Електротехнички факултет 19.09.2006.
Источно Сарајево

Писмени дио испита из Математике 1

1. Дискутовати и ријешити систем линеарних једначина у зависности од параметра a

$$\begin{aligned}(a-1)x+y-z&=2a-1\\(2a-5)x+4y-5z&=a+2\\(2a-3)x+y+(a-3)z&=a+1\end{aligned}\quad .$$

2. Из прамена равни $\begin{cases}4x+y-2z-1=0\\4x+3y+3z-2=0\end{cases}$

издвоји ону раван која од координатног угла yOz одсјеца троугао површине P. Провести дискусију у зависности од параметра P кад има једно, два или ниједно рјешење. За произвољно изабрано P одредити раван којој ће компоненте вектора нормале бити рационални бројеви.

3. Формирати полином четвртог степена коме су $1-i$ и 2 просте нуле и има екстрем у тачки T(1,2).

4. Испитати и графички представити функцију $f(x)$ дату са $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^3}{x+a^2}},(a\in R)$.

5. Наћи $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^5-1}{\sqrt{x}-1}$

а) директно

б) Лопиталовом теоремом.

Рјешења:

1. $D=2a(a-2),\ D_x=7(a-2)\left(a-\frac{5}{7}\right), D_y=-3a(a-2)\left(a-\frac{1}{3}\right), D_z=9(a-2)\left(a-\frac{5}{9}\right)$

а) $a\in R\setminus\{0,2\}$, систем има јединствено рјешење $\left(\dfrac{7a-5}{2a},\dfrac{1-3a}{2},\dfrac{9a-5}{2a}\right)$

б) $a=0\Rightarrow D=0, D_x\neq 0$ па је систем противрјечан

в) $a=2\Rightarrow D=D_x=D_y=D_z=0$

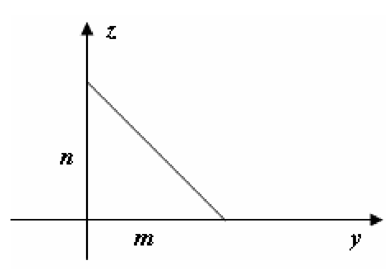
$$\begin{aligned}x+y-z&=3\\-x+4y-5z&=4\\x+y-z&=3\end{aligned}$$, систем је неодређен и има бесконачно много рјешења

$\left(8-\dfrac{z}{5},\dfrac{7+6z}{5},z\right),\ z\in R$

2.

$4x+y-2z-1+\lambda(4x+3y+3z-2)=0$

$$\frac{x}{\frac{1+2\lambda}{4+4\lambda}}+\frac{y}{\frac{1+2\lambda}{1+3\lambda}}+\frac{z}{\frac{1+2\lambda}{-2+3\lambda}}=1\ ,$$



$P=\dfrac{m\cdot n}{2},\quad 2P=\dfrac{(1+2\lambda)^2}{(1+3\lambda)(3\lambda-2)}$ $\qquad\lambda^2(4-18P)+\lambda(4+6P)+1+4P=0$

$$\lambda_{1,2}=\frac{-(2+3P)\pm\sqrt{P(81P+14)}}{4-18P}$$

- за $P=0$ имамо једно рјешење са троуглом који се деформише у тачку
- за $P=-\dfrac{14}{81}$ имамо једно рјешење

- за $P \in \left(-\frac{14}{81}, 0\right)$ нема реално рјешење
- за $P \in \left(-\infty, -\frac{14}{81}\right) \cup (0, +\infty)$ имамо два реална рјешења

ако узмемо $P = -\frac{14}{81} \Rightarrow \lambda = -\frac{5}{24}$

$$\left(4 - 4 \cdot \frac{5}{24}\right)x + \left(1 - 3 \cdot \frac{5}{24}\right)y + \left(-3 \cdot \frac{5}{24} - 2\right)z = 1 - 2 \cdot \frac{5}{24}$$

$\frac{19}{6}x + \frac{3}{8}y - \frac{21}{8}z = \frac{7}{12}$, тражена једначина равни је $76x + 9y - 63z - 14 = 0$

3. $x_{1,2} = 1 \pm i,\ x_3 = 2$

$$P(x) = (x - 1 - i)(x - 1 + i)(x - 2)(ax + b) = (x^3 - 4x^2 + 6x - 4)(ax + b)$$
$$P'(x) = (3x^2 - 8x + 6)(ax + b) + a(x^3 - 4x^2 + 6x - 4)$$
$$P'(1) = 0 \Rightarrow b = 0$$
$$P(1) = 2 \Rightarrow a = -2$$
$$P(x) = -2x^4 + 8x^3 - 12x^2 + 8x$$

4.

- д.п. $\frac{x^3}{x + a^2} \geq 0 \Rightarrow x \in \left(-\infty, -a^2\right) \cup [0, +\infty)$
- има нулу у (0,0), функција је позитивна $\forall x \in \left(-\infty, -a^2\right) \cup [0, +\infty)$
- вертикална асимптота : $\lim\limits_{x \to (-a^2)_-} \sqrt{\frac{x^3}{x + a^2}} = +\infty$
- коса асимптота: $k_1 = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x \cdot \sqrt{\frac{x}{x + a^2}}}{x} = 1,\ k_2 = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-x \cdot \sqrt{\frac{x}{x + a^2}}}{x} = -1$

$$n_1 = \lim_{x \to +\infty}\left(x \cdot \sqrt{\frac{x}{x + a^2}} - x\right) = \bullet\bullet\bullet = -\frac{1}{2}$$
$$n_2 = \lim_{x \to -\infty}\left(-x \cdot \sqrt{\frac{x}{x + a^2}} + x\right) = \bullet\bullet\bullet = \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow\ y_1 = x - \frac{1}{2},\ y_2 = -x + \frac{1}{2}$$

- екстреми

$$y' = \frac{1}{2}\left(\frac{x + a^2}{x^3}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{x^2(2x + 3a^2)}{(x + a^2)^2},\ y' = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = -\frac{3a^2}{2}$$

у $\left(-\frac{3a^2}{2}, \frac{3\sqrt{3}a^2}{2}\right)$ има минимум

5. а) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^5 - 1}{\sqrt{x} - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + 1)}{\sqrt{x} - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + 1)(\sqrt{x} + 1)}{x - 1} = 10$

б) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{5x^4}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim\limits_{x \to 1} 10x^4\sqrt{x} = 10$