Електротехнички факултет
Источно Сарајево

7.02.2005.

Писмени дио испита из Математике 1

1. **Дискутовати и ријешити систем**

$$\lambda x+(\lambda-1)y+(\lambda+4)z=2\lambda-1$$
$$(\lambda+4)x+(2\lambda-2)y+(-3\lambda+28)z=3\lambda+2$$
$$x+(\lambda-1)y+(2\lambda+3)z=2\ .$$

2. **Дате су праве** $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+2}{\lambda};\quad \dfrac{x+3}{-1}=\dfrac{y-1}{\lambda}=\dfrac{z}{1},\ \lambda\in R$.

а) Одредити λ за које се праве сијеку.

б) За $\lambda\in Z$ за које су праве мимоилазне наћи једначину заједничке нормале.

3. **Из двопараметарске фамилије функција датих са** $f_{a,b}(x)=\ln\left(\dfrac{x+a}{x+1}\right)^2-\dfrac{x^2+bx}{x+a}\quad (a\neq 0{,}1,\ b\neq a)$

издвојити било коју тако да за $x=1$ има стационарну тачку и нацртати је.

4. **Ако је** $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ 2 & 2 & 5\end{bmatrix}$, **ријешити матричне једначине $AX+A^2=A$, $XA^2+A=A^3$.**

5. **Одредити $(a,b)\in R^2$ тако да функција** $f(x)=\begin{cases}ax^2+bx\,, & x<1\\ \dfrac{1}{bx+2}\,, & x\geq 1.\end{cases}$ **има извод у тачки $x=1$.**

Рјешења:

1.

$$D=\begin{vmatrix}\lambda & \lambda-1 & \lambda+4\\ \lambda+4 & 2(\lambda-1) & -3\lambda+28\\ 1 & \lambda-1 & 2\lambda+3\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda & 1 & \lambda+4\\ \lambda+4 & 2 & -3\lambda+28\\ 1 & 1 & 2\lambda+3\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda & 1 & \lambda+4\\ -\lambda+4 & 0 & -5\lambda+20\\ 1-\lambda & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=$$

$$-(\lambda-1)\begin{vmatrix}4-\lambda & 5(4-\lambda)\\ 1-\lambda & \lambda-1\end{vmatrix}=-(\lambda-1)(4-\lambda)\begin{vmatrix}1 & 5\\ 1-\lambda & \lambda-1\end{vmatrix}=6(\lambda-1)^2(\lambda-4)$$

$$D_x=\begin{vmatrix}2\lambda-1 & \lambda-1 & \lambda+4\\ 3\lambda+2 & 2(\lambda-1) & -3\lambda+28\\ 2 & \lambda-1 & 2\lambda+3\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}2\lambda-1 & 1 & \lambda+4\\ 3\lambda+2 & 2 & -3\lambda+28\\ 2 & 1 & 2\lambda+3\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)\begin{vmatrix}2\lambda & 1 & \lambda+4\\ -\lambda+4 & 0 & -5\lambda+20\\ -2\lambda+3 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=-(\lambda-1)\begin{vmatrix}4-\lambda & 5(4-\lambda)\\ 3-2\lambda & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=-(\lambda-1)(4-\lambda)\begin{vmatrix}1 & 5\\ 3-2\lambda & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-4)(11\lambda-16)$$

$$D_y=\begin{vmatrix}\lambda & 2\lambda-1 & \lambda+4\\ \lambda+4 & 3\lambda+2 & -3\lambda+28\\ 1 & 2 & 2\lambda+3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & -\lambda(2\lambda+3)+\lambda+4\\ \lambda+4 & \lambda-6 & -(\lambda+4)(2\lambda+3)-3\lambda+28\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}-1 & -2\lambda^2-2\lambda+4\\ \lambda-4 & -2\lambda^2-14\lambda+16\end{vmatrix}=2(\lambda-4)(\lambda^2-1)$$

$$D_z=\begin{vmatrix}\lambda & \lambda-1 & 2\lambda-1\\ \lambda+4 & 2(\lambda-1) & 3\lambda+2\\ 1 & \lambda-1 & 2\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 2\lambda-1\\ \lambda+4 & 2 & 3\lambda+2\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda & 1-\lambda & -1\\ \lambda+4 & -\lambda-2 & \lambda-6\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}1-\lambda & -1\\ -\lambda-2 & \lambda-6\end{vmatrix}=-(\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda-2)$$

1° $D\neq 0\Leftrightarrow\lambda\neq 1\wedge\lambda\neq 4$, **систем има јединствено рјешење**

$$\left(\frac{11\lambda-16}{6(\lambda-1)},\frac{\lambda+1}{3(\lambda-1)},-\frac{\lambda-2}{6(\lambda-1)}\right)$$

2° $D=0$

a) $\lambda=1\Rightarrow D_x=0, D_y=0, D_z=0$

$$\begin{aligned}x+5z&=1\\5x+25z&=5\\x+5z&=2\end{aligned}$$

, систем је противрјечан, тј нема рјешења

b) $\lambda=4\Rightarrow D_x=0, D_y=0, D_z=0$

$$\begin{aligned}4x+3y+8z&=7\\8x+6y+16z&=14\\x+3y+11z&=2\end{aligned}\qquad\Rightarrow\left(\frac{5}{3}+z,\frac{1}{9}-4z,z\right), z\in R$$

Систем је неодређен,тј има бесконачно много рјешења.

