SVEUČILIŠTE U SPLITU
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE, STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

Ivan Slapničar
Nevena Jakovčević Stor
Josipa Barić
Ivančica Mirošević

Matematika 2

Zbirka zadataka

www.fesb.hr/mat2

Split, 2012.

Sadržaj

Popis slika

Predgovor

Ova zbirka namijenjena je studentima tehničkih i prirodnih znanosti, a u prvom redu studentima Sveučilišta u Splitu, Fakulteta elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje (FESB). U zbirci je izloženo gradivo kolegija "Matematika 2" po sadržaju koji se predaje na FESB-u. Sličan sadržaj nalazi se u većini istoimenih kolegija koji se predaju na tehničkim i prirodoslovnim fakultetima.

Zbirka prati gradivo i način izlaganja udžbenika Sveučilišta u Splitu: I. Slapničar, *Matematika 2*, te se rješenja zadataka, radi lakšeg praćenja i razumijevanja, referencijraju na odgovarajuće djelove udžbenika. Pored potpuno riješenih zadataka, zbirka sadrži i zadatake za vježbu s rješenjima.

Posebnost zbirke je u tome što svaki zadatak ima naslov iz kojeg se vidi što student treba naučiti.

Budući se radi o standardnom sadržaju, nije citirana posebna literatura. Spomenut ćemo samo neke od knjiga koje su utjecale na sadržaj, a koje preporučujemo i čitatelju:

B. P. Demidović, *Zadaci i riješeni primjeri iz više matematike*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1978.

P. Javor, *Matematička analiza, Zbirka zadataka*, Školska knjiga, Zagreb, 1989.

V. Devide, *Riješeni zadaci iz više matematike, svezak II, III*, Školska knjiga, Zagreb, 1992.

B. Apsen, Riješeni zadaci više matematike, drugi dio, Tehnička knjiga, Zagreb, 1982.

U izradi zbirke korištena su iskustva i zabilješke bivših i sadašnjih nastavnika matematike na FESB-u pa im ovom prilikom iskazujemo svoju zahvalnost.

U Splitu, ožujka 2012.

Autori

1.

NEODREĐENI INTEGRAL

1.1 Neposredno integriranje

Izračunajte integrale:

(a) $\displaystyle\int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx$,

(b) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx$,

(c) $\displaystyle\int \frac{2^x+5^x}{10^x}\,dx$,

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}\,dx$,

(e) $\displaystyle\int \mathrm{tg}^2 x\,dx$.

Rješenje. U računanju primjenjujemo [M2, teorem 1.4] i tablicu osnovnih integrala [M2, §1.1.1].

(a) Da bismo mogli primjeniti integral potencije iz tablice osnovnih integrala podintegralu funkciju prvo zapisujemo u jednostavnijem obliku, pa vrijedi

$$\begin{aligned}\int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx &= \int \left(1-\frac{1}{x^2}(g)x^{\frac{3}{4}}\,dx = \int x^{\frac{3}{4}}\,dx - \int x^{-\frac{5}{4}}\,dx\\ &= \frac{x^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}} - \frac{x^{-\frac{1}{4}}}{-\frac{1}{4}} + C = \frac{4x\sqrt[4]{x^3}}{7} + \frac{4}{\sqrt[4]{x}} + C\\ &= \frac{4\left(x^2+7\right)}{7\sqrt[4]{x}} + C.\end{aligned}$$

(b) Tablični integral dobivamo nakon što brojniku dodamo i oduzmemo broj 1, pa vrijedi

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,dx &= \int 1\,dx - \int \frac{1}{x^2+1}\,dx\\ &= x - \mathrm{tg}x + C.\end{aligned}$$

(c) Vrijedi

$$\begin{aligned}\int \frac{2^x+5^x}{10^x}\,dx = \int \left(\frac{1}{5}\right)^x dx + \int \left(\frac{1}{2}\right)^x dx &= \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^x}{\ln\frac{1}{5}} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln\frac{1}{2}} + C\\ &= -\frac{5^{-x}}{\ln 5} - \frac{2^{-x}}{\ln 2} + C.\end{aligned}$$

(d) Koristeći osnovni trigonometrijski identitet dobivamo

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}\,dx = \int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}\,dx &= \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx + \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx\\ &= \mathrm{tg}x - \mathrm{ctg}x + C.\end{aligned}$$

(e) Zapisivanjem funkcije $\mathrm{tg}x$ u obliku $\mathrm{tg}x = \frac{\sin x}{\cos x}$ dobivamo

$$\begin{aligned}\int \mathrm{tg}^2 x\,dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx &= \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx - \int dx\\ &= \mathrm{tg}x - x + C.\end{aligned}$$

1.2 Metode supstitucije

Izračunajte integrale:

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x-a}$,

(b) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+e^x}$,

(c) $\displaystyle\int \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$,

(d) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+2\sin x}\,dx$.

Rješenje. Integrale računamo svodeći zadani integral na tablični dopustivom zamjenom varijable integracije nekom funkcijom (bijekcijom) ili dopustivom zamjenom nekog analitičkog izraza novom varijablom integracije.

(a) Umjesto $x-a$ uvodimo novu varijablu t. Potrebno je promijeniti i dx koji je u ovom slučaju jednak dt, jer je $dt = d(x-a) = dx$.

$$\int \frac{dx}{x-a} = \left\{ \begin{array}{c} x-a=t \\ dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t} = \ln|x-a| + C.$$

(b) Umjesto $1+e^x$ uvodimo novu varijablu t, pa vrijedi

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{1+e^x} &= \left\{ \begin{array}{c} 1+e^x=t \\ e^x\,dx = dt \\ x=\ln(t-1) \\ dx = \frac{dt}{t-1} \end{array} \right\} = \int \frac{\frac{dt}{t-1}}{t} = \int \frac{dt}{(t-1)\,t} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{(t-1)t} = \frac{A}{t}+\frac{B}{t-1} \\ A=-1 \quad B=1 \end{array} \right\} \\ &= \int \frac{1}{t-1}\,dt - \int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t-1| - \ln|t| + C \\ &= \ln e^x - \ln(1+e^x) + C = x - \ln(1+e^x) + C.\end{aligned}$$

Osim suspstitucije u ovom zadatku korišten je i rastav na parcijalne razlomke gdje smo razlomak pod integralom $\frac{1}{(t-1)t}$ rastavili na dva jednostavnija.

(c) Zbog pojave $\sqrt[3]{x}$ u podintegralnom izrazu uvodimo zamjenu $x=t^3$, pa vrijedi

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx &= \left\{ \begin{array}{c} x=t^3 \\ dx = 3t^2\,dt \end{array} \right\} = \int \frac{\sin t}{t^2}\,3t^2\,dt \\ &= 3\int \sin t\,dt = -3\cos t + C = -3\cos\sqrt[3]{x} + C.\end{aligned}$$

(d) Vrijedi

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos x}{1+2\sin x}\,dx &= \left\{ \begin{array}{c} 1+2\sin x=t \\ 2\cos\,dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{2t} \\ &= \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln|1+2\sin x| + C.\end{aligned}$$

1.3 Uvođenje novog argumenta

Izračunajte integrale:

(a) $\int \sin 3x\, dx$,

(b) $\int \frac{(\ln x)^4}{x}\, dx$,

(c) $\int x\sqrt{1+x^2}\, dx$.

Rješenje. Da bismo zadane integrale sveli na tablične umjesto x uvodimo novi argument, pa umjesto dx imamo $d(noviargument)$.

(a) Novi argument je $3x$, a kako je $d\,(3x) = 3\,dx$ integral je potrebno jo pomnožiti s $\frac{1}{3}$.

$$\int \sin 3x\, dx \frac{1}{3} = \int \sin 3x\, dx\,(3x) = -\frac{1}{3}\cos(3x) + C.$$

(b) Za novi argument uzimamo $\ln x$, pa vrijedi

$$\int \frac{(\ln x)^4}{x}\, dx = \int (\ln x)^4\, d\,(\ln x) = \frac{(\ln x)^5}{5} + C.$$

(c) Vrijedi

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{1+x^2}\, dx &= \int \left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}} x\, dx = \frac{1}{2}\int \left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}} 2x\, dx \\ &= \frac{1}{2}\int \left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}\, d\left(1+x^2\right) = \frac{1}{2}\frac{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C.\end{aligned}$$

Ovi integrali mogu se rješiti i metodom supstitucije tipa $(noviargument) = t$.

1.4 Metoda parcijalne integracije

Izračunajte integrale:

(a) $\int xe^x\, dx$,

(b) $\int \sqrt{x}\ln^2 x\, dx$,

(c) $\int x\ln\frac{1+x}{1-x}\, dx$,

(d) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$,

(e) $\displaystyle\int e^x \sin x\,dx$.

Rješenje. U računaju zadanih integrala koristimo formulu parcijalne integracije [M2, teorem 1.7]. Ideja je da integral koji se pojavi nakon parcijalne integracije bude jednostavniji od zadanog integrala.

(a) U parcijalnoj integraciji uzimamo da je $u = x$ i $dv = e^x\,dx$, jer time x derivacijom postaje 1 čime se integriranje pojednostavnjuje.

$$\begin{aligned}\int xe^x\,dx &= \left\{\begin{array}{cc} u = x & dv = e^x\,dx \\ du = dx & v = \int e^x\,dx = e^x \end{array}\right\} \\ &= xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C = (x-1)\,e^x + C.\end{aligned}$$

(b) Parcijalnu integraciju možemo provoditi i više puta uzastopce, npr. u slijedećem intgralu zadano je $\ln^2 x$, pa nakon dvije parcijelne integracije ln "nestaje".

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x}\ln^2 x\,dx &= \left\{\begin{array}{cc} u = \ln^2 x & dv = \sqrt{x}\,dx \\ du = \frac{2\ln x}{x}\,dx & v = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} \end{array}\right\} \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\ln^2 x - \frac{4}{3}\int \sqrt{x}\ln x\,dx \left\{\begin{array}{cc} u = \ln x & dv = \sqrt{x}\,dx \\ du = \frac{dx}{x} & v = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} \end{array}\right\} \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\ln^2 x - \frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\ln x - \frac{2}{3}\int \sqrt{x}\,dx\right) \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\ln^2 x - \frac{8}{9}\sqrt{x^3}\ln x + \frac{16}{27}\sqrt{x^3} + C \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\left(\ln^2 x - \frac{4}{3}\ln x + \frac{8}{9}\right) + C.\end{aligned}$$

(c) Vrijedi

$$\begin{aligned}\int x\ln\frac{1+x}{1-x}\,dx &= \left\{\begin{array}{cc} u = \ln\frac{1+x}{1-x} & dv = x\,dx \\ du = \frac{2}{1-x^2}\,dx & v = \frac{x^2}{2} \end{array}\right\} \\ &= \frac{x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} - \int \frac{x^2}{2}\,\frac{2}{1-x^2}\,dx \\ &= \frac{x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} - \int \frac{-x^2+1-1}{1-x^2}\,dx \\ &= \frac{x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} - \int dx - \int \frac{1}{1-x^2}\,dx \\ &= \frac{x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + x - \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + C \\ &= \frac{1}{2}\left(x^2+1\right)\ln\frac{1+x}{1-x} + x + C.\end{aligned}$$

(d) x^3 u brojinku zapisujemo kao $x^2 \cdot x$, pa slijedi

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx &= \int x^2 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \\
&= \left\{ \begin{array}{cc} u = x^2 & dv = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \\ du = 2x\,dx & v = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \sqrt{1+x^2} \end{array} \right\} \\
&= x^2\sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2}2x\,dx \\
&= x^2\sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2}\,d\left(1+x^2\right) \\
&= x^2\sqrt{1+x^2} - \frac{2}{3}\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}} + C.
\end{aligned}$$

(e) Vrijedi

$$\begin{aligned}
\int e^x \sin x\,dx &= \left\{ \begin{array}{cc} u = e^x & dv = \sin x\,dx \\ du = e^x\,dx & v = -\cos x \end{array} \right\} \\
&= -e^x \cos x + \int e^x \cos x\,dx \\
&= \left\{ \begin{array}{cc} u = e^x & dv = \cos x\,dx \\ du = e^x\,dx & v = \sin x \end{array} \right\} \\
&= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x\,dx.
\end{aligned}$$

Integral koji preostaje izračunati jednak je početnom integralu, označimo ga sa I, pa izjednačavanjem lijeve i desne strane dobivamo:

$$I = e^x \cos x + e^x \sin x - I,$$

iz čega slijedi

$$\begin{aligned}
2I &= e^x\left(\cos x - \sin x\right) \\
I &= \int e^x \sin x\,dx = \frac{e^x}{2}\left(\cos x - \sin x\right) + C.
\end{aligned}$$

1.5 Rekurzivne formule

Nađite rekurzivnu formulu za integral: $I_n = \int \left(a^2 - x^2\right)^n\,dx, \quad n \in \mathbb{N}$.

Rješenje. Za $n = 1$ vrijedi

$$I_1 = \int \left(a^2 - x^2\right)\,dx = a^2 x - \frac{x^3}{3} + C = x\left(a^2 - \frac{x^2}{3}\right) + C.$$

Za $n \geq 2$ vrijedi

$$
\begin{aligned}
I_n &= \int \left(a^2 - x^2\right)^n \, dx = \left\{ \begin{array}{cc} u = \left(a^2 - x^2\right)^n & dv = \, dx \\ du = -2nx \left(a^2 - x^2\right)^{n-1} \, dx & v = x \end{array} \right\} \\
&= x \left(a^2 - x^2\right)^n - \int -2nx^2 \left(a^2 - x^2\right)^{n-1} \, dx \\
&= x \left(a^2 - x^2\right)^n + 2n \int \left[- \left(a^2 - x^2\right)\right]^n \, dx + 2n \int a^2 \left(a^2 - x^2\right)^{n-1} \, dx \\
&= x \left(a^2 - x^2\right)^n - 2nI_n + 2na^2 I_{n-1}.
\end{aligned}
$$

Izjednačavanjem lijeve i desne strane dobivamo traženu rekurzivnu formulu

$$
\begin{aligned}
I_n &= x \left(a^2 - x^2\right)^n - 2nI_n + 2na^2 I_{n-1} \\
I_n \left(1 + 2n\right) &= x \left(a^2 - x^2\right)^n + 2na^2 I_{n-1} \\
I_n &= \frac{x \left(a^2 - x^2\right)^n}{(2n+1)} + \frac{2na^2}{(2n+1)} I_{n-1}.
\end{aligned}
$$

1.6 Integriranje racionalnih funkcija

Izračunajte integrale:

(a) $\displaystyle \int \frac{dx}{x^2 + 5x}$,

(b) $\displaystyle \int \frac{dx}{2x^2 - 5x + 7}$,

(c) $\displaystyle \int \frac{x-1}{x^2 - x + 1} \, dx$,

(d) $\displaystyle \int \frac{3x-2}{2x^2 - 3x + 4} \, dx$,

(e) $\displaystyle \int \frac{x^3 + x + 2}{x^2 + 7x + 12} \, dx$,

(f) $\displaystyle \int \frac{1}{\left(1 + x^2\right)^2} \, dx$.

Rješenje.

(a) Polinom u nazivniku može se rastaviti na faktore $x^2 + 5x = x\,(x+5)$, pa tablične integrale dobivamo rastavom na parcijalne razlomke [M2, §1.4.3] .

Vrijedi

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^2+5x} &= \int \frac{dx}{x\,(x+5)} \\
&= \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{x(x+5)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+5} / \cdot x\,(x+5) \\ 1 = Ax + 5A + Bx \\ A = \frac{1}{5} \quad B = -\frac{1}{5} \end{array} \right\} \\
&= \frac{1}{5} \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{5} \int \frac{dx}{x+5} \\
&= \frac{1}{5} \ln |x| - \frac{1}{5} \ln |x+5| + C = \frac{1}{5} \ln \left| \frac{x}{x+5} \right| + C.
\end{aligned}
$$

(b) Polinom $2x^2-5x+7$ nema realnih nul-točaka, pa nazivnik ne možemo rastaviti na faktore. U tom slučaju integral računamo nadopunjavanjem nazivnika do punog kvadrata na slijedeći način:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{2x^2-5x+7} &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{7}{2}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\left(x-\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{16} + \frac{7}{2}} \\
&= \frac{1}{5} \int \frac{d\left(x-\frac{5}{4}\right)}{\left(x-\frac{5}{4}\right)^2 + \frac{31}{16}} \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{31}{16}}} \operatorname{arctg} \frac{x-\frac{5}{4}}{\sqrt{\frac{31}{16}}} + C \\
&= \frac{2}{\sqrt{31}} \operatorname{arctg} \frac{4x-5}{\sqrt{31}} + C.
\end{aligned}
$$

(c) Nazivnik se ni u ovom primjeru ne može rastaviti na faktore, pa integral računamo zaspisivanjem brojnika u dva dijela od kojih je jedan derivacija nazivnika, a drugi konstanta. Time dobivamo dva integrala od kojih se prvi može izračunati metodom supstitucije [M2 vježbe, §1.2] ili uvođenjem novog argumenta [M2 vježbe, §1.3], dok drugi računamo kao u ovom zadatku pod (*b*).

