Електротехнички факултет **1.09.2005.**
Источно Сарајево

Писмени дио испита из Математике 1
-нови програм-

1. Дискутовати и ријешити систем линеарних једначина у зависности од параметра a

$$x+y+(1-a)z=a$$
$$(1-a)x-y+z=-1$$
$$x+(a-1)y-z=0$$

2. Ријешити матричну једначину $XB^2+B=B^3$., гдје је $B=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -3 & 7 & -4 \end{bmatrix}$

3. Наћи једначину праве која пролази кроз тачку $A(0,-1,2)$ паралелна је равни $3x-2y-3z-7=0$ и сијече праву $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+4}{-2}=\dfrac{z-1}{2}$.

4. Испитати и графички представити функцију $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}e^{-\ln^2 x}$.

5. Одредити реалне бројеве a и b тако да полиноми $P(x)=x^3+ax+4$ и $Q(x)=x^3+bx^2+2$ имају два заједничка корјена, а затим одредити корјене тих полонома.

Рјешења:

1.

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-a \\ 1-a & -1 & 1 \\ 1 & a-1 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-a \\ 2-a & a-2 & 0 \\ 1 & a-1 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1-a \\ 2-a & 0 & 0 \\ 1 & a & -1 \end{vmatrix}$$

$$=(a-2)\begin{vmatrix} 2 & 1-a \\ a & -1 \end{vmatrix}=(a-2)^2(a+1)$$

$$D_x=\begin{vmatrix} a & 1 & 1-a \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & a-1 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2-a & 1-a \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & a-2 & -1 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & 2-a \\ -1 & a-2 \end{vmatrix}=0$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 1 & a & 1-a \\ 1-a & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & a & 2-a \\ 1-a & -1 & 2-a \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & 2-a \\ -1 & 2-a \end{vmatrix}=(2-a)(a+1)$$

$$D_z=\begin{vmatrix}1 & 1 & a\\ 1-a & -1 & -1\\ 1 & a-1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & a\\ -1 & -1\end{vmatrix}-(a-1)\begin{vmatrix}1 & a\\ 1-a & -1\end{vmatrix}=-(a-1)^2(a-2)$$

1° $D\neq 0$ тј. $a\neq 2$, $a\neq -1$ има јединствено рјешење

$$x=\frac{D_x}{D}=0,\quad y=\frac{D_y}{D}=\frac{1}{2-a},\quad z=\frac{D_z}{D}=\frac{a-1}{2-a}$$

$$\left(0,\frac{1}{2-a},\frac{a-1}{2-a}\right)$$

2° D = 0

а)

$$a=2\Rightarrow x+y-2z=2$$

$$\left.\begin{aligned}-x-y+z&=-1\\ x+y-z&=0\end{aligned}\right\}+\quad\Rightarrow\quad 0=-1$$

систем је противрјечан

б)

$$a=-1$$

$$\left.\begin{aligned}x+y+2z&=-1\\ 2x-y+z&=-1\\ x-2y-z&=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$3x-3y=-1$$

$$3x-3y=-1\Rightarrow x=-\frac{1}{3}+y$$

$$z=x-2y=-\frac{1}{3}+y-2y=-\frac{1}{3}-y$$

систем има бесконачно много рјешења $\left(-\frac{1}{3}+y,y,-\frac{1}{3}-y\right),\quad y\in R$.

2.

$$XB^2+B=B^3$$

$$|B|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -2\\ -3 & 7 & -4\end{vmatrix}=4\neq 0$$

$$B^{-1}=\frac{1}{|B|}A^{adj},\quad XB^2+B=B^3\,\Big|\cdot B^{-2}$$

$$X=B-B^{-1}$$

$$B^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{5}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -3 & 7 & -4 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} \frac{5}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{7}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{4} & -\frac{9}{4} \\ -2 & 8 & -4 \end{bmatrix}$$

3.

