Електротехнички факултет **1.09.2006.**
Источно Сарајево

Писмени дио испита из Математике 1

1. **Дискутовати и ријешити систем линеарних једначина у зависности од параметра** a

$$x+y+z=a$$
$$x+(1+a)y+z=2a$$
$$x+y+az=-a \quad .$$

2. **Одредити све тројке** (p,q,r) **рационалних бројева, такве да једнакост** $x^3+px^2+qx+r=(x-p)(x-q)(x-r)$ **вриједи за све реалне** x**.**

3. **Дате је права** $(p_1):\begin{cases} x+y+z-2=0 \\ x-2y+3z-1=0 \end{cases}$ **.**
Наћи једначину праве која пролази кроз тачку (1, 1, 1) и сијече праве (p_1) **.**

4. **Одредити уређену тројку** $(a,b,c)\in R^3$ **тако да функција** $f(x)=\dfrac{ax^2+b}{cx+1}\cdot e^{\frac{1}{cx+1}}$ **има стационарну тачку у** x **= 1, и за тако одабрану тројку испитати и графички представити функцију** $f(x)$**.**

5. **Одредити параметре** $a,b\in R$ **тако да функција дефинисана са** $f(x)=\begin{cases} 2ax-1 & , x\le 2 \\ 1+bx^2 & , x>2 \end{cases}$
буде диференцијабилна у тачки $x=2$ **.**

Рјешења:

1. $D=a(a-1),\ D_x=a(a^2+1), D_y=a(a-1), \mathrm{D_z}=-2a^2$

   а) $D\neq 0 \Leftrightarrow a\neq 0 \wedge a\neq 1$ **систем има јединствено рјешење** $\left(\dfrac{a^2+1}{a-1},1,\dfrac{-2a}{a-1}\right)$.

   б) $a=0 \Rightarrow D=D_x=D_y=D_z=0$ **, систем је неодређен,** $(-y,-y,0),\ y\in R$ **.**

   в) $a=1 \Rightarrow D=0, D_x=0, D_y=2, D_z=-2,$ **систем је противрјечан.**

2.
$$p+q+r=-p$$
$$pq+pr+qr=q$$
$$pqr=-r \qquad \Rightarrow r(pq+1)=0$$

а)
$$\begin{matrix} r=0 \\ 2p+q=0 \\ pq-q=0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} p_1=0 \vee p_2=1 \\ \mathrm{q}_1=0 \vee q_2=-2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} (0,0,0) \\ (1,-2,0) \end{matrix}$$

б)

$$pq = -1 \Rightarrow -\frac{1}{p}$$

$$2p - \frac{1}{p} + r = 0 \Rightarrow r = \frac{1-2p^2}{p}$$

●●●

$$(p-1)\left(-2p^3 - 2p^2 + 1\right) = 0 \Rightarrow p = 1 \Rightarrow (1,-1,-1)$$

3.

$$\begin{array}{ll}(1) & x + y + z - 2 = 0 \\ (2) & x - 2y + 3z - 1 = 0\end{array} \quad \text{из (1)-(2)} \Rightarrow z = \frac{3y-1}{2},\ x = \frac{5-5y}{2},\ y = t$$

$$B\left(\frac{5-5t}{2}, t, \frac{-1+3t}{2}\right),\ t \in R$$

Једначина праве кроз двије тачке $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} = \dfrac{y-y_1}{y_2-y_1} = \dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$

Тражена једначина праве је $\dfrac{x-1}{\frac{3-5t}{2}} = \dfrac{y-1}{t-1} = \dfrac{z-1}{\frac{3t-3}{2}}$, $t \in R$.

4.

$$f'(x) = \frac{e^{\frac{1}{cx+1}}}{(cx+1)^3}\left[\left(acx^2 + 2ax - bc\right)(cx+1) - cax^2 - bc\right]$$

$$f'(1) = 0 \Rightarrow (ac + 2a - bc)(c+1) - ca - bc = 0$$

●●●

$$(a-b)c(c+2) = -2a$$

$$a = 0, b = 1, c = 2 \Rightarrow (0,1,-2)$$

$$f(x) = \frac{1}{1-2x}e^{\frac{1}{1-2x}}$$

- Д.П. $\forall x \in R \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$
- нема нула
- пресјек са y осом $(0,e)$
- вертикална асимптота

$$\lim_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)_-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)_+} \frac{1}{1-2x}e^{\frac{1}{1-2x}} = \lim_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)_+} \frac{\frac{1}{1-2x}}{e^{-\frac{1}{1-2x}}} = \bullet\bullet\bullet = 0$$

- коса асимптота

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x(1-2x)}e^{\frac{1}{1-2x}} = 0$$, нема косу асимптоту

- хоризонтална асимптота

$$n = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{1-2x}e^{\frac{1}{1-2x}} = 0$$

- знак $f(x) > 0 \Rightarrow \frac{1}{1-2x} >\Rightarrow x < \frac{1}{2}$, $f(x) < 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$
- екстреми

  $$f'(x) = \frac{4e^{\frac{1}{1-2x}}}{(1-2x)^3}(1-x),$$ у $(1, e^{-1})$ има минимум
- превојне тачке

  $$f''(x) = \frac{4e^{\frac{1}{1-2x}}}{(1-2x)^4} \cdot \frac{7-6x}{1-2x},$$ у $x = \frac{7}{6}$ има превојну тачку

5. $\lim\limits_{x \to 2_-} (2ax - 1) = \lim\limits_{x \to 2_+} (1 + bx^2) \Rightarrow 4a - 1 = 1 + 4b$

$$f'(x) = \begin{cases} 2a & , x < 2 \\ 2bx & , x > 2 \end{cases}, \quad \lim_{x \to 2_-} 2a = \lim_{x \to 2_+} 2bx \Rightarrow a = 1, b = \frac{1}{2}.$$