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x-1}{x^2-x+1}\,dx &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x-1) + \frac{1}{2} - 1}{x^2-x+1}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x-1) - \frac{1}{2}}{x^2-x+1}\,dx \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{(2x-1)-1}{x^2-x+1}\,dx \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2-x+1} \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x^2-x+1\right)}{x^2-x+1} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1} \\
&= \frac{1}{2} \ln \left| x^2-x+1 \right| - \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.
\end{aligned}
$$

(d) Vrijedi

$$\begin{aligned}\int \frac{3x-2}{2x^2-3x+4}\,dx &= \int \frac{3\left(x-\frac{2}{3}\right)}{2\left(x^2-\frac{3}{2}x+2\right)}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{x-\frac{2}{3}}{x^2-\frac{3}{2}x+2}\,dx \\ &= \frac{3}{2}\int \frac{\frac{1}{2}\left(2x-\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{4}-\frac{2}{3}}{x^2-\frac{3}{2}x+2}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{\frac{1}{2}\left(2x-\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{12}}{x^2-\frac{3}{2}x+2}\,dx \\ &= \frac{3}{2}\frac{1}{2}\int \frac{2x-\frac{3}{2}}{x^2-\frac{3}{2}x+2}\,dx + \frac{3}{2}\frac{1}{12}\int \frac{dx}{x^2-\frac{3}{2}x+2} \\ &= \frac{3}{4}\int \frac{d\left(x^2-\frac{3}{2}x+2\right)}{x^2-\frac{3}{2}x+2} + \frac{1}{8}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}+2} \\ &= \frac{3}{4}\ln\left(x^2-\frac{3}{2}x+2\right)+\frac{1}{8}\frac{4}{\sqrt{23}}\mathrm{arctg}\frac{4x-3}{\sqrt{23}}+C.\end{aligned}$$

(e) Kako je u ovom integralu stupanj brojnika podintegralne funkcije veći od stupnja nazivnika, prvo provodimo dijeljenje polinoma, a zatim integral rastavljamo na dva, od kojih je prvi tablični integral potencije, a drugi se svodi na neki od prethodnih slučajeva.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^3+x+2}{x^2+7x+12}\,dx = \\ &= \left\{ \begin{array}{c} \left(x^3+x+2\right):\left(x^2+7x+12\right)=x-7 \\ \vdots \\ ost.38x+86 \end{array} \right\} \\ &= \int (x-7)\,dx + \int \frac{38x+86}{x^2+7x+12}\,dx = \frac{x^2}{2}-7x+I_1 \end{aligned}$$

Integral označen sa I_1 računamo posebno. Kako su $x_1=-3$ i $x_1=-4$ nultočke polinoma $x^2+7x+12$, nazivnik se može rastaviti na faktore, pa tablične integrale dobivamo rastavom na parcijalne razlomke.

$$\begin{aligned}\int \frac{38x+86}{x^2+7x+12}\,dx &= \int \frac{38x+86}{(x+3)(x+4)}\,dx \\ &= \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{(x+3)(x+4)}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x+4} \\ A=-28 \quad B=66 \end{array} \right\} \\ &= -28\int \frac{d(x+3)}{x+3}+66\int \frac{d(x+4)}{x+4} \\ &= -28\ln|x+3|+66\ln|x+4|+C.\end{aligned}$$

Konačno rješenje je

$$I=\int \frac{x^3+x+2}{x^2+7x+12}\,dx = \frac{x^2}{2}-7x-28\ln|x+3|+66\ln|x+4|+C.$$

(f) Slijedeći integral računamo dodavanjem i oduzimajnem x^2 u brojniku, pa

vrijedi

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}\,dx &= \int \frac{1+x^2-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}\,dx \\
&= \int \frac{1+x^2}{\left(1+x^2\right)^2}\,dx - \int \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^2}\,dx \\
&= \int \frac{1}{(1+x^2)}\,dx - \int \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^2}\,dx = \operatorname{arctg} x - I_1.
\end{aligned}$$

Integral označen sa I_1 računamo posebno koristeći parcijalnu integraciju,

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^2}\,dx &= \int \frac{x\cdot x}{\left(1+x^2\right)^2}\,dx \\
&= \left\{ \begin{array}{cc} u = x & dv = \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx \\ du = \,dx & v = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(1+x^2\right)}{(1+x^2)^2} = -\frac{1}{2(1+x^2)} \end{array} \right\} \\
&= -\frac{x}{2\left(1+x^2\right)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2} \\
&= -\frac{x}{2\left(1+x^2\right)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C.
\end{aligned}$$

pa je konačno rješenje

$$\int \frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{x}{2\left(1+x^2\right)} + C.$$

1.7 Integriranje trigonometrijskih funkcija

Izračunajte integrale:

(a) $\displaystyle\int \cos^5 x\,dx$,

(b) $\displaystyle\int \cos x \cos 2x \cos 5x\,dx$,

(c) $\displaystyle\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}$,

(d) $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x + \cos^5 x}{\sin^2 x + \sin^4 x}\,dx$.

Rješenje.

(a) Vrijedi

$$\begin{aligned}\int \cos^5 x\,dx &= \int \cos^3 x \cos^2 x\,dx = \int \cos^3 x\left(1-\sin^2 x\right)\,dx\\ &= \int \cos^3 x\,dx - \int \cos^3 x \sin^2 x\,dx\\ &= \int \cos x\left(1-\sin^2 x\right)\,dx - \int \cos^3 x\sin^2 x\,dx\\ &= \int \cos x\,dx - \int \cos x \sin^2 x\,dx - \int \cos^3 x \sin^2 x\,dx\\ &= \sin x - I_1 - I_2.\end{aligned}$$

Integrale označene sa I_1 i I_2 računamo posebno koristeći jednostavne supstitucije.

$$\begin{aligned}I_1 &= \int \cos x \sin^2 x\,dx = \left\{\begin{array}{c}\sin x = t\\ \cos x\,dx = dt\end{array}\right\}\\ &= \int t^2\,dt = \frac{t^3}{3} + C_2 = \frac{\sin^3 x}{3} + C_1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_2 &= \int \cos^3 x \sin^2 x\,dx = \left\{\begin{array}{c}\sin x = t\\ \cos x\,dx = dt\end{array}\right\}\\ &= \int t^2\left(1-t^2\right)\,dt = \int t^2\,dt - \int t^4\,dt\\ &= \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C_2 = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C_2.\end{aligned}$$

pa je konačno rješenje

$$\begin{aligned}\int \cos^5 x\,dx &= \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^5 x}{5} + C\\ &= \sin x - \frac{2\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^5 x}{5} + C.\end{aligned}$$

(b) Podintegralu funkciju prvo raspišemo pomoću trigonometrijskih formula pretvorbe, pa vrijedi

$$\begin{aligned}\int \cos x \cos 2x \cos 5x\,dx &= \frac{1}{2}\int (\cos x + \cos 3x)\cos 5x\,dx\\ &= \frac{1}{2}\int \cos x \cos 5x\,dx + \frac{1}{2}\int \cos 3x \cos 5x\,dx\\ &= \frac{1}{4}\int (\cos 4x + \cos 6x)\,dx + \frac{1}{4}\int (\cos 2x + \cos 8x)\,dx\\ &= \frac{1}{4}\left(\int \cos 4x\,dx + \int \cos 6x\,dx + \int \cos 2x\,dx + \int \cos 8x\,dx\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 6x}{6} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 8x}{8}\right) + C\\ &= \frac{\sin 2x}{8} + \frac{\sin 4x}{16} + \frac{\sin 6x}{24} + \frac{\sin 8x}{32} + C.\end{aligned}$$

(c) Integral računamo koristeći univerzalnu trigonometrijsku supstituciju [M2, §1.5.1].

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{2\sin x-\cos x+5} &= \left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{tg}\frac{x}{2}=t & \sin x=\frac{2t}{1+t^2} \\ dx=\frac{2\,dt}{1+t^2} & \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right\} \\
&= \int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{2\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}+5} = \int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{\frac{4t-1+t^2+5+5t^2}{1+t^2}} \\
&= \int \frac{2\,dt}{6t^2+4t+4} = \int \frac{dt}{3\left(t^2+\frac{2}{3}t+\frac{2}{3}\right)} \\
&= \int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{5}{9}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3t+1}{\sqrt{5}}+C \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}+C.
\end{aligned}$$

(d) U računanju integrala umjesto univerzalne trigonometrijske supstitucije koristit ćemo pojednostavnjenu supstituciju za racionalne funkcije sa svojstvom $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos^3 x+\cos^5 x}{\sin^2 x+\sin^4 x}\,dx &= \left\{ \begin{array}{c} R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x) \\ \sin x=t \\ \cos x\,dx=\ dt \end{array} \right\} \\
&= \int \frac{\cos^3 x\left(1+\cos^2 x\right)}{\sin^2 x\left(1+\sin^2 x\right)}\,dx \\
&= \int \frac{\cos^2 x\left(1+\cos^2 x\right)\cos x}{\sin^2 x\left(1+\sin^2 x\right)}\,dx \\
&= \int \frac{\left(1-t^2\right)\left(1+1-t^2\right)}{t^2\left(1+t^2\right)}\,dt = \int \frac{\left(1-t^2\right)\left(2-t^2\right)}{t^2\left(1+t^2\right)}\,dt \\
&= \int \frac{t^4-3t^2+2}{t^4+t}\,dt = \left\{ \begin{array}{c} \left(t^4-3t^2+2\right):\left(t^4+t\right)=1 \\ \vdots \\ ost.4t^2+2 \end{array} \right\} \\
&= \int 1\,dt+\int \frac{-4t^2+2}{t^2\left(1+t^2\right)}\,dt \\
&= \left\{ \begin{array}{c} \frac{-4t^2+2}{t^2(1+t^2)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t^2}+\frac{Ct+D}{t^2+1} \\ A=0,\quad B=2,\quad C=0,\quad D=-6 \end{array} \right\} \\
&= t+\int \frac{2}{t^2}\,dt+\int \frac{-6}{t^2+1}\,dt = t-\frac{2}{t}-6\operatorname{arctg}t+C.
\end{aligned}$$

1.8 Integriranje iracionalnih funkcija racionalnom supstitucijom

Izračunajte integrale:

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\left(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)}$,

(b) $\displaystyle\int \frac{dx}{(2x+1)^{\frac{2}{3}}-(2x+1)^{\frac{1}{2}}}$,

(c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3\,(x+2)^5}}$.

Rješenje.

(a) Ovakav integral rješavamo supstitucijom $x=t^k$, gdje je k najmanji zajednički višekratnik nazivnika eksponenata od x koji se pojavljuje u podintergalnoj funkciji.

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x\left(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)} &== \left\{ \begin{array}{c} x=t^6 \\ dx=6t^5\,dt \end{array} \right\} \\
&= \int \frac{6t^5\,dt}{t^6\left(1+2t^3+t^2\right)} = \int \frac{6\,dt}{t\left(1+2t^3+t^2\right)} \\
&= \left\{ \begin{array}{c} \left(2t^3+t^2+1\right)=0 \Longrightarrow t=-1 \\ \left(2t^3+t^2+1\right):(t+1)=2t^2-t+1 \\ \vdots \\ ost.0 \end{array} \right\} \\
&= 6\int \frac{dt}{t\,(t+1)\left(2t^2-t+1\right)} \\
&= \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{t(t+1)(2t^2-t+1)} = \frac{A}{t}+\frac{B}{t+1}+\frac{Ct+D}{2t^2-t+1} \\ A=1,\quad B=\frac{-1}{4},\quad C=\frac{-3}{2},\quad D=\frac{1}{4} \end{array} \right\} \\
&= 6\int \frac{dt}{t} + 6\int \frac{\frac{-1}{4}\,dt}{t+1} - 9\int \frac{t-\frac{1}{6}}{2t^2-t+1}\,dt \\
&= 6\ln|t| - \frac{3}{2\ln}\,|t+1| - I_1 \\
&= 6\ln\left|\sqrt[6]{x}\right| - \frac{3}{2\ln}\left|\sqrt[6]{x}+1\right| - I_1
\end{aligned}
$$

Integral označen sa I_1računamo posebno kao integral racionalne funkcije.

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int \frac{t-\frac{1}{6}}{2t^2-t+1}\,dt = \frac{1}{4}\int \frac{4t-\frac{2}{3}}{2t^2-t+1}\,dt \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{4t-1}{2t^2-t+1}\,dt + \frac{1}{4}\int \frac{\frac{1}{3}}{2t^2-t+1}\,dt \\
&= \frac{1}{4}\ln\left(2t^2-t+1\right) + \frac{1}{24}\int \frac{1}{t^2-\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}}\,dt \\
&= \frac{1}{4}\ln\left(2t^2-t+1\right) + \frac{1}{24}\int \frac{1}{\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{16}}\,dt \\
&= \frac{1}{4}\ln\left(2t^2-t+1\right) + \frac{1}{24}\frac{4}{\sqrt{7}} arctg \frac{4t-1}{\sqrt{7}} + C \\
&= \frac{1}{4}\ln\left(2t^2-t+1\right) + \frac{1}{6\sqrt{7}} arctg \frac{4t-1}{\sqrt{7}} + C \\
&= \frac{1}{4}\ln\left(2\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}+1\right) + \frac{1}{6\sqrt{7}} arctg \frac{4\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{7}} + C
\end{aligned}$$

pa je konačno rješenje

$$\int \frac{dx}{x\left(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)} = 6\ln\left|\sqrt[6]{x}\right| - \frac{3}{2\ln}\left|\sqrt[6]{x}+1\right| - \frac{1}{4}\ln\left(2\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}+1\right) - \frac{1}{6\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{7}} + C.$$

(b) Vrijedi

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(2x+1)^{\frac{2}{3}}-(2x+1)^{\frac{1}{2}}} &= \left\{ \begin{array}{cc} 2x+1=t^6 & dx=3t^5 \\ x=\frac{t^6-1}{2} & t=\sqrt[6]{2x+1} \end{array} \right\} \\
&= \int \frac{3t^5\,dt}{t^4-t^3} = 3\int \frac{t^2\,dt}{t-1} = 3\int \frac{t^2-1+1}{t-1}\,dt \\
&= 3\int \left(t+1+\frac{1}{t-1}\right)\,dt = 3\int (t+1)\,dt + 3\int \frac{1}{t-1}\,dt \\
&= \frac{3}{2}t^2+3t+3\ln|t-1|+C \\
&= \frac{3}{2}\sqrt[3]{2x+1}+3\sqrt[6]{2x+1}+3\ln\left|\sqrt[6]{2x+1}-1\right|+C.
\end{aligned}$$

(c) Vrijedi

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3 (x+2)^5}} &= \int \frac{dx}{\sqrt[4]{\left(\frac{x+2}{x-1}\right)(x-1)^4 (x+2)^4}} \\
&= \int \frac{1}{(x-1)(x+2)} \sqrt[4]{\left(\frac{x-1}{x+2}\right)}\, dx \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} \frac{x-1}{x+2} = t^4 & dx = \frac{12t^3}{(1-t^4)^2}\, dt \\ x = \frac{1+2t^4}{1-t^4} & \end{array} \right\} \\
&= \int \frac{1-t^4}{3} \cdot \frac{1-t^4}{3t^4} t \frac{12t^3}{(1-t^4)^2}\, dt \\
&= \int \frac{4}{3}\, dt = \frac{4}{3} t + C = \frac{4}{3} \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}} + C.
\end{aligned}
$$

1.9 Eulerova i trigonometrijska supstitucija

Izračunajte integrale:

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$,

(b) $\displaystyle\int \sqrt{3-2x-x^2}\, dx$,

Rješenje.

