

Писмени дио испита из Математике 1

1. Дискутовати и ријешити систем линеарних једначина у зависности од параметра m

$$x + y + (1 - m)z = m$$

$$(1 - m)x - y + z = -1$$

$$x + (m - 1)y - z = 0$$

2. Ријешити матричну једначину $XA^2 + A = A^3$, гдје је $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 3 & 3 & 5 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$

3. Наћи једначину праве која пролази кроз тачку $M(3, -2, -4)$ паралелна је равни

$$3x - 2y - 3z - 7 = 0 \text{ и сијече праву } \frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-1}{2}.$$

4. Нека је $f_1(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ и $f_{n+1}(x) = f_1(f_n(x)), n \in \mathbb{N}$.

а) Показати да је $f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}, n \in \mathbb{N}$.

б) Испитати и нацртати график функције $y = f_n(x)$.

5. Одредити $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ тако да функција $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx, & x < 1 \\ \frac{1}{bx+2}, & x \geq 1. \end{cases}$ има извод у тачки $x=1$.

Рјешења:

1. $D = (m-2)^2(m+1)$, $D_x = 0$, $D_y = (2-m)(m+1)$, $D_z = -(m-1)^2(m-2)$

1° $D \neq 0$ тј. $m \neq 2$, $m \neq -1$ има јединствено рјешење $\left(0, \frac{1}{2-m}, \frac{m-1}{2-m}\right)$

2° $D = 0$

а)

$$x + y - 2z = 2$$

$$m = 2 \Rightarrow \begin{cases} -x - y + z = -1 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 = -1$$

систем је противрјечан

б) $m = -1$

$$x + y + 2z = -1$$

$$\begin{cases} 2x - y + z = -1 \\ x - 2y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 3y = -1 \\ 3x - 3y = -1 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{1}{3} + y, z = -\frac{1}{3} + y$$

систем има бесконачно много рјешења $\left(-\frac{1}{3}+y, y, -\frac{1}{3}-y\right)$.

2.

$$XA^2 + A = A^3, \quad X = A - A^{-1}, \quad |A| = 24$$

$$A^{-1} = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 23 & 13 & 4 \\ 7 & 5 & -4 \\ -18 & -6 & 0 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} -\frac{47}{24} & -\frac{37}{24} & -\frac{7}{6} \\ \frac{65}{24} & \frac{67}{24} & \frac{31}{6} \\ \frac{11}{4} & -\frac{15}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

3.

I начин : користећи услов за пресјек двије праве

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

II начин:

$$M(3, -2, -4), \quad \vec{N} = (3, -2, -3)$$

$$p: \frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{m} = \frac{z+4}{n}, \quad \vec{N} \cdot \vec{p} = 0 \Rightarrow 3l - 2m - 3n = 0$$

$$p_1 \cap p: \left. \begin{aligned} \frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-1}{2} \\ x = 2 + 3s \\ y = -4 - 2s \\ z = 1 + 2s \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{m} = \frac{z+4}{n} \\ x = 3 + lt \\ y = -2 + mt \\ z = -4 + nt \end{aligned} \right\}$$

$$l = \frac{-1+3s}{t}, \quad m = \frac{-2-2s}{t}, \quad n = \frac{5+2s}{t}, \quad \text{уврстимо у } 3l - 2m - 3n = 0 \Rightarrow s = 2$$

Пресјечна тачка правих је $(8, -8, 5) \Rightarrow l = 5, m = -6, n = 9$

$$p: \frac{x-3}{5} = \frac{y+2}{-6} = \frac{z+4}{9}$$

4. а) Примјеном математичке индукције

$$b) \quad y = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}, \quad n \in \mathbb{N}$$

- Д.П. $\forall x \in \mathbb{R}$

- $y = 0 \Rightarrow x = 0$

- непарна

- $y > 0$ за $x > 0$, $y < 0$ за $x < 0$

- нема вертикалне асимптоте

- нема косу асимптоту

- горизонтална асимптота

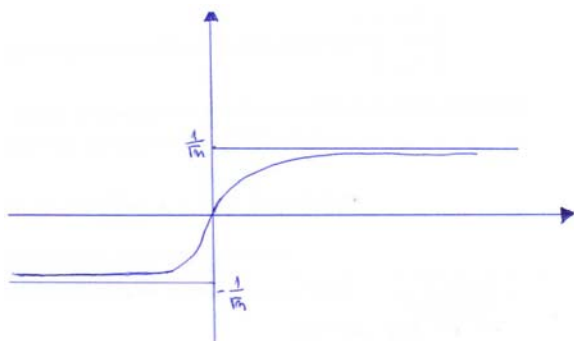
$$y_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{\frac{1}{x^2} + n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad y_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{\frac{1}{x^2} + n}} = -\frac{1}{\sqrt{n}}$$

- екстрими

$$y' = \frac{1}{\sqrt{(1+nx^2)^3}}, \text{ нема екстрема}$$

- превојне тачке

$$y'' = -3nx(1+nx^2)^{-\frac{5}{2}}, \text{ има превојну тачку у } (0, 0).$$



5.

Функција $f(x)$ мора бити непрекидна у $x = 1$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1_-} (ax^2 + bx) &= a + b \\ \lim_{x \rightarrow 1_+} \frac{1}{bx + 2} &= \frac{1}{b + 2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow a + b = \frac{1}{b + 2}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + b, & x < 1 \\ -\frac{b}{(bx + 2)^2}, & x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + b = -\frac{b}{(b + 2)^2} \\ a + b = \frac{1}{b + 2} \cdot (-2) \end{cases} \Rightarrow -b = -\frac{b}{(b + 2)^2} - \frac{2}{b + 2}$$

$b^3 + 4b^2 + b - 4 = 0$ -нема рационалних нула

$$\left(\frac{1}{b + 2} - b, b \right), b \in \mathbb{R}.$$