2.

a) $\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ l_1 & m_1 & n_1\\ l_2 & m_2 & n_2\end{vmatrix}=0$ **, услов пресјека двије праве**

$M_1(1,0,-2),\ M_2(-3,1,0)$

$\overrightarrow{p_1}=(2,3,\lambda),\ \overrightarrow{p_2}=(-1,\lambda,1)$

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & \lambda \\ -1 & \lambda & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -4\lambda^2 - 3\lambda + 8 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{137}}{-8}$$

б) Нека је $\lambda = 1$

$$p_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{1}, \; p_2 : \frac{x+3}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$$

Са $\vec{p}$ означимо вектор правца заједничке нормале правих p_1 и p_2

$$\vec{p} = \overrightarrow{p_1} \times \overrightarrow{p_2} \Rightarrow \vec{p} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$$

Нека је π раван која садржи праву p_1 и паралелна је вектору $\vec{p}$.

Нормала равни π је $\vec{N} = \left(\overrightarrow{p_1} \times \overrightarrow{p_2}\right) \times \overrightarrow{p_1} \Rightarrow \vec{N} = -18\vec{i} + 8\vec{j} + 12\vec{k}$

Једначина равни π: $A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$

$$18(x-1) + 8(y-0) + 12(z+2) = 0 \Rightarrow 18x + 8y + 12z + 42 = 0$$

Права p_2 продире раван π у тачки M_3.

$$p_2 \begin{cases} x = -3 - t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \; -18(-3-t) + 8(1+t) + 12t + 42 = 0 \Rightarrow t = -\frac{52}{19}$$

$$M_3\left(-\frac{5}{19}, -\frac{33}{19}, -\frac{52}{19}\right)$$

Једначина тражене праве p је $\dfrac{x + \frac{5}{19}}{2} = \dfrac{y + \frac{33}{19}}{-3} = \dfrac{z + \frac{52}{19}}{5}$ **.**

3

$$f'_{a,b}(x) = \frac{1}{\left(\frac{x+a}{x+1}\right)^2} \cdot 2 \cdot \left(\frac{x+a}{x+1}\right) \cdot \frac{x+1-(x+a)}{(x+1)^2} - \frac{(2x+b)(x+a) - (x^2+bx)}{(x+a)^2}$$

$$f'_{a,b}(x) = \frac{2(1-a)(x+a) - (x+1)(x^2 + 2ax + ab)}{(x+a)^2 (x+1)}$$

$$f'_{a,b}(1) = 0 \Rightarrow 2(1-a)(1+a) - 2(1 + 2a + ab) = 0$$

$a(a+b+2)=0$, како је $a \neq 0 \Rightarrow a+b+2=0$.

Изаберимо произвољно a нпр. $a=2 \Rightarrow b= -4$

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^2 - \frac{x^2 - 4x}{x+2}$$

- Д.П. $x+1 \neq 0 \wedge x+2 \neq 0 \Rightarrow \forall x \in R \setminus \{-2,-1\}$

- **не могу се одредити нуле и знак функције**
- **пресјек са y-осом**

  $x=0 \Rightarrow f(0)=\ln 4 \approx 1.4 \Rightarrow (0;1.4)$
- **асимптоте**

1° вертикална

$$\lim_{x\to(-2)_-}\left[\ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^2-\frac{x^2-4x}{x+2}\right]\underline{\underline{\infty-\infty}}\lim_{x\to(-2)_-}\left[\ln(x+2)^2-\ln(x+1)^2-x+6-\frac{12}{x+2}\right]=8+\lim_{x\to(-2)_-}\left[\ln(x+2)^2-\frac{12}{x+2}\right]\underline{\underline{\infty-\infty}}$$

$$\left|\begin{array}{l}x+2=t\\ x\to(-2)_-\Rightarrow t\to 0_-\end{array}\right|=8+\lim_{t\to 0_-}\left(\ln t^2-\frac{12}{t}\right)=8+\lim_{t\to 0_-}\left(\frac{t\ln t^2-12}{t}\right)=+\infty$$