(a) U računanju integrala koristimo Eulerovu supstituciju [M2, §1.7.2], pa vrijedi

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}} &= \left\{ \begin{array}{c} \sqrt{x^2+2x+2} = t - x \\ x = \frac{t^2-2}{2t+2} \\ dx = \frac{t^2+2t+2}{2(t+1)^2}\, dt \end{array} \right\} \\
&= \int \frac{\frac{t^2+2t+2}{2(t+1)^2}}{1+t-\frac{t^2-2}{2t+2}}\, dt = \int \frac{\frac{t^2+2t+2}{2(t+1)^2}}{\frac{2t+2+2t^2+2t-t^2+2}{2(t+1)}}\, dt \\
&= \int \frac{\frac{t^2+2t+2}{t+1}}{t^2+4t+4}\, dt = \frac{t^2+2t+2}{(t+2)^2\,(t+1)}\, dt \\
&= \left\{ \begin{array}{c} \frac{t^2+2t+2}{(t+2)^2(t+1)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t+2} + \frac{C}{(t+2)^2} \\ t^2+2t+2 = A\,(t+2)^2 + B\,(t+2)\,(t+1) + C\,(t+1) \\ A=1, \quad B=0, \quad C=-2 \end{array} \right\} \\
&= \int \frac{dt}{t+1} - 2\int \frac{dt}{(t+2)^2} = \ln|t+1| - 2\int (t+2)^{-2}\, d\,(t+2) \\
&= \ln|t+1| + 2\,(t+2)^{-1} + C \\
&= \ln\left|\sqrt{x^2+2x+2}+x+1\right| + 2\left(\sqrt{x^2+2x+2}+x+2\right)^{-1} + C.
\end{aligned}
$$

(b) Izraz pod korijenom nadpounjavamo do punog kvadrata, a zatim uvodimo dvije supstitucije

$$
\begin{aligned}
\int \sqrt{3-2x-x^2}\, dx &= \int \sqrt{4-(1+x)^2}\, dx = \left\{ \begin{array}{c} x+1=t \\ dx = dt \end{array} \right\} \\
&= \int \sqrt{4-t^2}\, dt = \left\{ \begin{array}{c} t = 2\sin z \\ dt = 2\cos z dz \end{array} \right\} \\
&= \int 2\cos z 2\cos z dz = 4\int \cos^2 z dz \\
&= 2\int (1+2\cos z)\, dz = 2\left(z + \frac{1}{2}\sin 2z\right) + C \\
&= 2\left(z + \sin z\sqrt{1-\sin^2 z}\right) + C \\
&= 2\arcsin\frac{t}{2} + t\sqrt{1-\frac{t^2}{4}} + C \\
&= 2\arcsin\frac{x+1}{2} + (x+1)\sqrt{1-\frac{(x+1)^2}{4}} + C \\
&= 2\arcsin\frac{x+1}{2} + \frac{x+1}{2}\sqrt{3-2x-x^2} + C.
\end{aligned}
$$

1.10 Metoda neodređenih koeficijenata

Izračunajte integral $\displaystyle\int \frac{x^2+2x+3}{\sqrt{-x^2+4x}}\, dx.$

Rješenje. Iz formule za metodu neodređenih koeficijenata [M2, §1.7.3], slijedi

$$I=\int \frac{x^2+2x+3}{\sqrt{-x^2+4x}}\,dx=(a_1x+a_0)\sqrt{-x^2+4x}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x}}.$$

Deriviranjem po x dobivamo

$$\frac{x^2+2x+3}{\sqrt{-x^2+4x}}=a_1\sqrt{-x^2+4x}+(a_1x+a_0)\,\frac{-2x+4}{2\sqrt{-x^2+4x}}+\frac{\lambda}{\sqrt{-x^2+4x}}$$

Pomnožimo li cijeli izraz sa $\sqrt{-x^2+4x}$ dobivamo

$$x^2+2x+3=a_1-x^2+4x+(a_1x+a_0)\,(2-x)+\lambda$$

Izjednačavanjem lijeve i desne strane dobivamo

$$\begin{aligned}1&=-a_1-a_1\\2&=4a_1+2a_1-a_0\\3&=2a_0+\lambda\end{aligned}$$

iz čega slijedi

$$a_1=\frac{1}{2},a_0=-5,\lambda=13.$$

Integral I sada je jednak

$$\begin{aligned}I&=\left(-\frac{1}{2}x-5\right)\sqrt{-x^2+4x}+13\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x}}\\&=\left(-\frac{1}{2}x-5\right)\sqrt{-x^2+4x}+13\int\frac{dx}{\sqrt{4-(x-2)^2}}\\&=\left(-\frac{1}{2}x-5\right)\sqrt{-x^2+4x}+13\arcsin\frac{x-2}{2}+C.\end{aligned}$$

1.11 Binomni integral

Izračunajte integral $\int\sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}\,dx$

Rješenje. Integral rješavamo supstitucijom za binomni integral [M2, §1.7.4]. U ovom je slučaju $\frac{m+1}{n}$ cijeli broj $\left(m=\frac{1}{2},n=\frac{3}{2},p=\frac{-1}{2}\right)$, pa koristimo supstituciju

$1-x^{\frac{3}{2}}=t^2$.

$$\begin{aligned}
\int\sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}\,dx &= \int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x\sqrt{x}}}\,dx=\int x^{\frac{1}{2}}\left(1-x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{-1}{2}}\,dx\\
&=\left\{\begin{array}{c}\frac{m+1}{n}=1\in Z\\ 1-x^{\frac{3}{2}}=t^2\\ x^{\frac{1}{2}}=\frac{-4}{3}t\,dt\end{array}\right\}\\
&=\int\frac{-4}{3}tt^{-1}\,dt=\frac{-4}{3}t+C\\
&=\frac{-4}{3}\sqrt{1-x\sqrt{x}}+C.
\end{aligned}$$

1.12 Integriranje razvojem u red

Riješite integral $\int\sin x^2\,dx$ razvojem u red potencija, koristeći razvoj $\sin x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Rješenje. Zadana podintegralna funkcija je $\sin x^2$, pa koristeći zadani razvoj sinusa dobivamo

$$\begin{aligned}
\sin x^2 &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{\left(x^2\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}=(-1)^n\,\frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!}\\
&=x^2-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{10}}{5!}-\frac{x^{14}}{7!}+\cdots+(-1)^{n-1}\,\frac{x^{2(2n+1)}}{(2n+1)!}+\cdots
\end{aligned}$$

iz čega slijedi

$$\begin{aligned}
\int\sin x^2\,dx &= \int\left[x^2-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{10}}{5!}-\frac{x^{14}}{7!}+\cdots+(-1)^{n-1}\,\frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!}+\cdots\right]dx\\
&=\frac{x^3}{3}-\frac{x^7}{7\cdot 3!}+\frac{x^{11}}{11\cdot 5!}-\frac{x^{15}}{15\cdot 7!}+\cdots+(-1)^{n-1}\,\frac{x^{4n+3}}{(4n+3)\,(2n+1)!}+\cdots\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{x^{4n+3}}{(4n+3)\,(2n+1)!}.
\end{aligned}$$

1.13 Zadaci za vježbu

Izračunajte integrale:

1. $\displaystyle\int\frac{x^2+5x-1}{\sqrt{x}}\,dx$
2. $\displaystyle\int\frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}\,dx$

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + a^2}$

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

5. $\displaystyle\int e^{3\cos x} \sin x \, dx$

6. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{5 + x^3}} \, dx$

7. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x} + \ln x}{x} \, dx$

8. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{1 - 3e^{2x}} \, dx$

9. $\displaystyle\int \frac{\cos 2x}{\sin x \cos x} \, dx$

10. $\displaystyle\int \sin^2 x \, dx$

11. $\displaystyle\int \cos^2 x \, dx$

12. $\displaystyle\int \cos^5 x \sqrt{\sin x} \, dx$

13. $\displaystyle\int \frac{e^{\arctan x} + x \ln(1 + x^2) + 1}{1 + x^2} \, dx$

14. $\displaystyle\int x^2 e^x \, dx$

15. $\displaystyle\int (x^2 + 2x + 3) e^x \, dx$

16. $\displaystyle\int \ln x \, dx$

17. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^3} \, dx$

18. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx$

19. $\displaystyle\int x^2 \arccos x \, dx$

20. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2}$

21. $\displaystyle\int \cos(\ln x)\,dx$

22. $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^2+6x+5}$

23. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+2x+10)^2}$

24. $\displaystyle\int \frac{x^4\,dx}{x^4+5x^2+4}$

25. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^3-3x+2}$

26. $\displaystyle\int \frac{4x-3}{5-7x}\,dx$

27. $\displaystyle\int \frac{2x^2-3x+3}{x^3-2x^2+x}\,dx$

28. $\displaystyle\int \frac{x^3+4x^2-2x+1}{x^4+x}\,dx$

29. $\displaystyle\int \sin^4 x\,dx$

30. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^4 x\cos^4 x}$

31. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x\,(2\cos^2 x-1)}$

32. $\displaystyle\int \sin^{10} x\cos^3 x\,dx$

33. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^4 x}$

34. $\displaystyle\int \sin 3x\cos 5x\,dx$

35. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^4 x\cos^4 x}$

36. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$

37. $\displaystyle\int \frac{\sin 4x}{\sin^8 x+\cos^8 x}\,dx$

38. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x\,(2+\cos x-2\sin x)}$

39. $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x + \sin x}\, dx$

40. $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x \cos x}{\sin x + \cos x}\, dx$

41. $\displaystyle\int \sin^4 3x \cos^2 3x \, dx$

42. $\displaystyle\int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x(1 + \sqrt[3]{x})}\, dx.$

43. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}$

44. $\displaystyle\int \frac{1 - \sqrt{x+1}}{1 + \sqrt[3]{x+1}}\, dx.$

45. $\displaystyle\int \frac{x\, dx}{(\sqrt{7x - 10 - x^2})^3}.$

46. $\displaystyle\int \frac{dx}{x - \sqrt{x^2 - x + 1}}.$

47. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2} + 1}.$

48. $\displaystyle\int \sqrt{4x^2 - 4x + 3}\, dx.$

49. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1 + 2x - x^2}}\, dx.$

50. $\displaystyle\int \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}\, dx.$

51. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[4]{x} + 1)^{10}}.$

52. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx.$

53. Odredite rekurzivnu formulu za integral $I_n = \int \sin^n x\, dx$. Koristeći se dobivenim rezultatom izračunajte vrijednost integrala $\int \sin^4 x\, dx$.

54. Odredite rekurzivnu formulu za integral $I_n = \int (\ln x)^n\, dx$.

55. Odredite rekurzivnu formulu za integral $I_n = \int x^n e^{ax}\, dx$.

56. Razvijte u red potencija funkciju $\ln(1 + x)$ pomoću $\displaystyle\int \frac{1}{1 + x}\, dx$.

57. Odredite $\displaystyle\int \frac{\ln(1 + x)}{x}\, dx$ razvojem podintegralne funkcije u red potencija.

1.14 Rješenja zadataka za vježbu

1. $\frac{2}{15}\sqrt{x}\left(-15+25x+3x^2\right)+C$
2. $\frac{2^{-x}}{5\ln 2}-2\frac{5^{-x}}{\ln 5}+C$
3. $\frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)}{a}+C$
4. $\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)+C$
5. $-\frac{1}{3}e^{3\cos x}+C$
6. $\frac{1}{2}\left(5+x^3\right)^{\frac{2}{3}}+C$
7. $2\sqrt{x}+\frac{\ln^2|x|}{2}+C$
8. $-\frac{1}{6}\ln|-1+2\sin x|+C$
9. $\ln(\cos x)+\ln(\sin x)+C$
10. $\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin(2x)+C$
11. $\frac{1}{2}(x+\cos x\sin x)+C$
12. $\frac{2}{3}(\sin x)^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{7}(\sin x)^{\frac{7}{2}}-\frac{2}{11}(\sin x)^{\frac{11}{2}}+C$
13. $e^{\operatorname{arctg} x}+\operatorname{arctg} x+\frac{1}{4}\ln^2\left(1+x^2\right)+C$
14. $e^x\left(2-2x+x^2\right)+C$
15. $e^x\left(3+x^2\right)+C$
16. $-x+x\ln|x|+C$
17. $-\frac{1+2\ln|x|}{4x^2}+C$
18. $-\frac{1}{3}\sqrt{1-x^2}\left(2+x^2\right)+C$
19. $-\frac{1}{9}\sqrt{1-x^2}\left(2+x^2\right)+\frac{1}{3}\arccos x+C$
20. $\frac{x}{2a^2\left(a^2+x^2\right)}+\frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)}{2a^3}+C$

21. $\frac{1}{2}x\left(\cos\left(\ln|x|\right)+\sin\left(\ln|x|\right)\right)+C$

22. $\operatorname{arctg}(2x+3)+c$

23. $\frac{1}{54}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3}+\frac{1}{18}\frac{x+1}{x^2+2x+10}+c$

24. $x+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}x-\frac{8}{3}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}x+c$

25. $\frac{2}{9}\ln|x-1|-\frac{2}{9}\ln|x+2|-\frac{1}{3x-3}+c$

26. $-\frac{4}{7}x+\frac{1}{49}\ln\left|x-\frac{5}{7}\right|+c$

27. $3\ln|x|-\ln|x-1|-\frac{2}{x-1}+c$

28. $\ln|x|-2\ln|x+1|+\ln\left|x^2-x+1\right|+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+c$

29. $\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+c$

30. $-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3x-3\operatorname{ctg}x+3\operatorname{tg}x+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3x+c$

31. $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{2}\cos x}{1-\sqrt{2}\cos x}\right|-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right|+c$

32. $\frac{1}{11}\sin^{11}x-\frac{1}{13}\sin^{13}x+c$

33. $-\operatorname{ctg}x+2\operatorname{tg}x+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3x+c$

34. $\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{16}\cos 8x+c$

35. $-8\operatorname{ctg}2x-\frac{8}{3}\operatorname{ctg}^3 2x+c$

36. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}2x}{\sqrt{2}}+c$

37. $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\cos 4x+7+4\sqrt{2}}{\cos 4x+7-4\sqrt{2}}\right|+c$

38. $\frac{1}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|-\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right|+\frac{5}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3\right|+c$

39. $\ln|\sin x|-\sin x+c$

40. $\frac{1}{4}\ln|\sin x+\cos x|-\frac{1}{4}\cos x\left(\sin x+\cos x\right)+c$

41. $\frac{1}{16}x - \frac{1}{192}\sin 6x - \frac{1}{192}\sin 12x + \frac{1}{576}\sin 18x + c$

42. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + \operatorname{arctg}\sqrt[6]{x} + c.$

43. $2\sqrt{x} - 2\ln|1+\sqrt{x}| + c.$

44. $-\frac{6}{7}(x+1)^{\frac{7}{6}} + \frac{6}{5}(x+1)^{\frac{5}{6}} + \frac{3}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}} - 2(x+1)^{\frac{1}{2}} - 3(x+1)^{\frac{1}{3}} + 6(x+1)^{\frac{1}{6}} + 3\ln|\sqrt[3]{x+1}+1| - 6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x+1} + c.$

45. $\frac{10}{9}\cdot\frac{x-2}{\sqrt{7x-10-x^2}} - \frac{4}{9}\cdot\frac{\sqrt{7x-10-x^2}}{x-2} + c.$

46. $2\ln|\sqrt{x^2-x+1}-x| - \frac{3}{2}\ln|2\sqrt{x^2-x+1}-2x+1| + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2-x+1}-2x+1} + c.$

47. $-\frac{2}{1+\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + c$

48. $\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)\sqrt{4x^2-4x+3} + \frac{1}{2}\ln|2x-1+\sqrt{4x^2-4x+3}| + c.$

49. $(-\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{6}x - \frac{19}{6}(g)\sqrt{1+2x-x^2} + 4\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2}} + c.$

50. $\left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{6}x + \frac{7}{6}\right)\sqrt{x^2+2x+2} + \frac{5}{2}\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}| + c.$

51. $-\frac{1}{2(\sqrt[4]{x}+1)^8} + \frac{4}{9(\sqrt[4]{x}+1)^9} + c.$

52. $2(1+\sqrt[3]{x})^{\frac{3}{2}} + c.$

53. $I_n = -\frac{1}{n}\cos x\sin^{n-1}x + \frac{n-1}{n}I_{n-2},\ n \geq 2,$
$I_4 = -\frac{1}{4}\sin^3 x\cos x - \frac{3}{8}\sin x\cos x + \frac{3}{8}x + c.$

54. $I_n = x\ln^n x - nI_{n-1}.$

55. $I_n = \frac{1}{a}x^n e^{ax} - \frac{n}{a}I_{n-1}.$

56. $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1},\ x \in \langle -1, 1].$

57. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2},\ x \in \langle -1, 1].$

2.

ODREĐENI INTEGRAL

2.1 Newton-Leibnitzova formula

Izračunajte integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,dx}{x^2+3x+2}$.

