Електротехнички факултет **14.10.2005.**
Источно Сарајево

Писмени дио испита из Математике 1

1. Дискутовати и ријешити систем линеарних једначина у зависности од параметра a

$$ax+y+z=1$$
$$x+ay+z=a$$
$$x+y+az=a^2$$

2. Ријешити матричну једначину $XA+3A=A$., гдје је $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 5 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

3. Дати су вектори $\vec{a}=\vec{m}+3\vec{n}$, $\vec{b}=7\vec{m}-5\vec{n}$, $\vec{c}=\vec{m}-4\vec{n}$, $\vec{d}=7\vec{m}-2\vec{n}$.Одредити угао између вектора $\vec{m}$ и $\vec{n}$ ако је: $\vec{a}\perp\vec{b}=0$ и $\vec{c}\perp\vec{d}=0$

4. Испитати и графички представити функцију $f(x)=\dfrac{x\cdot\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x+1}$.

5. Дата је једначина $x^3+mx^2-5x-6=0$. Одредити вриједност параметра $m\in R$, тако да производ два рјешења те једначине буде -6, а затим ријешити једначину.

Рјешење:

1.

$$D=(a-1)^2(a+2),\ D_x=-(a-1)(a^2-1),\ D_y=(a-1)^2,\ D_z=(a^2-1)^2$$

1° $D\neq 0 \Leftrightarrow a\neq 1 \wedge a\neq -2$, **има јединствено рјешење** $\left(-\dfrac{a+1}{a+2},\dfrac{1}{a+2},\dfrac{(a+1)^2}{a+2}\right)$

2° $D=0$

а) $a=1\Rightarrow D_x=D_y=D_z=0$, **систем је неодређен, тј. има бесконачно много рјешења**

$x=1-y-z\Rightarrow (1-y-z,y,z),\quad y,z\in R$

б) $a=-2\Rightarrow D_x\neq 0, Dy\neq 0, D_z\neq 0$, **систем је противрјечан, тј. нема рјешења**

2.

$$XA+3A=A^2\Rightarrow X=A-3E\ \Rightarrow\ X=\begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & -6 & 5 \\ 4 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

3.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0\wedge\vec{c}\cdot\vec{d}=0$$
$$(\vec{m}+3\vec{n})\cdot(7\vec{m}-5\vec{n})=0$$
$$7|\vec{m}|^2+16\vec{m}\cdot\vec{n}-15|\vec{n}|^2=0\quad(1)$$

$$\left(\vec{m}-4\vec{n}\right)\cdot\left(7\vec{m}-2\vec{n}\right)=0$$

$$7\left|\vec{m}\right|^2-30\vec{m}\cdot\vec{n}+8\left|\vec{n}\right|^2=0 \quad (2)$$

$(1)-(2)\Rightarrow \cos\left(\vec{n},\vec{m}\right)=\dfrac{\left|\vec{n}\right|}{2\left|\vec{m}\right|}$, **ако то уврстимо у (1) или (2) добијамо** $\angle\left(\vec{m},\vec{n}\right)=\dfrac{\pi}{3}$

4.

-Д.П. $\forall x\in R\setminus\{-1\}$

- нуле, (0,0) и (1,0)

- знак

$f(x)>0,\ x\in(-\infty,-1)\cup(0,\infty)$

$f(x)<0,\ x\in(-1,0)$

- вертикална асимптота

$\lim\limits_{x\to(-1)_-} f(x)=+\infty,\quad \lim\limits_{x\to(-1)_+} f(x)=-\infty$

-коса асимптота

$k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x\cdot\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x(x+1)}=0$, **тј. нема косу асимптоту**

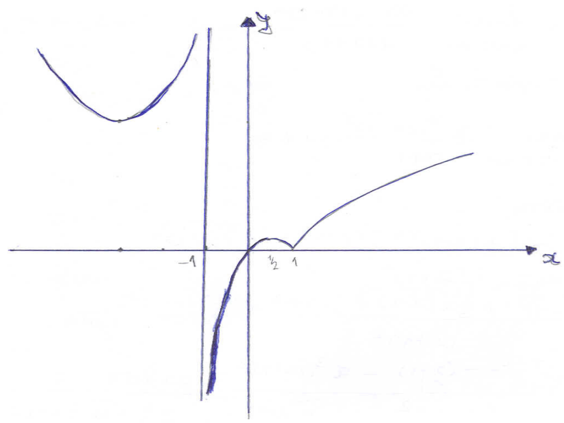
- хоризонтална асимптота

$n=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x\cdot\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x+1}=\infty$, **нема хоризонталну асимптоту**

- екстреми

$f'(x)=\dfrac{2x^2+5x-3}{3\sqrt[3]{x-1}(x+1)^2}\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}\wedge x=-3$

$\left(-3,\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{16}\right)$ **је тачка минимума, а** $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3\sqrt[3]{4}}\right)$ **тачка максимума**



5.

$$\begin{aligned}&x_1+x_2+x_3=-m\\&x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-5\\&x_1x_2x_3=6\\&x_1x_2=-6\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad\begin{aligned}&-6x_3=6\Rightarrow x_3=-1\\&x_1+x_2=1-m\\&x_1+x_2=-1\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad m=2$$

$$x^3+2x^2-5x-6=(x+1)\left(x^2+x-6\right)$$

$$x_1=2,\ x_2=-3,\ x_3=-1$$