

Писмени дио испита из Математике 1

1. У кутији се налази 100 куглица и то 28 црвених, 15 зелених, 12 жутих, 25 плавих и по 10 бијелих и црних. Колико је најмање потребно извући куглица насумице па да буде 15 куглица исте боје.

2. Ријешити једначину
$$\begin{vmatrix} \lambda & \lambda-1 & \lambda+4 \\ \lambda+4 & 2\lambda-2 & -3\lambda+28 \\ 1 & \lambda-1 & 2\lambda+3 \end{vmatrix} = 0.$$

3. Дате су праве $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{\lambda}, \frac{x+1}{-1} = \frac{y-1}{\lambda} = \frac{z}{1}$

а) Одредити λ за које се праве сијеку.

б) За одабрано $\lambda \in \mathbb{Z}$ за које се праве мимоилазе одредити удаљеност тих правих.

4. Из двопараметарске фамилије $f_{a,b}$ функција датих са

$$f_{a,b}(x) = \ln\left(\frac{x+a}{x+1}\right)^2 - \frac{x^2+bx}{x+a} \quad (a \neq 1, b \neq a)$$

издвојити било коју криву која за $x = 1$ има стационарну тачку, а затим испитати и нацртати ту криву.

Рјешење:

1.

$$\left. \begin{array}{l} 10+10+12=32 \\ 14+14+15=43 \end{array} \right\} = 75$$

2.

$$\begin{aligned}
 (\lambda-1) \begin{vmatrix} \lambda & 1 & \lambda+4 \\ \lambda+4 & 2 & -3\lambda+28 \\ 1 & 1 & 2\lambda+3 \end{vmatrix} &= (\lambda-1) \begin{vmatrix} \lambda & 1 & \lambda+4 \\ -\lambda+4 & 0 & -5\lambda+20 \\ -\lambda+1 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \\
 -(\lambda-1) \begin{vmatrix} -\lambda+4 & -5(\lambda-4) \\ -\lambda+1 & \lambda-1 \end{vmatrix} &= \dots = 6(\lambda-1)^2(\lambda-4) = 0 \\
 \lambda_{1,2} = 1, \lambda_3 = 4
 \end{aligned}$$

3.

a) $M_1(1,0,2), M_1(-1,1,0)$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & \lambda \\ -1 & \lambda & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2\lambda^2 + 3\lambda - 2 = 0, \lambda_1 = \frac{1}{2}, \lambda_2 = -2$$

б)

$$\lambda = 1$$

$$p_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{1}, p_2: \frac{x+1}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$$

$V=VN$ -запремина паралелопипеда над векторима $\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{p_1}, \overrightarrow{p_2}$.

$$\left[\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{p_1}, \overrightarrow{p_2} \right] = \left| \overrightarrow{p_1} \times \overrightarrow{p_2} \right| \cdot d \Rightarrow d = \frac{\left[\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{p_1}, \overrightarrow{p_2} \right]}{\left| \overrightarrow{p_1} \times \overrightarrow{p_2} \right|}$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (-2, 1, 2)$$

$$\overrightarrow{p_1} \times \overrightarrow{p_2} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$$

$$\left| \overrightarrow{p_1} \times \overrightarrow{p_2} \right| = \sqrt{38}$$

$$d = \frac{3}{\sqrt{38}}$$