јер је $\lim_{t\to 0_-} t\ln t^2=0$

$$\lim_{x\to(-2)_+}\left[\ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^2-\frac{x^2-4x}{x+2}\right]\underline{\underline{\infty-\infty}}\ 8+\lim_{t\to 0+}\left(\frac{t\ln t^2-12}{t}\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to(-1)_-}\left[\ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^2-\frac{x^2-4x}{x+2}\right]=+\infty$$

$$\lim_{x\to(-1)_+}\left[\ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^2-\frac{x^2-4x}{x+2}\right]=+\infty$$

2° коса асимптота

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{\ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^2}{x}-\frac{x^2-4x}{x^2+2x}\right)=-1$$

$$n=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^2-\frac{x^2-4x}{x^2+2x}+x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^2+\frac{6x}{x+2}\right)=6$$

$$y=-x+6\Rightarrow x\to\pm\infty$$

3° хоризонталну асимптоту нема

-екстреми

$$f'(x)=2\frac{-1}{(x+2)(x+1)}-\frac{x^2+4x-8}{(x+2)^2}=\cdots=\frac{-x^3-5x^2+2x+4}{(x+2)^2(x+1)}$$

познато нам је да има стационарну тачку у x=1, па слиједи

$$f'(x)=\frac{(x-1)(-x^2-6x-4)}{(x+1)(x+2)^2}=\frac{-(x-1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x+1)(x+2)^2}$$

$f'(x)=0\Rightarrow x_1=1,\ x_2=-5.23,\ x_3=-0.76$

$M_1(-5.23;14.4)$ $M_2(-0.76;0.36)$ $M_3(1;1.81)$

	x_2	-1	x_3	1	
$-(x-1)$	+	+	+	+	-
$x-x_2$	-	+	+	+	+
$x-x_3$	-	-	-	+	+
$x+1$	-	-	+	+	+
f'	-	+	-	+	-
f	↓	↑	↓	↑	↓

M_1,M_2-су тачке минимума

M_3-максимум

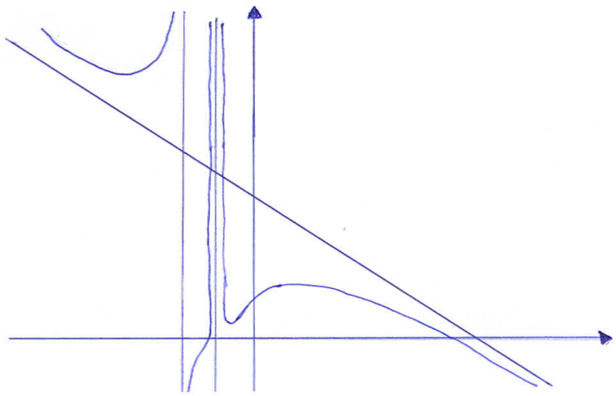
-превојне тачке

$$f''(x)=\frac{-2(x+\frac{1}{2})(x+\frac{6}{5})}{(x+1)^2(x+2)^3}$$

	-2	-6/5	-1/2	
-2(*x*+1/2)	+	+	+	-
***x*+6/5**	-	-	+	+
***x*+2**	-	+	+	+
f''	+	-	+	-

$$\left.\begin{array}{l} f(4)>0 \\ f(5)<0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{има нулу у } (4,5)$$

$$\left.\begin{array}{r} f(-1.002)>0 \\ f(-1.1)<0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{има нулу у } (-1.1,-1.002)$$



4.

$AX + A^2 = A \Rightarrow A(X + A - E) = 0$, **како је** $A \neq 0 \Rightarrow X + A - E = 0 \Rightarrow X = E - A$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -2 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$XA^2 + A = A^3 \Rightarrow (XA + E - A^2)A = 0 \Rightarrow XA + E - A^2 = 0 \,|\cdot A^{-1} \Rightarrow X = A - A^{-1}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^{**}$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 13 & -4 & -7 \\ -8 & -1 & 5 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad X = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 22 & 14 & 20 \\ 10 & 26 & 14 \\ 7 & 20 & 44 \end{bmatrix}$$

5.

Функција $f(x)$ **мора бити непрекидна у** $x = 1$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1_-}(ax^2 + bx) = a + b \\ \lim\limits_{x\to 1_+}\dfrac{1}{bx+2} = \dfrac{1}{b+2} \end{array}\right\} \Rightarrow a + b = \frac{1}{b+2}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + b, & x < 1 \\ -\dfrac{b}{(bx+2)^2}, & x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2a + b = -\dfrac{b}{(b+2)^2} \\ a + b = \dfrac{1}{b+2} \,|\cdot(-2) \end{array}\right\} + \Rightarrow -b = -\frac{b}{(b+2)^2} - \frac{2}{b+2}$$

$b^3 + 4b^2 + b - 4 = 0$ **-нема рационалних нула**

$$\left(\frac{1}{b+2} - b, b\right),\ b \in R$$