A (0,-1,2)

$\alpha:\ 3x-2y-3z-7=0 \Rightarrow \ \overrightarrow{N}=(3,-2,-3)$

$p_1:\ \ \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+4}{-2}=\dfrac{z-1}{2}$

$p:\ \ \dfrac{x}{l}=\dfrac{y+1}{m}=\dfrac{z-2}{n}$

$\overrightarrow{p}=(l,m,n)$ **, права** p **и раван** α **су паралелне ако је** $\overrightarrow{N}\cdot\overrightarrow{p}=0$

$3l-2m-3n=0$ **(*)**

$p_1\cap p:$

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+4}{-2}=\frac{z-1}{2}=s\Rightarrow\begin{cases} x=2+3s \\ y=-4-2s \\ z=1+2s \end{cases}$$

$$\frac{x}{l}=\frac{y+1}{m}=\frac{z-2}{n}=t\Rightarrow\begin{cases} x=lt \\ y=-+mt \\ z=2+nt \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2+3s=lt \\ -4-2s=-1+mt \\ 1+2s=2+nt \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} l=\dfrac{2+3s}{t} \\ m=\dfrac{-3-2s}{t} \\ n=\dfrac{-1+2s}{t} \end{array}\right\}$$ **и то уврстимо у (*)** $\Rightarrow$ ***s*** **= 2**

пресјечна тачка правих је (8,-8,5).

l **= 5,** ***m*** **= -6,** ***n*** **= 9**

тражена права је: $\dfrac{x-3}{5}=\dfrac{y+2}{-6}=\dfrac{z+4}{9}$

или преко услова за пресјек двије праве

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0$$

4.

Д.П. $x>0 \wedge x \neq 0 \Rightarrow x \in (0,+\infty)$

$f(x)=0 \Rightarrow \ln x=0 \Rightarrow x=1$ **тј.(1,0) је нула функције**

Знак функције

$f(x)>0 \Rightarrow x \in (1,+\infty)$

$f(x)<0 \Rightarrow x \in (0,1)$

Асимптоте:

-вертикална

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{x} e^{-\ln^2 x} = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{e^{\ln^2 + \ln x}} = \bullet\bullet\bullet = 0$$

- нема косу асимптоту

- хоризонтална

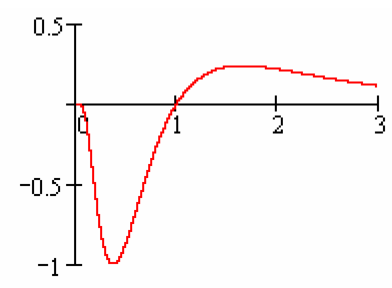
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} e^{-\ln^2 x} = 0 \Rightarrow y=0.$$

Екстреми

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}e^{-\ln^2 x}+\frac{\ln x}{x}e^{-\ln^2 x}\left(-2\ln x\cdot\frac{1}{x}\right)=\bullet\bullet\bullet=\frac{1}{x^2 e^{\ln^2 x}}\left(1-\ln x-2\ln^2 x\right)$$

$f'(x)=0 \Rightarrow x_1=e^{-1}, x_2=e^{\frac{1}{2}}$ $\left(e^{-1},1\right)$**-минимум,** $\left(e^{1/2},\frac{1}{2e^{3/4}}\right)$ **-максимум**

$$f''(x)=\frac{1}{x^3 e^{\ln^2 x}}\left(4\ln^3 x+6\ln^2 x-4\ln x-3\right)$$



5.

(1) $x_1+x_2+x_3=0$ $\qquad$ (4) $x_1+x_2+x_4=-b$

(2) $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=a$ $\qquad$ (5) $x_1x_2+x_1x_4+x_2x_4=0$

(3) $x_1x_2x_3=-4$ $\qquad$ (6) $x_1x_2x_4=-2$

$(1)-(4)\Rightarrow x_3-x_4=b$

$(2)-(5)\Rightarrow x_1+x_2=\frac{a}{b}$

$(3)-(6)\Rightarrow x_1x_2=-\frac{2}{b}$

Ако $x_1 + x_2 = \dfrac{a}{b}$ уврстимо у (1) $\Rightarrow x_3 = -\dfrac{a}{b}$

Ако $x_1 + x_2 = \dfrac{a}{b}$ уврстимо у (4) $\Rightarrow x_4 = -b - \dfrac{a}{b}$

Из (3) $\Rightarrow \dfrac{a}{b^2} = -2$, а из (2) $\Rightarrow -\dfrac{2}{b} - \dfrac{a^2}{b^2} = a$

Добијамо $a = -2, \quad b = -1$.

$P(x) = x^3 - 2x + 4, \quad Q(x) = x^3 - x^2 + 2$

$P(x) = (x+2)(x^2 - 2x + 2), \quad Q(x) = (x+1)(x^2 - 2x + 2)$