

Писмени дио испита из Математике 1

1. Дискутовати и ријешити систем линеарних једначина у зависности од параметра k

$$kx + y + kz = -5k$$

$$x + 2y + 2kz = -2(3k + 1)$$

$$kx - y + z = -k^2, \quad k \in \mathbb{R}.$$

2. У зависности од параметра λ наћи ранг матрице

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3\lambda & 1 \\ 2 & \lambda & -1 + \lambda \end{bmatrix}.$$

3. Одредити подножје нормале спуштене из тачке $(1, 3, 5)$ на праву по којој се сијеку равни

$$2x + y + z - 1 = 0 \text{ и } 3x + y + 2z - 3 = 0.$$

4. Ријешити једначину $2x^4 + x^2 - 7x - 5 = 0$, ако је познато да она има два корјена чији је збир једнак 1.

5. Испитати и графички представити функцију

$$y = \frac{4x^2 - 3}{8x\sqrt{1 - x^2}} - \arcsin x.$$

Рјешење :

1.

$$D = \begin{vmatrix} k & 1 & k \\ 1 & 2 & 2k \\ k & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & 1 & k \\ 1-2k & 0 & 0 \\ k & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2k-1) \begin{vmatrix} 1 & k \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = (2k-1)(k+1)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -5k & 1 & k \\ -2(3k+1) & 2 & 2k \\ -k^2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5k & 1 & k \\ k-2 & 0 & 0 \\ -k^2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -(2k-1) \begin{vmatrix} 1 & k \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2(2k-1)(k+1)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} k & -5k & k \\ 1 & -2(3k+1) & 2k \\ k & -k^2 & 1 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 1 & -2(3k+1) & 2k \\ k & -k^2 & 1 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -6k+3 & 2k-1 \\ k & -k^2+5k & 1-k \end{vmatrix} \\ = k(2k-1) \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ k(5-k) & 1-k \end{vmatrix} = k(2k-1)(k-3)(k+1)$$

$$D_z = \begin{vmatrix} k & 1 & -5k \\ 1 & 2 & -2(3k+1) \\ k & -1 & -k^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & 1 & -5k \\ 1-2k & 0 & 4k-2 \\ 2k & 0 & -k^2-5k \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1-2k & 2(2k-1) \\ 2k & -k(k+5) \end{vmatrix} = -k(2k-1)(k+1)$$

1° $D \neq 0 \Leftrightarrow k \neq \frac{1}{2} \wedge k \neq -1$ има јединствено рјешење $(-2, k(k-3), k)$.

2° $D=0$

а) $k = \frac{1}{2}$

$$x + 2y + z = -5$$

$$2x + 4y + 2z = -10 \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}z - \frac{1}{4}, \frac{1}{4}z - \frac{9}{8}, z \right), z \in \mathbb{R}, \text{ тј. има бесконачно много рјешења.}$$

$$2x - 4y + 4z = -1$$

б) $k = -1$

$$x + 2y + z = -5$$

$$2x + 4y + 2z = -10 \Rightarrow (-2, z + 3, z), z \in \mathbb{R}, \text{ тј. има бесконачно много рјешења.}$$

$$2x - 4y + 4z = -1$$

2.

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3\lambda & 1 \\ 2 & \lambda & -1+\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3\lambda-2 & -5 \\ 0 & \lambda-1 & \lambda-4 \end{vmatrix} = 6(\lambda^2 - 3\lambda + 1)$$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{За } \lambda \neq \lambda_{1,2} \Rightarrow r(B) = 3, \text{ а ако је } \lambda = \lambda_1 \vee \lambda = \lambda_2, r(B) = 2$$

3.

Једначина праве по којој се сијеку равни:

$$y = -2x - z + 1$$

$$\Rightarrow -2x - z + 1 = -3x - 2z + 3 \Rightarrow z = -2(x - 2), z = y + 3$$

$$y = -3x - 2z + 3$$

$$p: \frac{x-2}{-1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{1}$$

Једначина равни која садржи тачку $(1, 3, 5)$ и окомита је на p

$$\vec{N} \parallel \vec{p} \Rightarrow \frac{A}{-1} = \frac{B}{1} = \frac{C}{1} \Rightarrow \alpha: -x + y + z - 7 = 0$$

Тражена тачка је тачка продора праве p кроз раван α .

$$p: x = 2 - t$$

$$y = -3 + t \Rightarrow t = 4, \text{ тражена тачка је } (-2, 1, 4)$$

$$z = t$$

4.

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4 = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_2 x_3 x_4 + x_1 x_3 x_4 = \frac{7}{2}$$

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = -\frac{5}{2}$$

$$x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$2x^2 + 2x + 5 = 0 \Rightarrow x_{3,4} = \frac{-1 \pm 3i}{2}$$

$$x_3 + x_4 = -1$$

$$(x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + x_1 x_2 + x_3 x_4 = \frac{1}{2}$$

$$x_1 x_2 + x_3 x_4 = \frac{3}{2} \quad (1)$$

$$x_1 x_2 (x_3 + x_4) + x_3 x_4 (x_1 + x_2) = \frac{7}{2}$$

$$-x_1 x_2 + x_3 x_4 = \frac{7}{2} \quad (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow 2x_3 x_4 = 5, \quad x_1 x_2 = -1$$

5.

- Област дефинисаности, $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$

- функција је непарна

- вертикална асимптота

$$\lim_{x \rightarrow (-1)_+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow (0)_-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow (0)_+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow (1)_-} f(x) = +\infty$$

- коса асимптота

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm} f(x) = 0, \text{ нема косу асимптоту}$$

- хоризонтална асимптота

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \text{не постоји, нема хоризонталну асимптоту}$$

- екстреми

$$y' = \frac{8x^4 - 10x^2 + 3}{8x^2(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, x_{3,4} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\pi}{3}\right) \text{ максимум, } \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\pi}{3}\right) \text{ минимум}$$

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1.035\right) \text{ минимум, } \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -1.035\right) \text{ максимум,}$$