Rješenje. Vrijedi

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x\,dx}{x^2+3x+2} &= \int_0^1 \frac{x\,dx}{(x+2)\,(x+1)} \\
&= \left\{ \begin{array}{c} \frac{x}{(x+2)(x+1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+1} \\ A = 2, B = -1 \end{array} \right\} \\
&= 2\int_0^1 \frac{dx}{x+2} - \int_0^1 \frac{dx}{x+1} \\
&= 2\ln|x+2|\Big|_0^1 - \ln|x+1|\Big|_0^1 \\
&= 2\,(\ln 3 - \ln 2) - (\ln 2 - \ln 1) = 2\ln\frac{3}{2} - \ln 2 = \ln\frac{9}{8}.
\end{aligned}$$

2.2 Supstitucija i parcijalna integracija

Izračunajte integrale:

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{dx}{(3+2x)^2}$,

(b) $\displaystyle\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx$,

(c) $\displaystyle\int_{0}^{e-1} \ln(x+1)\,dx.$.

Rješenje.

(a) Vrijedi

$$\int_{-1}^{2} \frac{dx}{(3+2x)^2} = \left\{ \begin{array}{c} 3+2x=t \\ 2\,dx = dt \end{array} \quad \begin{array}{c|c|c} x & -1 & 1 \\ \hline t & 2 & 7 \end{array} \right\}$$

$$= \int_{1}^{7} \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{2t}\Big|_1^7 = -\frac{1}{2\cdot 7} + \frac{1}{2\cdot 1} = \frac{3}{7}.$$

(b) Koristimo formulu parcijalne integracije [M2, teorem 1.7] , pa slijedi

$$\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx = \left\{ \begin{array}{c} x = \cos t \\ dx = -\sin t\,dt \end{array} \quad \begin{array}{c|c|c} x & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\ \hline t & \frac{\pi}{4} & 0 \end{array} \right\}$$

$$= -\int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{\sin t}{\cos^2 t}\sin t\,dt = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}\,dt = -\mathrm{tg}t\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{0} + t\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{0} = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

(c) Vrijedi

$$
\begin{aligned}
\int\limits_0^{e-1} \ln(x+1)\,dx &= \left\{ \begin{array}{cc} u = \ln(x+1) & dv = dx \\ du = \frac{dx}{x+1} & v = x \end{array} \right\} \\
&= x\ln(x+1)\Big|_0^{e-1} - \int\limits_0^{e-1} \frac{x}{x+1}\,dx \\
&= (e-1)\ln e - \int\limits_0^{e-1} \frac{x+1-1}{x+1}\,dx \\
&= e-1-\left(\int\limits_0^{e-1} dx - \int\limits_0^{e-1} \frac{dx}{x+1}\right) \\
&= e-1-x\Big|_0^{e-1} + \ln|x+1|\Big|_0^{e-1} \\
&= e-1-(e-1)+\ln e = 1.
\end{aligned}
$$

2.3 Nepravi integral

Izračunajte slijedeće integrale:

(a) $\displaystyle\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$,

(b) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5}$,

(c) $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^3}$.

Rješenje.

(a) Vrijedi

$$
\begin{aligned}
\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} &= \lim_{b\to\infty} \int\limits_1^{b} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} \\
&= \left\{ \begin{array}{lll} \sqrt{x^2+1} = t - x & dx = \frac{4t^2-2\left(t^2-1\right)}{4t^2}\,dt & \begin{array}{c|c|c} x & 1 & b \\ \hline t & \sqrt{2}+1 & \sqrt{b^2+1}+b \end{array} \\ x^2+1 = (t-x)^2 & dx = \frac{t^2+1}{2t^2}\,dt & \\ x = \frac{t^2-1}{2t} & & \end{array} \right\} \\
&= \lim_{b\to\infty} \int\limits_{\sqrt{2}+1}^{\sqrt{b^2+1}+b} \frac{\frac{t^2+1}{2t^2}\,dt}{\frac{t^2-1}{2t}\left(t-\frac{t^2-1}{2t}\right)} = \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty} \int\limits_{\sqrt{2}+1}^{\sqrt{b^2+1}+b} \frac{\frac{t^2+1}{2t^2}\,dt}{\frac{t^2-1}{2t}\cdot\frac{t^2+1}{2t}} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty} \int\limits_{\sqrt{2}+1}^{\sqrt{b^2+1}+b} \frac{4\,dt}{t^2-1} = 2\lim_{b\to\infty} \int\limits_{\sqrt{2}+1}^{\sqrt{b^2+1}+b} \frac{dt}{t^2-1} \\
&= 2\cdot\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty} \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| \Bigg|_{\sqrt{2}+1}^{\sqrt{b^2+1}+b} \\
&= \lim_{b\to\infty} \ln\left|\frac{\sqrt{b^2+1}+b-1}{\sqrt{b^2+1}+b+1}\right| - \ln\left|\frac{\sqrt{2}+1-1}{\sqrt{2}+1+1}\right| \\
&= \lim_{b\to\infty} \ln\left|\frac{\sqrt{\frac{1}{b^2}+1}+1-\frac{1}{b}}{\sqrt{\frac{1}{b^2}+1}+1+\frac{1}{b}}\right| - \ln\left|\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+2}\right| \\
&= \ln 1 - \ln\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+2} = \ln\frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}} = \ln\left(1+\sqrt{2}\right).
\end{aligned}
$$

(b) Vrijedi

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5} &= \lim_{a\to-\infty} \int\limits_a^0 \frac{dx}{x^2+4x+5} + \lim_{b\to\infty} \int\limits_0^b \frac{dx}{x^2+4x+5} \\
&= \lim_{a\to-\infty} \int\limits_a^0 \frac{dx}{(x+2)^2+1} + \lim_{b\to\infty} \int\limits_0^b \frac{dx}{(x+2)^2+1} \\
&= \lim_{a\to-\infty} \operatorname{arctg}(x+2)\Big|_a^0 + \lim_{b\to\infty} \operatorname{arctg}(x+2)\Big|_0^b \\
&= \lim_{a\to-\infty} [\operatorname{arctg}2 - \operatorname{arctg}(a+2)] + \lim_{b\to\infty} [\operatorname{arctg}(b+2) - \operatorname{arctg}2] \\
&= \operatorname{arctg}2 + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}2 = \pi.
\end{aligned}
$$

(c) Vrijedi

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^3} &= \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^3} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{x^3} == \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-1}^{0-\epsilon} \frac{dx}{x^3} + \lim_{\delta\to\infty} \int_{0+\delta}^{1} \frac{dx}{x^3} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{-1}{2x^2}\Big|_{-1}^{0-\epsilon} + \lim_{\delta\to\infty} \frac{-1}{2x^2}\Big|_{0+\delta}^{1} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\frac{-1}{2\varepsilon^2} + \frac{1}{2}\right) + \lim_{\delta\to 0} \left(\frac{-1}{2} + \frac{1}{2\varepsilon^2}\right) \\
&= \frac{1}{2} \lim_{\delta\to 0} \frac{1}{\delta^2} - \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon^2} = \infty - \infty,
\end{aligned}
$$

pa integral divergira.

2.4 Površina ravninskog lika

Izračunajte površinu lika omeđenog krivuljama:

(a) $y = x^2, x = -1, x = 2$ i osi x,

(b) $x^2 + y^2 = 2$ i $y = x^2$ unutar parabole,

(c) $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$, (astroida),

(d) $r^2 = a^2 \cos(2\varphi), \varphi \in [0, 2\pi]$, (Bernoullijeva lemniskata).

Rješenje.

(a) Prema slici 2.1 vrijedi

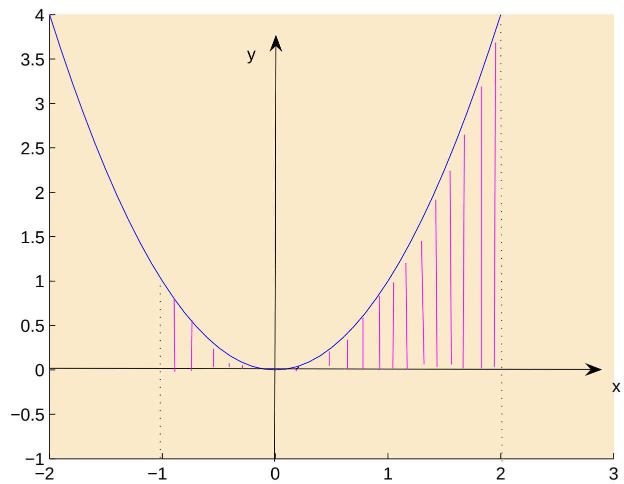
$$
P = \int_{-1}^{2} x^2\, dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} = \frac{8}{3} + \frac{1}{3} = 3.
$$

(b) Sjecišta krivulja $x^2 + y^2 = 2$ i $y^2 = x^2$ su točke $A(1,1)$ i $B(-1,1)$, (slika 2.2), pa vrijedi

$$
P = \int_{-1}^{1} \left(\sqrt{2-x^2} - x^2\right) dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{2-x^2}\, dx - \int_{-1}^{1} x^2\, dx.
$$

Prvi se integral rješava parcijalnom integracijom [M2, teorem 1.7], pa je

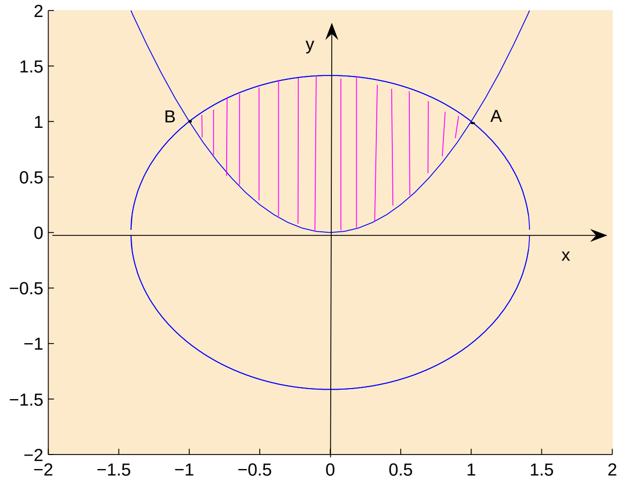
$$
\begin{aligned}
P &= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{2-x^2} + 2\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\Big|_{-1}^{1} - \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + 2\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2}\left(-1 + 2\arcsin\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} + \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}
$$



Slika 2.1: Površina ravninskog lika (a)

(c) Na slici 2.3 vidimo da se cijela površina P može računati kao $4P_1$. Za računanje P_1 korist ćemo formulu za površinu ravninskih likova, gdje je krivulja zadana parametarski [M2, §2.6.1.1].

$$\begin{aligned}
P_1 &= \int_{\pi/2}^{0} a\sin^3 t \cdot 3a\cos^2 t\,(-\sin t)\ dt \\
&= -3a^2 \int_{\pi/2}^{0} \sin^4 t\cos^2 t\,dt = 3a^2 \int_{0}^{\pi/2} \left(\frac{1}{2}\sin(2t)\right)^2 \frac{1-\cos(2t)}{2}\,dt \\
&= \frac{3}{8}a^2 \int_{0}^{\pi/2} \left[\sin^2(2t) - \sin^2(2t)\cos(2t)\right]\ dt \\
&= \frac{3}{16}a^2 \int_{0}^{\pi/2} [1-\cos(4t)]\ dt - \frac{3}{8}a^2 \int_{0}^{\pi/2} \sin^2(2t)\,\frac{1}{2}d(\sin(2t)) \\
&= \frac{3}{16}a^2 t\Big|_0^{\pi/2} - \frac{3}{4\cdot 16}a^2\sin(4t)\Big|_0^{\pi/2} - \frac{3}{16}a^2\frac{\sin^2(2t)}{3}\Big|_0^{\pi/2} \\
&= \frac{3}{16}a^2\frac{\pi}{2} = \frac{3a^2\pi}{32},
\end{aligned}$$



Slika 2.2: Površina ravninskog lika (b)

pa je

$$P = 4P_1 = 4\frac{3a^2\pi}{32} = \frac{3a^2\pi}{8}.$$

(d) Na slici 2.4 vidimo da se cijela površina P može izračunati kao $4P_1$, gdje je P_1 (koristimo formulu za površinu ravninskih likova, gdje je krivulja zadana u polarnim koordinatama [M2, §2.6.1.2])

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} r^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} a^2\cos(2\varphi)\,d\varphi = \frac{a^2}{2}\sin(2\varphi)\Big|_0^{\pi/4} \\ &= \frac{a^2}{2}\frac{-\cos(2\varphi)}{2}\Big|_0^{\pi/4} = \frac{a^2}{4}\left(-\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = \frac{a^2}{4}, \end{aligned}$$

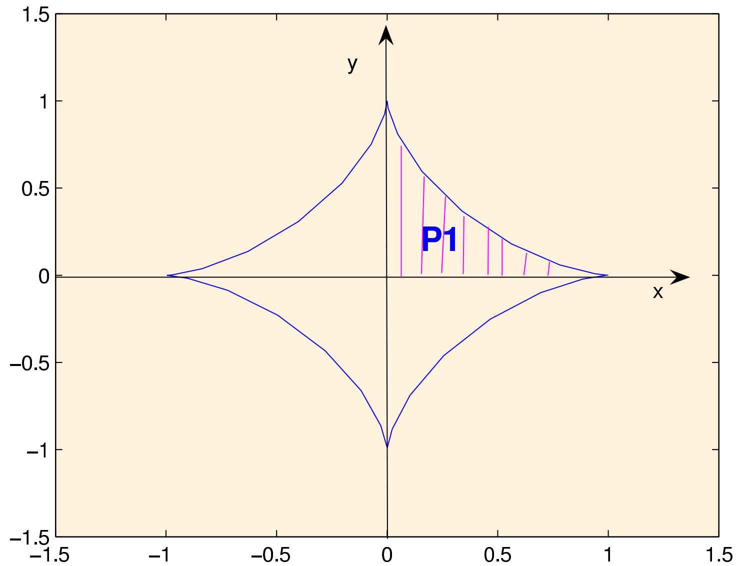
pa je

$$P = 4P_1 = 4\frac{a^2}{4} = a^2.$$

2.5 Duljina luka ravninske krivulje

(a) Nađite opseg lika omeđenog krivuljama: $y^3 = x^2$ i $y = \sqrt{2-x}$,

(b) Izračunajte duljinu luka krivulje $\begin{cases} x = \frac{1}{3}t^3 - t \\ y = t^2 + 2 \end{cases}$, $t \in [0, 3]$.



Slika 2.3: Astroida

Rješenje.

