \\ 4 & -4 & 4 \\ 7 & 3 & -8 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} -9 & -1 & 16 \\ 4 & -4 & 4 \\ 7 & 3 & -8 \end{bmatrix}, X = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} -24 & 8 & 9 \\ 4 & -8 & -4 \\ 12 & -4 & -7 \end{bmatrix}$$

4.

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$(1+2i)^2 = -3+4i, (1+2i)^3 = -11-2i, (-2i)^2 = -4, (-2i)^3 = 8i$$

$$-11a - 2ai - 3b + 4bi + c + 2ci + d = 2i - 16$$

$$8ai - 4b - 2ci + d = 2i + 1$$

$$-11a - 3b + c + d = -16$$

$$-2a + 4b + 2c = 2$$

$$8a - 2c = 2$$

$$-4b + d = 1$$

$$\Rightarrow a = 2, b = -2, c = 7, d = -7$$