Електротехнички факултет 15.09.2005.
Источно Сарајево

Писмени дио испита из Математике 1

1. Дискутовати и ријешити систем линеарних једначина у зависности од параметра a

$$ax - y - 2z = 1$$
$$4x - 3ay + 5z = -3$$
$$2x + y - az = -1$$

2. Ријешити матричну једначину $AX - E = A^{-1}$,гдје је

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -3 & 7 & -4 \end{bmatrix}$$ и E-јединична матрица.

3. Одредити реалне бројеве m и n тако да $1+2i$ буде корјен једначине
$2x^5 - x^4 + mx^2 - 22x + n = 0$, а затим ријешити добијену једначину.

4. Наћи праву која пролази кроз тачку M(-5, 2, -1) и сијече под правим углом праву
$\frac{x-1}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z+2}{-2}$.

5. Испитати и графички представити функцију $f(x) = \arcsin \frac{x^2}{\sqrt{2x^4 - 2x^2 + 1}}$.

Рјешења:

1.
$D = 3(a+1)(a-3)(a+2)$, $D_x = 3(a+1)(a+2)$, $D_y = 3(a+1)(a+2)$, $D_z = 3(a+1)(a+2)$

1° $D \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 3 \wedge a \neq -1 \wedge a \neq -2$, систем има јединствено рјешење $\left(\frac{1}{a-3}, \frac{1}{a-3}, \frac{1}{a-3}\right)$.

2° $D = 0$

а) $a = 3$

$$3x - y - 2z = 1$$
$$4x - 9y + 5z = -3$$
$$2x + y - 3z = -1$$

, систем има бесконачно много рјешења $\left(x, x + \frac{1}{3}, x\right)$, $x \in R$.

б) $a = -2$

$$-2x - y - 2z = 1$$
$$4x + 6y + 5z = -3$$
$$2x + y + 2z = -1$$

, систем има бесконачно много рјешења $\left(\frac{7}{2}y + \frac{1}{2}, y, -1 - 4y\right)$, $y \in R$.

в) $a = -1$

$$\begin{array}{l} -x - y - 2z = 1 \\ 4x + 3y + 5z = -3 \\ 2x + y + z = -1 \end{array}$$, систем има бесконачно много рјешења $(x, -3x-1, x)$, $x \in R$.

2.

$$AX - E = A^{-1} \Rightarrow X = A^{-1}\left(E + A^{-1}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \; E + A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \; X = \begin{bmatrix} \frac{71}{8} & \frac{35}{16} & \frac{17}{16} \\ \frac{11}{8} & -\frac{1}{16} & \frac{5}{16} \\ -4 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

3.

$$(1-2i)^2 = -3-4i, \quad (1-2i)^4 = -7+24i, \; (1-2i)^5 = 41+38i$$

$$2(41+38i) - (-7+24i) + m(-3-4i) - 22(1-2i) + n = 0$$

$$67 - 3m + n = 0$$

$$-96 + 4m = 0 \qquad \Rightarrow m = 24, n = 5$$

$$x_{1,2} = 1 \pm 2i$$

$$(x-1-2i)(x-1+2i) = x^2 - 2x + 5$$

$$2x^5 - x^4 + 24x^2 - 22x + 5 = (x^2 - 2x + 5)(2x^3 + 3x^2 - 4x + 1)$$

$$2x^3 + 3x^2 - 4x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)(x^2 + 2x - 1)$$

$$x_{1,2} = 1 \pm 2i, \quad x_3 = \frac{1}{2}, \; x_{4,5} = -1 \pm \sqrt{2}.$$

4.

$$\overrightarrow{p_1} = (3,5,-2), \vec{p} = (l, m, n)$$

$$p \perp p_1 \Rightarrow \vec{p} \cdot \overrightarrow{p_1} = 0 \Rightarrow 3l + 5m - 2n = 0$$

$$\begin{vmatrix} 6 & -2 & -1 \\ l & m & n \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow m + 4n + l = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} m + 4n + l = 0 \\ 5m - 2n + 3l = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow m = -\frac{7}{11}l, \; n = -\frac{1}{11}l \;\Rightarrow p: \frac{x+5}{-11} = \frac{y-2}{7} = \frac{z+1}{1}.$$

5.

- Д.П. $\quad -1 \le \dfrac{x^2}{\sqrt{2x^4 - 2x^2 + 1}} \le 1 \Rightarrow \forall x \in R$.
- нуле функције

$$\arcsin \frac{x^2}{\sqrt{2x^4 - 2x^2 + 1}} = 0 \Rightarrow x = 0, \quad (0,0)$$

- функција је парна

- $f(x) > 0, \forall x \in R$
- коса асимптота

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\arcsin \frac{x^2}{\sqrt{2x^4 - 2x^2 + 1}}}{x} = 0$$, тј нема косу асимптоту

- хоризонтална асимптота

$$n = \lim_{x \to \pm\infty} \arcsin \frac{x^2}{\sqrt{2x^4 - 2x^2 + 1}} = \frac{\pi}{4}$$

- екстреми

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^4}{2x^4 - 2x^2 + 1}}} \left(\frac{x^2}{\sqrt{2x^4 - 2x^2 + 1}} \right)' = \bullet\bullet\bullet = \frac{2x(1 - x^2)}{|x^2 - 1|(2x^4 - 2x^2 + 1)}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-2x}{2x^4 - 2x^2 + 1}, & x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \\ \frac{2x}{2x^4 - 2x^2 + 1}, & x \in (-1, 1) \end{cases}$$

У тачки (0,0) има минимум, ау тачкама $\left(-1, \frac{\pi}{2}\right)$ и $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ има максимуме (шпиц), јер у тим тачкама први извод није дефинисан.

- превојне тачке

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{2(6x^4 - 2x^2 - 1)}{(2x^4 - 2x^2 + 1)^2}, & x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \\ \frac{-2(6x^4 - 2x^2 - 1)}{(2x^4 - 2x^2 + 1)^2}, & x \in (-1, 1) \end{cases}$$

$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x^4 - 2x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \sqrt{7}}{6}}$, $x_{3,4}$ - су комплексне