(a) Krivulje $y^3 = x^2$ i $y = \sqrt{2-x}$ se sijeku u točkama $A(1,1)$ i $B(-1,1)$. Ukupnu duljinu luka računat ćemo kao

$$l = 2(l_1 + l_2),$$

(vidi sliku 2.5), koristeći formulu za duljinu luka krivulje [M2, §2.6.2.1], pa je

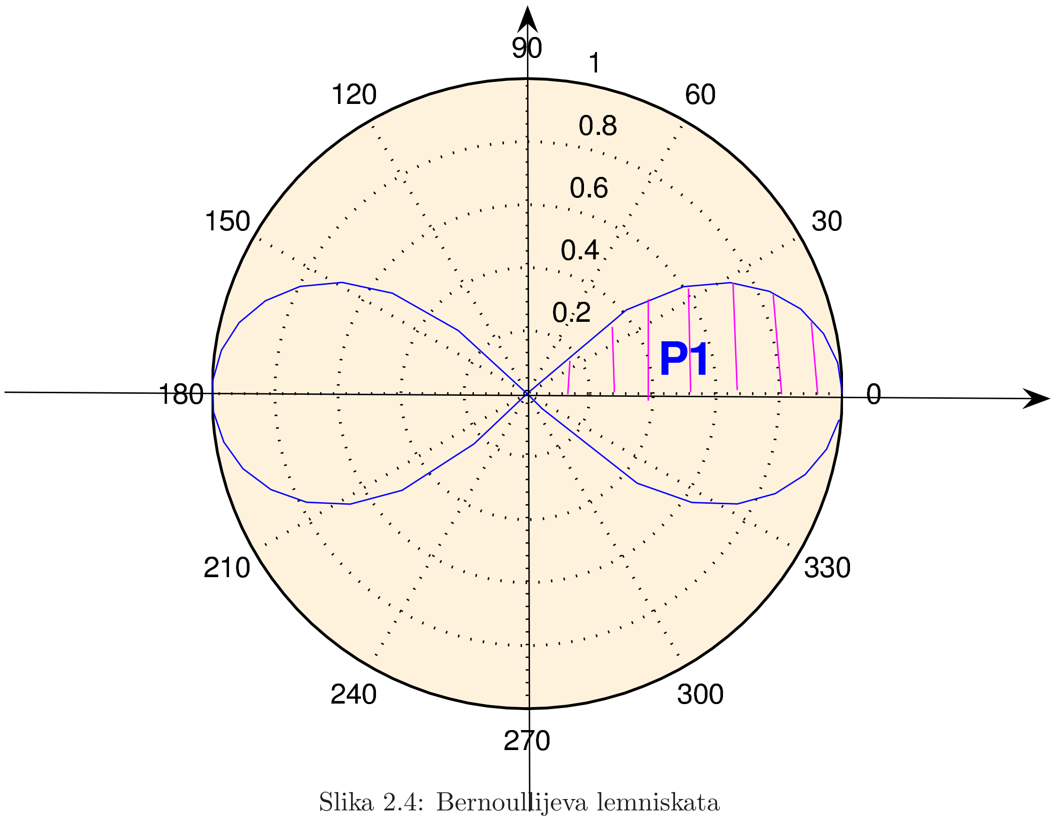
$$l_1 = \int_0^1 \sqrt{1+\frac{9}{4}y}dy = \frac{1}{2}\int_0^1 (4+9y)^{\frac{1}{2}}\,dy = \frac{1}{2}\int_0^1 (4+9y)^{\frac{1}{2}}\,\frac{1}{9}d(4+9y)$$
$$= \frac{1}{18}\cdot\frac{2}{3}(4+9y)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{1}{27}\left(13\sqrt{13}-8\right)$$

i

$$l_2 = \int_0^1 \sqrt{1+\frac{x^2}{2-x^2}}\,dx = \sqrt{2}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}} =$$
$$= \sqrt{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}\Big|_0^1 = \frac{\pi\sqrt{2}}{4},$$

iz čega slijedi

$$l = 2\left[\frac{1}{27}\left(13\sqrt{13}-8\right)+\frac{\pi\sqrt{2}}{4}\right] \approx 5.1.$$



Slika 2.4: Bernoullijeva lemniskata

(b) Za $\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{3}t^3 - t \\ y = t^2 + 2 \end{array} \right.$ je $\dot{x}(t) = t^2 - 1$ i $\dot{y}(t) = 2t$, pa iz formule za duljinu luka krivulje zadane u polarnim koordinatama [M2, §2.6.2.2] slijedi

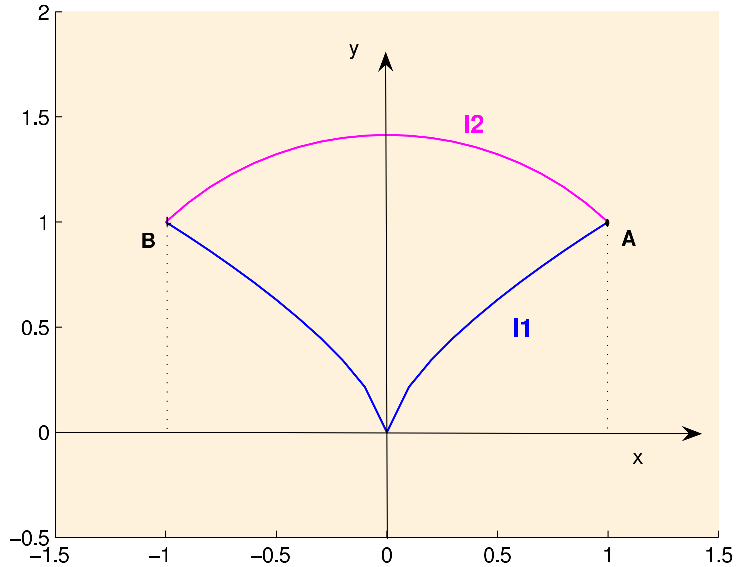
$$l = \int_0^3 \sqrt{(t^2-1)^2 + 4t^2}\, dt = \int_0^3 \sqrt{t^4 - 2t^2 + 1 + 4t^2}\, dt = \int_0^3 \sqrt{(t^2+1)^2}\, dt$$

$$= \int_0^3 \left(t^2+1\right) dt = \left(\frac{t^3}{3} + t\right)\Big|_0^3 = 12.$$

2.6 Volumen rotacionog tijela

(a) Izračunajte volumen tijela koje nastaje rotacijom lika omeđenog parabolom: $y = x^2$, osi y i pravcem $y = 1$ oko osi y.

(b) Izračunajte volumen tijela koje nastaje rotacijom astroide $\left\{ \begin{array}{l} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{array} \right.$ oko osi y.



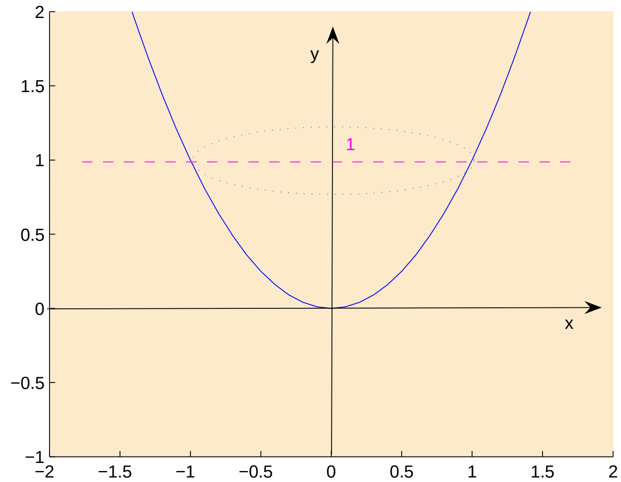
Slika 2.5: Duljina luka (a)

Rješenje.

(a) Koristeći formulu za volumen rotacionog tijela koje nastaje rotacijom krivulje [M2, §2.6.3], za krivulju $x = \sqrt{y}$ u granicama od 0 do 1 koja rotira oko oko osi y, vidi sliku 2.6, dobivamo

$$V = \pi \int_0^1 (\sqrt{y})^2 \, dy = \pi \frac{y^2}{2} \bigg|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

(b) Koristeći formulu za volumen rotacionog tijela koje nastaje rotacijom krivulje zadane parametarski [M2, §2.6.3], za krivulju $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ (astroida), oko



Slika 2.6: Rotacija parabole $y = x^2$

osi y, i koristeći simetriju astroide dobivamo

$$V = 2\pi \int_0^{\pi/2} a^2 \cos^6 t \cdot 3a \sin^2 t \cos t \, dt = \left\{ \begin{array}{c} u = \sin t \\ du = \cos t \, dt \end{array} \qquad \begin{array}{c|c|c} t & 0 & \frac{\pi}{2} \\ \hline u & 0 & 1 \end{array} \right\}$$

$$= 6\pi a^3 \int_0^1 \left(1 - t^2\right)^3 t^2 \, dt = 6\pi a^3 \int_0^1 \left(t^2 - 3t^4 + 3t^6 - t^8\right) dt$$

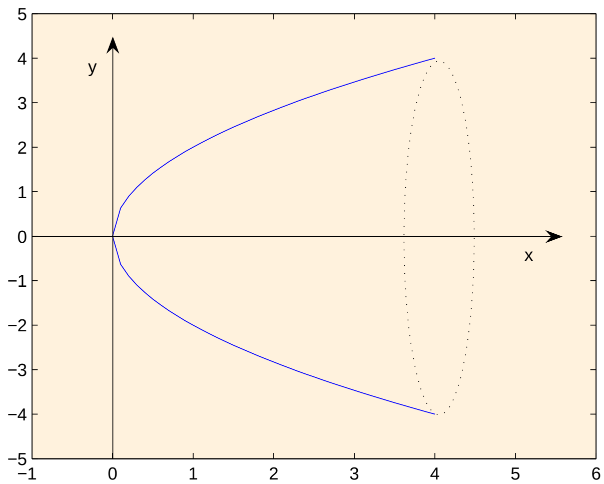
$$= 6\pi a^3 \int_0^1 \left(t^2 - 3t^4 + 3t^6 - t^8\right) dt = 6\pi a^3 \left(\frac{t^3}{3} - \frac{3t^5}{5} + \frac{3t^7}{7} - \frac{t^9}{9} \right) \Big|_0^1 =$$

$$= 6\pi a^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{5} + \frac{3}{7} - \frac{1}{9} \right) = 6\pi a^3 \frac{16}{315} = \frac{32\pi a^3}{105}.$$

2.7 Oplošje rotacionog tijela

Izračunajte oplošje tijela koja nastaje rotacijom luka parabole $y^2 = 4x$, oko osi x, od $x_1 = 0$ do $x_2 = 4$.

Rješenje. Koristeći formulu za oplošje rotacionog tijela [M2, §2.6.4] i prema slici 2.7 dobivamo



Slika 2.7: Rotacija parabole $y^2 = 4x$

$$P = 2\pi \int_a^b |y(x)| \sqrt{1 + [y'(x)]^2}\, dx = 2\pi \int_0^4 2\sqrt{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x}}\, dx$$
$$= 4\pi \int_0^4 \sqrt{x}\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}}\, dx = 4\pi \frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^4 = \frac{8\pi}{3}\left(\sqrt{125} - 1\right).$$

2.8 Trapezna formula

Primjenom Trapezne formule [M2, §2.7.2] izračunajte integral $I = \int\limits_1^2 \ln x\, dx$, podijelom na 5 intervala.
Rješenje.

$$n = 5 \Rightarrow \Delta x_i = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{5} = 0.2 = h$$

pa je

$$x_i = a + ih, \quad h = 0.2, \quad i = 0, 1, \dots n.$$

iz čega slijedi

$$x_0 = 1,\ x_1 = 1.2,\ x_2 = 1.4,\ x_3 = 1.6,\ x_4 = 1.8,\ x_5 = 2.$$

Integral je sada

$$\begin{aligned} I = \int\limits_1^2 \ln x\, dx &\approx 0.2 \left[\frac{f(x_0) + f(x_5)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) \right] \\ &= 0.2 \left[\frac{0 + 0.69314}{2} + 0.18232 + 0.33647 + 0.47 + 0.58778 \right] = 0.38463. \end{aligned}$$

2.9 Simpsonova formula

Primjenom Simpsonove formule [M2, §2.7.3] za $n = 2$ izvedite približnu formulu za duljinu luka elipse $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Rješenje.

$$I_s = \frac{b-a}{6n} \left\{ f(x_0) + f(x_{2n}) + 4\left[f(x_1) + \ldots + f(x_{2n-1}) \right] + 2\left[f(x_2) + f(x_{2n}) \right] \right\}.$$

U našem je slučaju

$$n = 2 \Rightarrow x_0 = 0,\ x_1 = \frac{\pi}{4},\ x_2 = \frac{\pi}{2}.$$

pa je

$$f(x_0) = b, \quad f(x_1) = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}, \quad f(x_2) = a.$$

iz čega slijedi

$$l = \frac{\pi}{24}\left(b + a + 4\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \right).$$

2.10 Zadaci za vježbu

Izračunajte integrale:

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\, dx$

2. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$

3. $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$

4. $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

5. $\displaystyle\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\,dx$

6. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$

7. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\sin x}{\cos^3 x}\,dx$

8. $\displaystyle\int_0^1 e^{-x}\sin(\pi x)\,dx$

Izračunajte neprave integrale (ili ustanovite njihovu divergenciju):

9. $\displaystyle\int_{-\infty}^a e^x\,dx$

10. $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{dx}{x^2}$

11. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$

12. Izračunajte površinu lika omeđenog parabolom $y = 2x - x^2$ i pravcem $y = -x$.

13. Izračunajte površinu lika omeđenog parabolom $y = \frac{3}{4}x^2$ i pravcem $x + y = 5$.

14. Izračunajte površinu lika omeđenog kardioidom $r = a(1+\cos\varphi)$.

15. Izračunajte duljinu luka krivulje $y^2 = (x-1)^3$ između točaka $A(2,-1)$, $B(5,-8)$.

16. Izračunajte duljinu luka krivulje $x = e^t\cos t$, $y = e^t\sin t$ od $t = 0$ do $t = \ln\pi$.

17. Izračunajte duljinu luka krivulje $r = a\cos^3\frac{\varphi}{3}$ od $\varphi = 0$ do $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

18. Izračunajte duljinu luka kardioide $r = a(1+\cos\varphi)$.

19. Izračunajte volumen tijela koje nastaje kada luk parabole $y^2 = 2x$, $x \in [0,5]$, rotira oko osi y.

20. Izračunajte volumen tijela koje nastaje rotacijom jednog svoda cikloide $x = a(t-\sin t)$, $y = a(1-\cos t)$ oko osi x.

21. Izračunajte oplošje tijela koja nastaje rotacijom oko osi x jednog poluvala sinusoide $y = \sin x$.

22. Koristeći trapeznu formulu, $n = 4$, izračunajte vrijednost integrala $\int_0^{\pi} f(x)dx$, gdje je
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}.$$

23. Izračunajte integral $\int_1^9 \sqrt{6x-5}dx$ primjenom Simpsonove formule ($n = 8$).

2.11 Rješenja zadataka za vježbu

1. $\frac{4}{3}$
2. $\frac{\pi}{4}$
3. $2\sqrt{2} - 2$
4. $4 - 2\ln 3$
5. $4 - \pi$
6. $\frac{\pi}{2} - 1$
7. $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$
8. $\frac{\pi}{\pi^2+1} \cdot \frac{1+e}{e}$
9. e^a
10. Integral divergira.
11. $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$
12. $P = \frac{9}{2}$.
13. $P = \frac{13}{2}$.
14. $P = \frac{3a^2\pi}{2}$.
15. $l \approx 7.63$.
16. $l = \sqrt{2}(\pi - 1)$.

17. $l = \frac{a}{8}(2\pi + 3\sqrt{3})$.

18. $l = 8a$.

19. $V = 10\sqrt{10}\pi$.

20. $V = 5\pi^2 a^3$.

21. $P = 2\pi\left[\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1)\right]$.

22. $I \approx 1.83$.

23. $I \approx 37.9655$.

3.

Funkcije više varijabli

3.1 Područje definicije funkcije

Odredite područje definicije funkcija:

(a) $z(x,y) = 1 + \sqrt{-(x-y)^2}$,

(b) $z(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$,

(c) $z(x,y) = \ln(x+y)$,

(d) $z(x,y) = \dfrac{\sqrt{y^2-4x}}{\ln(x^2+y^2-1)}$,

(e) $z(x,y) = \arcsin\dfrac{x}{2} + \sqrt{xy}$.

Rješenje.

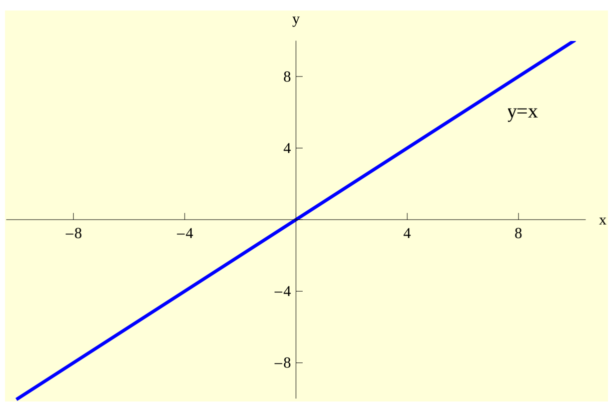
(a) Da bi zadana funkcija bila dobro definirana mora vrijediti

$$-(x-y)^2 \geq 0,$$

to jest

$$(x-y)^2 \leq 0.$$

To je ispunjeno samo kada je $x-y=0$, odnosno $y=x$, pa je područje definicije zadane funkcije dano sa $\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x\right\}$ (Slika 3.1).



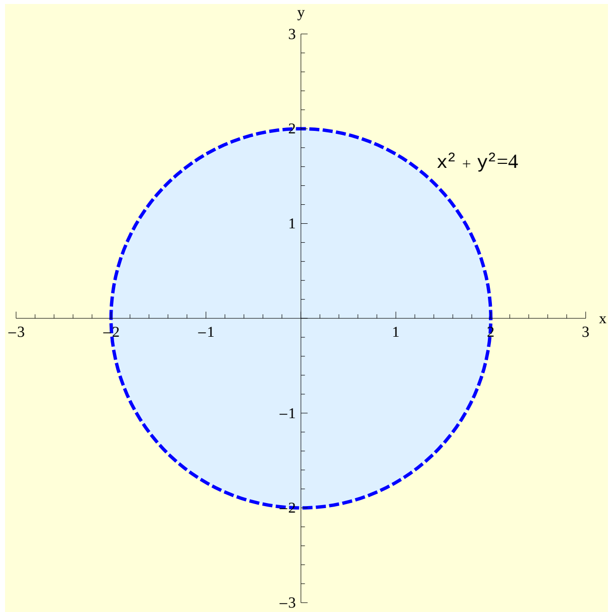
Slika 3.1: Područje definicije funkcije $z(x,y) = 1 + \sqrt{-(x-y)^2}$

(b) Zadana funkcija definirana je na području $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ koje je određeno nejednadžbom $4-x^2-y^2 > 0$, odnosno (Slika 3.2)

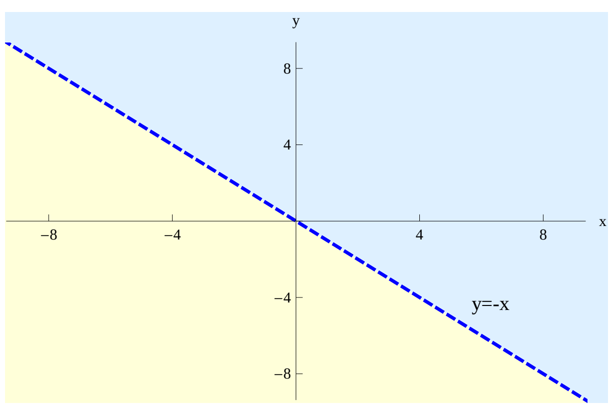
$$\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 4\right\}.$$

(c) Funkcija $\ln(x+y)$ definirana je za sve točke $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ za koje je $x+y > 0$, odnosno na području (Slika 3.3)

$$\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > -x\right\}.$$



Slika 3.2: Područje definicije funkcije $z(x,y) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$



Slika 3.3: Područje definicije funkcije $z(x,y) = \ln(x+y)$

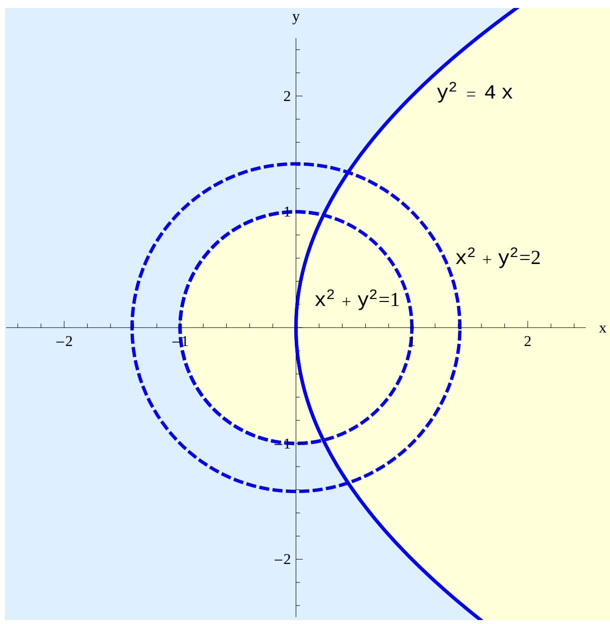
(d) Da bi zadana funkcija bila dobro definirana moraju biti ispunjeni sljedeći uvjeti:

$$\begin{aligned} y^2 - 4x &\geq 0, \\ x^2 + y^2 - 1 &> 0 \quad \text{i} \\ \ln(x^2 + y^2 - 1) &\neq 0. \end{aligned}$$

Dakle, zaključujemo da je područje definicije zadane funkcije određeno sa

$$\mathcal{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (y^2 \geq 4x) \wedge (x^2 + y^2 > 1) \wedge (x^2 + y^2 \neq 2)\right\}.$$

(Slika 3.4)



Slika 3.4: Područje definicije funkcije $z(x, y) = \dfrac{\sqrt{y^2 - 4x}}{\ln(x^2 + y^2 - 1)}$

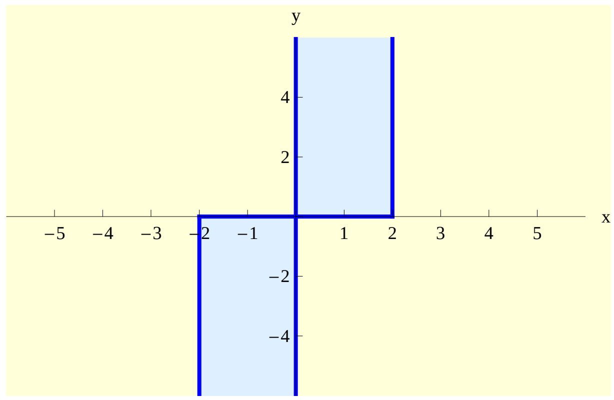
(e) Prema definiciji funkcije arcsin [M1, §4.6.6] zaključujemo da domena zadane funkcije mora ispunjavati sljedeće uvjete:

$$\begin{aligned} -1 \leq \frac{x}{2} &\leq 1, \\ xy &\geq 0. \end{aligned}$$

Drugi uvjet je ispunjen ako su x i y istog predznaka. Dakle,

$$\mathcal{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ((-2 \leq x \leq 0) \wedge (y \leq 0)) \vee ((0 \leq x \leq 2) \wedge (y \geq 0))\right\}.$$

(Slika 3.5)



Slika 3.5: Područje definicije funkcije $z(x,y) = \arcsin\dfrac{x}{2} + \sqrt{xy}$

3.2 Parcijalna derivacija prvog reda

Odredite parcijalne derivacije prvog reda za sljedeće funkcije:

(a) $z(x,y) = \ln\left(\sin\dfrac{x+a}{\sqrt{y}}\right)$,

(b) $u(x,y,z) = (xy)^z$.

Rješenje.

Tražene derivacije odredit ćemo primjenom već poznatih pravila deriviranja, [M1, §5.1.3], ali na način da, kada funkciju $z(x,y)$ deriviramo po varijabli x, varijablu y tretiramo kao konstantu i obrnuto.

(a) $\dfrac{\partial z}{\partial x}(x,y) = \dfrac{1}{\sin\frac{x+a}{\sqrt{y}}} \cdot \cos\dfrac{x+a}{\sqrt{y}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{y}} = \dfrac{1}{\sqrt{y}}\operatorname{ctg}\dfrac{x+a}{\sqrt{y}}$.

Analogno vrijedi:

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = -\frac{x+a}{2\sqrt{y^3}} \cdot \operatorname{ctg}\frac{x+a}{\sqrt{y}}.$$

(b) $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y,z) = zy(xy)^{z-1}$,

$\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y,z) = zx(xy)^{z-1}$ i

$\dfrac{\partial u}{\partial z}(x,y,z) = (xy)^z\ln(xy)$.

3.3 Parcijalna derivacija drugog reda

Odredite parcijalne derivacije drugog reda za funkcije:

(a) $f(x,y) = x^y$,

(b) $f(x,y) = (1+x)^m(1+y)^n$ u točki $T(0,0)$ $(m,n \in \mathbb{N})$.

Rješenje.

(a) Odredimo najprije parcijalne derivacije prvog reda zadane funkcije. Vrijedi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = yx^{y-1} \quad \text{i} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^y \ln x.$$

Sada je prema [M2, definicija 3.8]

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(yx^{y-1}\right) = y(y-1)x^{y-2},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(x^y \ln x\right) = yx^{y-1}\ln x + x^{y-1},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(x^y \ln x\right) = x^y(\ln x)^2.
\end{aligned}$$

(b) Parcijalne derivacije prvog reda funkcije f u proizvoljnoj točki $(x,y) \in \mathcal{D}_f$ glase:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= m(1+x)^{m-1}(1+y)^n,\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= n(1+x)^m(1+y)^{n-1}.
\end{aligned}$$

Parcijalne derivacije drugog reda funkcije f u proizvoljnoj točki $(x,y) \in \mathcal{D}_f$ su:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= m(m-1)(1+x)^{m-2}(1+y)^n,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= mn(1+x)^{m-1}(1+y)^{n-1},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= n(n-1)(1+x)^m(1+y)^{n-2}.
\end{aligned}$$

Prema tome, vrijednosti parcijalnih derivacija drugog reda funkcije f u točki $T(0,0)$ su:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = m(m-1), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = mn, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = n(n-1).$$

3.4 Parcijalna derivacija trećeg reda

Za funkciju $u(x,y,z) = e^{xyz}$ odredite $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}(x,y,z)$.

Rješenje.

Prema Teoremu [M2, teorem 3.3] vrijednost tražene derivacije ne ovisi o redoslijedu deriviranja po pojedinim varijablama pa redoslijed deriviranja biramo proizvoljno. Ovdje ćemo funkciju u derivirati najprije po varijabli z. Vrijedi

$$\frac{\partial u}{\partial z}(x,y,z) = xye^{xyz}.$$

Dobivenu derivaciju zatim deriviramo po varijabli y. Slijedi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y}(xye^{xyz}) = (x^2yz + x)e^{xyz}.$$

Derivirajmo još po varijabli x. Vrijedi

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(x^2yz + x\right)e^{xyz}\right] = \left(x^2y^2z^2 + 3xyz + 1\right)e^{xyz}.$$

3.5 Parcijalna diferencijalna jednadžba

Riješite parcijalnu diferencijalnu jednadžbu $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$.

Rješenje.

Do tražene funkcije $z = z(x,y)$ doći ćemo ako zadanu diferencijalnu jednadžbu integriramo uzastopce dva puta. Integrirajmo ju najprije po varijabli x. Slijedi

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = \int 0\,dx + \varphi(y) = \varphi(y), \tag{3.1}$$

gdje je $\varphi(y)$ funkcija u varijabli y koju, prilikom integriranja po varijabli x, prepoznajemo kao konstantu. Integrirajmo sada jednakost (3.1) po varijabli y. Dobivamo traženo rješenje

$$z(x,y) = \int \varphi(y)\,dy + \psi(x),$$

gdje je $\psi(x)$ funkcija u varijabli x koja se pojavljuje kao konstanta pri integriranju po varijabli y.

3.6 Totalni diferencijal prvog reda

Odredite totalni diferencijal prvog reda funkcije $z(x,y) = x^2 + xy - y^2$.

Rješenje.

Prema definiciji [M2, definicija 3.9] totalni diferencijal prvog reda za funkciju dviju varijabli $z = z(x, y)$ izračunavamo po formuli

$$dz\,(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x}\,(x,y)\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,(x,y)\,dy.$$

Budući da je

$$\frac{\partial z}{\partial x}\,(x,y) = 2x + y \quad \text{i} \quad \frac{\partial z}{\partial y}\,(x,y) = x - 2y,$$

dobivamo da je totalni diferencijal prvog reda zadane funkcije

$$dz\,(x,y) = (2x + y)dx + (x - 2y)dy.$$

3.7 Totalni diferencijal drugog reda

Odredite totalni diferencijal drugog reda funkcije $z(x, y) = \ln(x + y)$.

Rješenje.

Da bismo izračunali totalni diferencijal drugog reda, prema [M2, definicija 3.10] , odredit ćemo parcijalne derivacije prvog i drugog reda zadane funkcije. Vrijedi

$$\frac{\partial z}{\partial x}\,(x,y) = \frac{1}{x+y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}\,(x,y) = \frac{1}{x+y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,(x,y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\,(x,y) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,(x,y) = -\frac{1}{(x+y)^2}.$$

Dakle, nakon uvrštavanja dobivenih derivacija u

$$d^2 f(x,y) = f''_{xx}(x,y)(dx)^2 + 2f''_{xy}(x,y)dxdy + f''_{yy}(x,y)(dy)^2,$$

slijedi

$$d^2 z(x,y) = -\frac{1}{(x+y)^2}(dx)^2 - \frac{2}{(x+y)^2}dxdy - \frac{1}{(x+y)^2}(dy)^2 = -\frac{1}{(x+y)^2}(dx+dy)^2.$$

3.8 Derivacija složene funkcije jedne varijable

Odredite derivaciju $\dfrac{dz}{dt}\,(t)$ ako je:

(a) $z(x, y) = \dfrac{x}{y}$, $x = e^t$, $y = \ln t$;

(b) $z(x, y) = e^{x-2y}$, $x = \sin t$, $y = t^3$.

Rješenje.

Primijenjujemo [M2, teorem 3.5]:

(a)

$$\frac{dz}{dt}(t) = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{1}{y}e^t + \left(-\frac{x}{y^2}\right) \cdot \frac{1}{t}$$
$$= \frac{1}{y}e^t - \frac{x}{y^2 t} = \frac{yte^t - x}{y^2 t} = \frac{te^t \ln t - e^t}{t \ln^2 t} = \frac{e^t(t \ln t - 1)}{t \ln^2 t}.$$

(b)

$$\frac{dz}{dt}(t) = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = e^{x-2y} \cos t + e^{x-2y} \cdot (-2) \cdot 3t^2$$
$$= e^{\sin t - 2t^3}(\cos t - 6t^2)$$

3.9 Parcijalne derivacije složene funkcije dviju varijabli

Odredite parcijalne derivacije $\frac{\partial z}{\partial u}(u, v)$, $\frac{\partial z}{\partial v}(u, v)$ ako je:

(a) $z(x, y) = x^2 \ln y$, $x = \frac{u}{v}$, $y = 3u - 2v$;

(b) $z(x, y) = x^y$, $x = u^2 - v^2$, $y = e^{uv}$.

Rješenje.

Primjenom [M2, teorem 3.5] slijedi

(a)

$$\frac{\partial z}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = 2x \ln y \cdot \frac{1}{v} + \frac{x^2}{y} \cdot 3$$
$$= 2\frac{u}{v^2} \ln(3u - 2v) + \frac{3u^2}{v^2(3u - 2v)}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} = -2x \ln y \cdot \frac{u}{v^2} - \frac{2x^2}{y}$$
$$= -2\frac{u^2}{v^3} \ln(3u - 2v) - \frac{2u^2}{v^2(3u - 2v)}$$

(b)

$$\frac{\partial z}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = yx^{y-1} \cdot 2u + x^y \ln x \cdot ve^{uv}$$
$$= e^{uv}(u^2 - v^2)^{e^{uv}-1} \cdot 2u + (u^2 - v^2)^{e^{uv}} \ln(u^2 - v^2)ve^{uv}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} = yx^{y-1}(-2v) + x^y \ln x \cdot ue^{uv}$$
$$= e^{uv}(u^2 - v^2)^{e^{uv}-1}(-2v) + (u^2 - v^2)^{e^{uv}} ue^{uv} \ln(u^2 - v^2).$$

3.10 Derivacija funkcije jedne varijable zadane implicitno

Odredite derivaciju prvog i drugog reda funkcije $y = f(x)$ zadane implicitno sa $z(x, y) = y - 2x \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} = 0$.

Rješenje.

Deriviranjem jednakosti $z\,(x, y) = 0$ po varijabli x dobivamo

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0,$$

iz čega slijedi

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}}.$$

Izračunajmo najprije parcijalne derivacije funkcije z po varijablama x i y. Vrijedi

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x}\,(x, y) &= -2\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \frac{y}{x}\frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}}\right) = -2\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \frac{xy}{x^2 + y^2}\right),\\
\frac{\partial z}{\partial y}\,(x, y) &= \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2}.
\end{aligned}$$

Sada je

$$y' = \frac{-2\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \frac{xy}{x^2+y^2}\right)}{\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}}.$$

Iz jednakosti $y - 2x \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} = 0$ slijedi $\operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} = \dfrac{y}{2x}$. Uz tu zamjenu, sređivanjem izraza za y' dobivamo da je $y' = \dfrac{y}{x}$. Za drugu derivaciju funkcije $y = f(x)$ vrijedi

$$y'' = \left(\frac{y}{x}\right)' = \frac{y'x - y}{x^2} = \frac{\frac{y}{x}\cdot x - y}{x^2} = 0.$$

3.11 Parcijalne derivacije funkcije dviju varijabli zadane implicitno

Odredite parcijalne derivacije prvog reda funkcije $z = f(x, y)$ zadane implicitno sa $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Rješenje.

Zadanu implicitnu jednadžbu ćemo zapisati u obliku $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Sada je $F_x = 2x$, $F_y = 2y$ i $F_z = 2z$. Prema formuli za derivaciju implicitno zadane funkcije dviju varijabli [M2, definicija 3.13] slijedi

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x}\,(x, y) &= -\frac{x}{z},\\
\frac{\partial z}{\partial y}\,(x, y) &= -\frac{y}{z}.
\end{aligned}$$

3.12 Totalni diferencijal implicitno zadane funkcije

Odredite totalni diferencijal prvog reda funkcije $z = f(x, y)$ zadane implicitno sa $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, a je konstanta.

Rješenje.

Prema formuli za totalni diferencijal prvog reda funkcije dviju varijabli [M2, definicija 3.9] zaključujemo da moramo izračunati parcijalne derivacije funkcije z. Zapišemo li zadanu implicitnu jednadžbu u obliku $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2$ dobivamo $F_x = 2x$, $F_y = 2y$, $F_z = 2z$, odnosno $\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = -\frac{x}{z}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = -\frac{y}{z}$. Dakle, slijedi

$$dz\,(x, y) = -\frac{1}{z}(dx + dy).$$

3.13 Tangencijalna ravnina i normala

Odredite tangencijalnu ravninu i normalu na plohu $z = x^2 + y^2$ u točki $T(1, -2, z_0)$.

Rješenje.

Budući da točka T pripada zadanoj plohi vrijedi $z_0 = 1 + (-2)^2 = 5$, tj. točka T ima koordinate $T(1, -2, 5)$.

Prema fomuli za jednadžbu tangencijalne ravnine na plohu $z = f(x, y)$ u točki (x_0, y_0) [M2, §3.7]

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,(y - y_0)$$

slijedi

$$z - 5 = 2(x - 1) + (-4)(y + 2),$$

tj. tražena tangencijalna ravnina na zadani paraboloid (Slika 3.6) ima jednadžbu

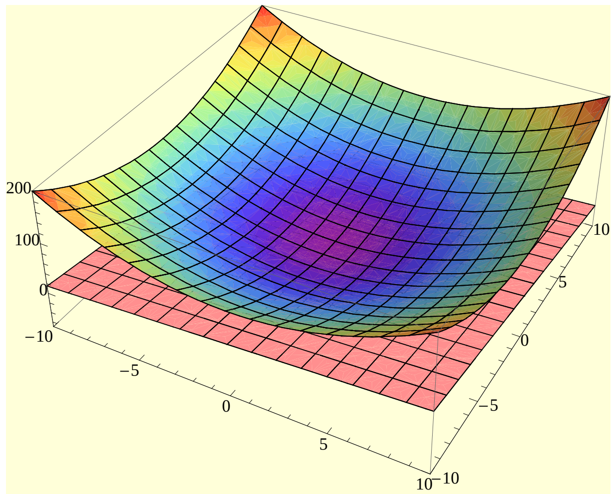
$$2x - 4y - z - 5 = 0.$$

Jednadžba normale na plohu $z = f(x, y)$ u točki (x_0, y_0) plohe dana je s

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

pa je tražena normala

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y + 2}{-4} = \frac{z - 5}{-1}.$$



Slika 3.6: Tangencijalna ravnina na plohu $z = x^2 + y^2$ u točki $T(1, -2, 5)$

3.14 Primjer primjene tangencijalnih ravnina

Pokažite da se stožac $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z^2}{c^2}$ i sfera $x^2 + y^2 + \left(z - \dfrac{b^2 + c^2}{c}\right)^2 = \dfrac{b^2}{c^2}(b^2 + c^2)$ dodiruju u točkama $(0, \pm b, c)$.

Rješenje.

Ono što trebamo pokazati jest da u točkama $(0, \pm b, c)$ stožac i sfera imaju istu tangencijalnu ravninu! Odredit ćemo tangencijalne ravnine stošca i sfere u točki $(0, b, c)$. Dokaz za točku $(0, -b, c)$ je potpuno analogan.
Jednadžba tangencijalne ravnine na plohu zadanu implicitno s $F(x, y, z) = 0$ glasi

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

Zapišimo jednažbe stošca i sfere na sljedeći način

$$\begin{aligned} F_1(x, y, z) &= \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \\ F_2(x, y, z) &= x^2 + y^2 + \left(z - \frac{b^2 + c^2}{c}\right)^2 - \frac{b^2}{c^2}(b^2 + c^2) = 0. \end{aligned}$$

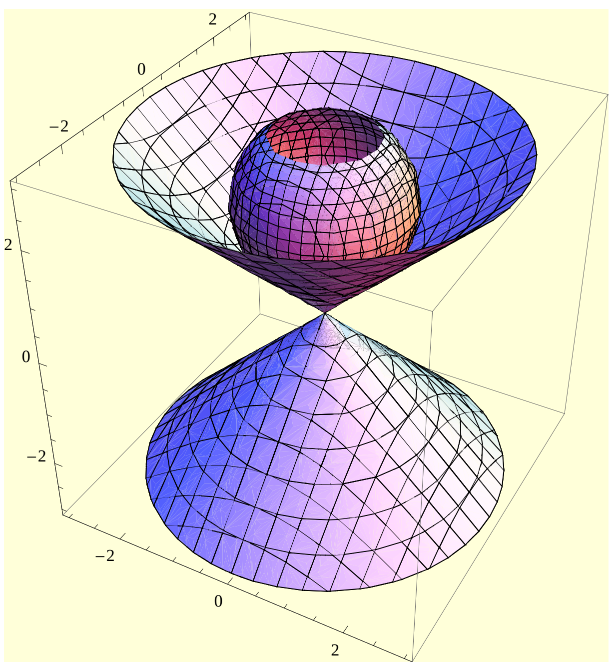
Neka su T_1 i T_2 tangencijalne ravnine na stožac i sferu, respektivno, u točki $(0, b, c)$. Tada, primjenom formule za jednadžbu tangencijalne ravnine implicitno zadane plohe, dobivamo da za T_1 vrijedi

$$\begin{aligned}
\frac{2b}{b^2}(y-b)-\frac{2c}{c^2}(z-c)&=0\\
\frac{y}{b}-1-\frac{z}{c}+1&=0\\
\frac{y}{b}-\frac{z}{c}&=0.
\end{aligned}$$

Za T_2 imamo

$$\begin{aligned}
2b(y-b)+2\left(c-\frac{b^2+c^2}{c}\right)(z-c)&=0\\
by-\frac{b^2}{c}z&=0\\
\frac{y}{b}-\frac{z}{c}&=0.
\end{aligned}$$

Dakle, pokazali smo da stožac i sfera u točki $(0,b,c)$ imaju zajedničku tangencijalnu ravninu tj. da se dodiruju u toj točki (Slika 3.7).



Slika 3.7: Stožac $x^2+y^2=z^2$ i sfera $x^2+y^2+(z-2)^2=2$ (dodiruju se u točkama $(0,\pm1,\pm1)$)

3.15 Lokalni ekstremi funkcije dviju varijabla

Odredite lokalne ekstreme funkcija:

(a) $f(x,y) = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$,

(b) $f(x,y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$.

Rješenje.

Lokalne ekstreme određivat ćemo prema postupku opisanom u [M2, §3.10].

(a) Odredimo najprije parcijalne derivacije prvog reda funkcije. Vrijedi:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2y - 6x \quad \text{i} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x - 4y.$$

Prema nužnom uvjetu postojanja ekstrema [M2, teorem 3.7] mora biti

$$\begin{aligned} y - 3x &= 0 \\ x - 2y &= 0. \end{aligned}$$

Rješenje sustava je stacionarna točka $S(0,0)$. Da bismo provjerili dovoljne uvjete ekstrema odredit ćemo parcijalne derivacije drugog reda funkcije f u točki S. Imamo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -6, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -4,$$

odnosno

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -6, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = -4.$$

Determinanta

$$\Delta_2(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{vmatrix}$$

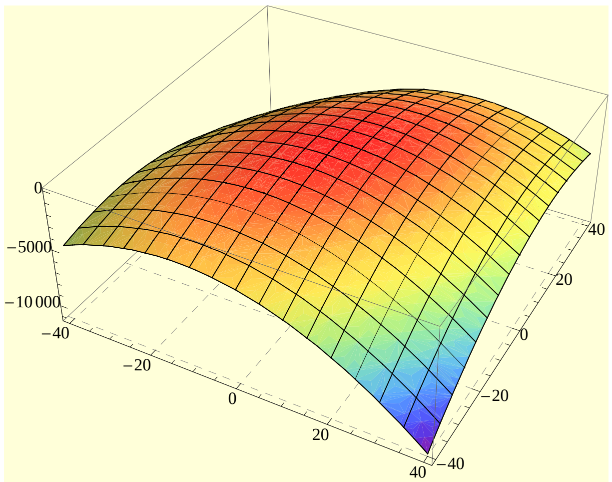
u točki $S(0,0)$ ima vrijednost

$$\Delta_2(0,0) = \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 20.$$

Kako je $\Delta_2 > 0$ i $\Delta_1 = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -6 < 0$ zaključujemo da zadana funkcija u točki $S(0,0)$ postiže maksimalnu vrijednost $z_{maks} = f(0,0) = 10$ (Slika 3.8).

(b) Deriviranjem funkcije f dobivamo dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= e^{x-y}(x^2 + 2x - 2y^2), \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= e^{x-y}(2y^2 - 4y - x^2). \end{aligned}$$



Slika 3.8: Ploha $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$

Da bismo odredili stacionarne točke moramo riješiti sljedeći sustav jednadžbi

$$e^{x-y}(x^2 + 2x - 2y^2) = 0$$
$$e^{x-y}(2y^2 - 4y - x^2) = 0.$$

Sustav se svodi na

$$x^2 + 2x - 2y^2 = 0$$
$$2y^2 - 4y - x^2 = 0.$$

Rješenje sustava su dvije stacionarne točke: $S_1(0,0)$ i $S_2(-4,-2)$.

Da bismo provjerili dovoljne uvjete za dobivene točke odredit ćemo parcijalne derivacije drugog reda funkcije f. Vrijedi

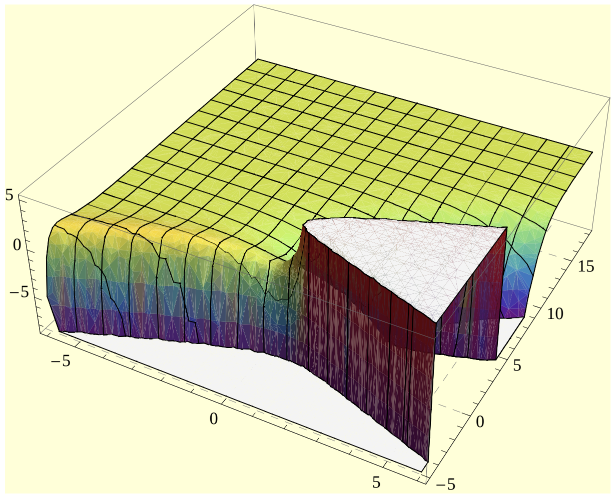
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = e^{x-y}(x^2 + 4x - 2y^2 + 2),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = e^{x-y}(2y^2 - 4y - 2x - x^2),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2 + 8y - 4).$$

Za točku S_1 je $\Delta_2(S_1) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -8 < 0$ pa, prema [M2, teorem 3.8] zaključujemo da u točki S_1 funkcija f nema ekstrem.

Za točku S_2 vrijedi

$$\Delta_1(-4,-2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-4,-2) = -6e^{-2} < 0 \quad \text{i} \quad \Delta_2(-4,-2) = \begin{vmatrix} -6e^{-2} & 8e^{-2} \\ 8e^{-2} & -12e^{-2} \end{vmatrix} = 8e^{-4}.$$

pa zaključujemo da funkcija f u točki $S_2(-4,-2)$ postiže lokalni maksimum $z_{maks} = f(-4,-2) = 8e^{-2}$(Slika 3.9).



Slika 3.9: Ploha $z = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$

3.16 Primjena ekstrema, 1. primjer

U xy ravnini odredite točku $T(x, y)$ za koju je zbroj kvadrata udaljenosti od pravaca $x = 0$, $y = 0$ i $x + 2y - 16 = 0$ najmanji.

Rješenje.

Neka je d_1 udaljenost točke T od pravca $x = 0$, d_2 udaljenost točke T od pravca $x + 2y - 16 = 0$ i d_3 udaljenost točke T od pravca $y = 0$. Tada vrijedi

$$d_1 = x, \quad d_2 = \frac{|x + 2y - 16|}{\sqrt{5}}, \quad d_3 = y.$$

Funkcija kojoj trebamo izračunati ekstrem i koja zadaje zbroj kvadrata udaljenosti točke T od zadanih pravaca ima oblik

$$z(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{(x + 2y - 16)^2}{5}.$$

Nakon kvadriranja i stavljanja na zajednički nazivnik funkciju z možemo zapisati na sljedeći način

$$z(x, y) = \frac{1}{5}(6x^2 + 9y^2 + 4xy - 32x - 64y + 256).$$

Tražimo ekstreme funkcije z odnosno najprije njene stacionarne točke. U tu svrhu izračunajmo parcijalne derivacije funkcije z po varijablama x i y. Vrijedi

$$\begin{aligned} z_x &= \frac{1}{5}(12x + 4y - 32), \\ z_y &= \frac{1}{5}(18y + 4x - 64). \end{aligned}$$

Rješavanjem sustava jednadžbi

$$\begin{aligned} \frac{1}{5}(12x + 4y - 32) = 0 \\ \frac{1}{5}(18y + 4x - 64) = 0 \end{aligned}$$

dobivamo stacionarnu točku $S\left(\frac{8}{5}, \frac{16}{5}\right)$.

Budući da parcijalne derivacije drugog reda funkcije z u točki S imaju vrijednosti $z_{xx} = \frac{12}{5}$, $z_{xy} = \frac{4}{5}$ i $z_{yy} = \frac{18}{5}$, slijedi

$$\Delta_2\left(\frac{8}{5}, \frac{16}{5}\right) = \begin{vmatrix} \frac{12}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{18}{5} \end{vmatrix} = 8 > 0 \quad \text{i} \quad \Delta_1\left(\frac{8}{5}, \frac{16}{5}\right) = \frac{12}{5} > 0,$$

pa je tražena točka minimuma funkcije z tj. točka ravnine xy, koja ispunjava uvjete zadatka, točka $T\left(\frac{8}{5}, \frac{16}{5}\right)$.

3.17 Primjena ekstrema, 2. primjer

Odredite stranice kvadra zadanog volumena V koji ima najmanje oplošje.

Rješenje.

Označimo tražene duljine stranica sa a, b i c. Tada je volumen $V = abc$, i oplošje $O = 2(ab + ac + bc)$. Ako s pomoću poznate vrijednosti volumena izrazimo npr. vrijednost duljine stranice a, dobivamo da je $a = \frac{V}{bc}$, pa oplošje možemo zapisati kao funkciju dviju varijabli, tj.

$$O = O(b, c) = 2\left(\frac{V}{c} + \frac{V}{b} + bc\right) \ , \quad (b, c) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+.$$

Izračunajmo minimum funkcije O. Stacionarne točke zadovoljavaju sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} O_b &= -\frac{2V}{b^2} + 2c = 0 \\ O_c &= -\frac{2V}{c^2} + 2b = 0 \end{aligned}$$

Iz geometrijskih razloga jedina stacionarna točka $(\sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V})$ mora biti točka lokalnog i globalnog minimuma funkcije O. Dakle, kvadar sa stranicama $a = b = c = \sqrt[3]{V}$ (kocka) zadovoljava uvjete zadatka.

3.18 Lokalni ekstremi funkcija triju varijabla

Izračunajte lokalne ekstreme funkcije

$$u(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z.$$

Rješenje.

Funkcija u triju varijabla je beskonačno puta diferencijabilna na $D = \mathbb{R}^3$, a njene parcijalne derivacije prvog reda su $u_x = 2x - y + 1$, $u_y = 2y - x$ i $u_z = 2z - 2$. Rješavanjem sustava

$$\begin{aligned} u_x &= 2x - y + 1 = 0 \\ u_y &= 2y - x = 0 \\ u_z &= 2z - 2 = 0 \end{aligned}$$

dobivamo $x = -\dfrac{2}{3}$, $y = -\dfrac{1}{3}$ i $z = 1$, što znači da je u točki $T(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1)$ ispunjen nužan uvjet ekstrema [M2, teorem 3.7] , odnosno da je T stacionarna točka funkcije u.

Provjerimo dovoljne uvjete za postojanje lokalnog ekstrema funkcije u u točki T. Izračunajmo najprije njene derivacije drugog reda.

$$\begin{array}{lll} u_{xx} = 2 & u_{xy} = -1 & u_{xz} = 0 \\ u_{yx} = -1 & u_{yy} = 2 & u_{yz} = 0 \\ u_{zx} = 0 & u_{zy} = 0 & u_{zz} = 2 \end{array}$$

Dakle, u točki T vrijedi

$$\Delta_1(T) = 2,$$

$$\Delta_2(T) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0,$$

$$\Delta_3(T) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 > 0,$$

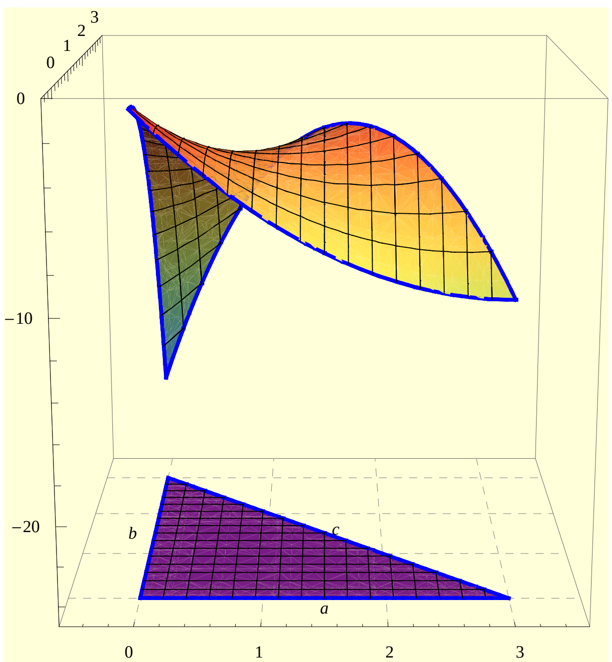
pa po teoremu [M2, teorem 3.8] zaključujemo da je $T(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1)$ točka lokalnog minimuma funkcije u.

3.19 Ekstremi funkcija više varijabli na zatvorenom području, 1. primjer

Odredite globalne ekstreme funkcije

$$f(x, y) = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$$

na skupu $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 3\}$.



Slika 3.10: Ploha $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$ nad zatvorenim područjem $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 3\}$.

Rješenje.

Dio plohe $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$ nad zatvorenim područjem D prikazan je na Slici 3.10. U ovakvim zadacima, budući da tražimo samo globalne ekstreme, nećemo provjeravati dovoljne uvjete za postojanje ekstrema funkcije, već ćemo izračunati sve stacionarne točke funkcije nad zadanim zatvorenim područjem, i uspoređivanjem funkcijskih vrijednosti u tim točkama izdvojiti točke globalnog minimuma i maksimuma. Pronađimo najprije stacionarne točke funkcije f na cijelom području definicije. Rješavanjem sustava

$$\begin{aligned} f_x &= 2x + 4y - 6 = 0 \\ f_y &= 4x - 4y = 0 \end{aligned}$$

dolazimo do točke $T_1(1,1)$. Zanimljiva nam je jer se nalazi unutar područja D, inače bismo je isključili iz promatranja. Pronađimo zatim točke ekstrema na rubovima područja D. Kandidati za ekstrem su naravno i točke $T_2(3,0)$, $T_3(0,3)$ i $T_4(0,0)$.

a) Promotrimo segment $y = 0$, $x \in [0,3]$ (označimo ga sa a). Vrijedi
$$f(x,0) = f(x) = x^2 - 6x - 1,$$
pa f na tom segmentu možemo promatrati kao funkciju jedne varijable. Iz $f'(x) = 2x - 6 = 0$ dobivamo $x = 3$, što znači da je rubna točka $T_2(3,0)$ jedina stacionarna točka funkcije $f = f(x)$ nad segmentom a.

b) Označimo sa b segment $x = 0$, $y \in [0,3]$. Na njemu vrijedi
$$f(0,y) = f(y) = -2y^2 - 1,$$
pa ponovo ekstreme funkcije f nad b možemo tražiti uz pomoć alata za računaje ekstrema funkcije jedne varijable [M1, §5.7] . Kako iz $f'(y) = -4y = 0$ slijedi $y = 0$, zaključujemo da ni unutar segmenta b nema stacionarnih točaka funkcije f.

c) Preostao je rub c određen s $x \in [0,3]$, $y = 3 - x$. Na njemu vrijedi
$$f(x,y) = f(x, 3-x) = x^2 - 2(3-x)^2 + 4x(3-x) - 6x - 1 = -5x^2 + 18x - 19.$$
Iz $f'(x) = -10x + 18 = 0$ slijedi $x = 1.8$ i $y = 3 - 1.8 = 1.2$. Dakle, točka $T_5(1.8, 1.2)$ je stacionarna točka funkcije f nad segmentom c.

Prikažimo sada dobivene rezultate u preglednoj tablici:

$T(x,y)$	$f(T)$
$T_1(1,1)$	-4
$T_2(3,0)$	-10
$T_3(0,3)$	-19
$T_4(0,0)$	-1
$T_5(1.8,1.2)$	-2.8

Budući da su navedene točke jedini kandidati za točke minimuma i maksimuma, a da globalni ekstremi moraju postojati (funkcija je neprekidna nad D), očito je da f u $T_3(0,3)$ ima globalni minimum, a u $T_4(0,0)$ globalni maksimum nad područjem D.

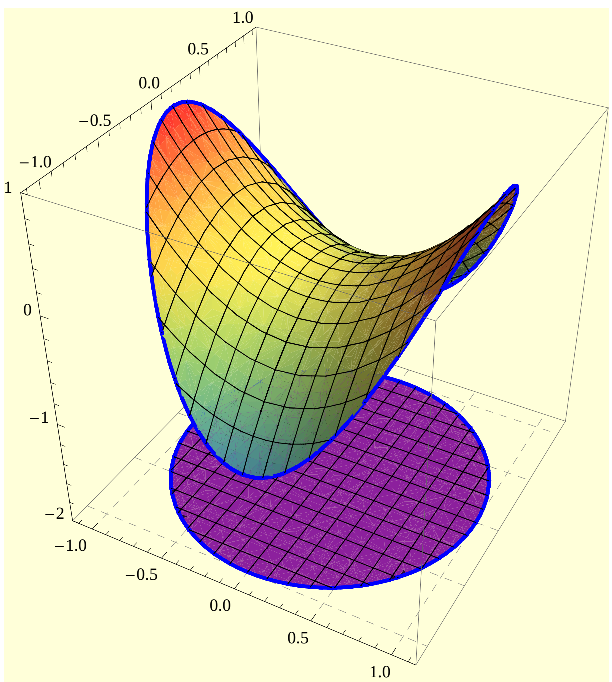
3.20 Ekstremi funkcija više varijabli na zatvorenom području, 2. primjer

Odredite najveću i najmanju vrijednost funkcije

$$f(x,y) = x^2 - y^2$$

ako je $x^2 + y^2 \leq 1$.

Rješenje.



Slika 3.11: Ploha $z = x^2 - y^2$ nad zatvorenim područjem $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Dio plohe $z = x^2 - y^2$ nad zatvorenim područjem $x^2 + y^2 \leq 1$ prikazan je na Slici 3.11. Rješavanjem sustava

$$\begin{aligned} z_x &= 2x = 0 \\ z_y &= -2y = 0 \end{aligned}$$

dolazimo do stacionarne točke $O(0,0)$ funkcije f. Vrijedi $f(0,0) = 0$. Provjerimo što se događa s funkcijskim vrijednostima na na rubu zadanog područja, tj. na kružnici $x^2 + y^2 = 1$. Kao i u prethodnom primjeru, funkciju f nad kružnicom prikazat ćemo kao funkciju jedne varijable, te ispitivati postojanje ekstrema alatima za ispitivanje ekstrema funkcije jedne varijable. Izvršimo zamjenu

$$\begin{aligned} x &= \cos t, \\ y &= \sin t, \quad 0 \le t < 2\pi. \end{aligned}$$

Na ovaj način sve točke kružnice zadane su jednim parametrom t.

Izrazom $f(x,y) = x^2 - y^2 = \cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2t = f(t)$, $0 \le t < 2\pi$, zadane su funkcijske vrijednosti funkcije f na kružnici.

Iz $\dfrac{df}{dt} = -2\sin 2t = 0$, $0 \le t < 2\pi$, dobivamo sljedeće točke:

$$\begin{aligned} &2t = 0 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow S_1(1,0), f(1,0) = 1 \\ &2t = \pi \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow S_2(0,1), f(0,1) = -1 \\ &2t = 2\pi \Rightarrow t = \pi \Rightarrow S_3(-1,0), f(-1,0) = 1 \\ &2t = 3\pi \Rightarrow t = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow S_4(0,-1), f(0,-1) = -1 \end{aligned}$$

Vidimo da funkcija f ima najveću vrijednost 1 u točkama S_1 i S_3, a najmanju vrijednost -1 u točkama S_2 i S_4.

3.21 Problem vezanog ekstrema

Odredite ekstreme funkcije

$$f(x,y) = x + 2y$$

uz uvjet $x^2 + y^2 = 5$.

Rješenje.

Dio plohe $z = x + 2y$ uz uvjet $x^2 + y^2 = 5$ prikazan je na Slici 3.12. Rješavamo problem vezanog ekstrema

$$\begin{cases} f(x,y) = x + 2y \to \min, \max \\ \varphi(x,y) = x^2 + y^2 - 5 = 0 \end{cases}$$

Pridružena Lagrangeova funkcija ([M2, §3.12]) je

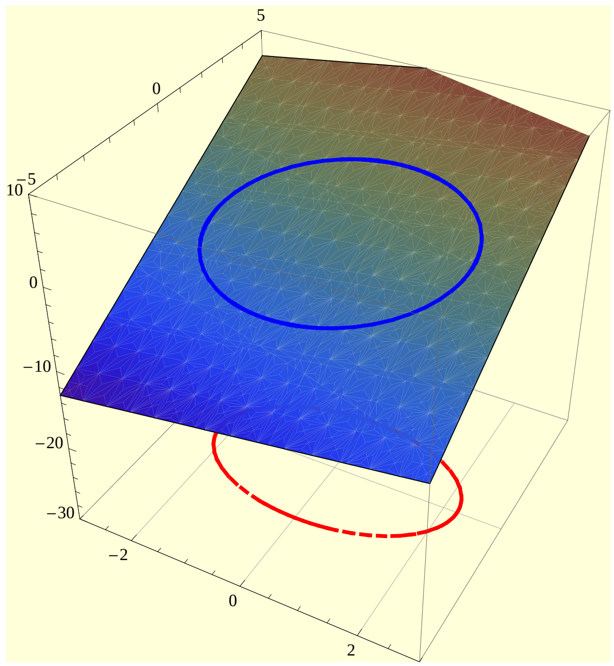
$$L(x,y,\lambda) = x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 5),$$

a nuždan uvjet ekstrema glasi

$$\begin{aligned} L'_x &= 1 + 2\lambda x = 0, \\ L'_y &= 2 + 2\lambda y = 0, \\ L'_\lambda &= x^2 + y^2 - 5 = 0. \end{aligned}$$

Iz prve dvije jednadžbe dobijemo $x = -\dfrac{1}{2\lambda}$ i $y = -\dfrac{1}{\lambda}$. Uvrštavanjem u treću jednadžbu dobijemo

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2}.$$



Slika 3.12: Dio plohe $z = x + 2y$ uz uvjet $x^2 + y^2 = 5$.

Dakle, nuždan uvjet zadovoljavaju točke $T_1(-1, -2)$ i $T_2(1, 2)$. Budući da je

$$\delta(T) = \begin{vmatrix} L''_{xx} & L''_{xy} \\ L''_{xy} & L''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{vmatrix} = 4\lambda^2,$$

uvrštavanjem odgovarajuće vrijednosti od λ za točke T_1 i T_2 dobije se $\delta(T_1) = \delta(T_2) = 1 > 0$, pa zaključujemo da u obje točke funkcija f ima vezani ekstrem, i to lokalni minimum u T_1 jer je $L''_{xx}(T_1) = 1 > 0$ i lokalni maksimum u T_2 jer je $L''_{xx}(T_2) = -1 < 0$.

3.22 Primjena vezanog ekstrema, 1. primjer

Uz pomoć vezanih ekstrema izračunajte maksimalni obujam stošca upisanog u kuglu polumjera 1.

Rješenje.

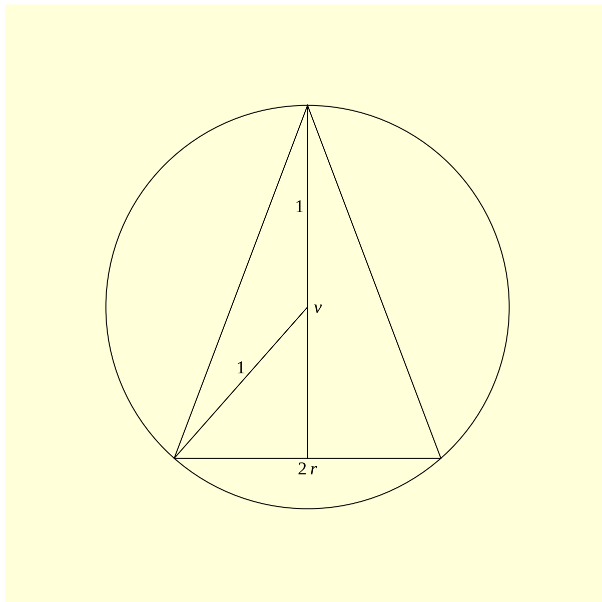
Obujam stošca računamo s pomoću formule

$$V = \frac{1}{3} r^2 \pi v,$$

gdje je r polumjer baze stošca, a v visina stošca. Budući da je jednakokračni trokut osnovice $2r$ i visine v upisan u kružnicu polumjera 1 (Slika 3.13), vrijednosti r i v

povezane su izrazom

$$v = 1 + \sqrt{1 - r^2}.$$



Slika 3.13: Proizvoljni stožac upisan u kuglu polumjera 1 - projekcija.

Pišimo x i y umjesto r i v. Želimo riješiti problem vezanog ekstrema

$$\begin{cases} V(x,y) = \frac{1}{3}x^2\pi y \to \min, \max \\ \varphi(x,y) = 1 + \sqrt{1-x^2} - y = 0 \end{cases}$$

Pridružena Lagrangeova funkcija ([M2, §3.12]) je

$$L(x,y,\lambda) = \frac{1}{3}x^2\pi y + \lambda(1 + \sqrt{1-x^2} - y), \quad (x,y) \in \mathcal{D} = (0,1) \times (0,2)$$

Nuždan uvjet ekstrema glasi

$$\begin{aligned} L'_x &= \frac{2\pi}{3}xy - \lambda\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = 0, \\ L'_y &= \frac{\pi}{3}x^2 - \lambda = 0, \\ L'_\lambda &= 1 + \sqrt{1-x^2} - y = 0. \end{aligned}$$

Iz druge jednadžbe slijedi $\lambda = \frac{\pi}{3}x^2$. Uvrstimo li taj izraz u prvu jednadžbu, dobijemo

$$\frac{2\pi}{3}xy = \frac{\pi}{3}\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}},$$

odnosno $y = \dfrac{x^2}{2\sqrt{1-x^2}}$. Sada iz treće jednadžbe dobijemo

$$\begin{aligned}
&1 + \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{2\sqrt{1-x^2}} = 0 \qquad / \cdot 2\sqrt{1-x^2} \quad (x \in (0,1)) \\
&2\sqrt{1-x^2} + 2 - 2x^2 - x^2 = 0 \\
&2\sqrt{1-x^2} = 3x^2 - 2 \qquad /^2 \\
&4 - 4x^2 = 9x^4 - 12x^2 + 4 \\
&9x^4 - 8x^2 = 0 \\
&x^2(9x^2 - 8) = 0
\end{aligned}$$

Zbog $(x,y) \in \mathcal{D} = (0,1) \times (0,2)$ je $x = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ i $y = \dfrac{x^2}{2\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{4}{3}$. Iz geometrijskih razloga jasno je da se radi o točki u kojoj funkcija V dostiže maksimum. Dakle, među svim stošcima upisanim u kuglu polumjera 1, stožac s visinom $v = \dfrac{4}{3}$ i polumjerom baze $r = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ ima najveći obujam, $V = \dfrac{32\pi}{81}$.

3.23 Primjena vezanog ekstrema, 2. primjer

U ravnini $x + y - 2z = 0$ pronađite točku za koju je zbroj kvadrata udaljenosti od ravnina $x + 3z - 6 = 0$ i $y + 3z - 2 = 0$ najmanji.

Rješenje.

Označimo s $T_0(x_0, y_0, z_0)$ traženu točku. Udaljenosti točke T_0 od dviju zadanih ravnina dane su respektivno s

$$d_1 = \frac{|x_0 + 3z_0 - 6|}{\sqrt{10}} \qquad \text{i} \qquad d_2 = \frac{|y_0 + 3z_0 - 2|}{\sqrt{10}}.$$

Prema tome, budući da koordinate točke T_0 zadovoljavaju jednadžbu ravnine $x + y - 2z = 0$, Lagrangeova funkcija ([M2, §3.12]) je dana sa

$$L(x_0, y_0, z_0, \lambda) = \frac{1}{10}(x_0 + 3z_0 - 6)^2 + \frac{1}{10}(y_0 + 3z_0 - 2)^2 + \lambda(x_0 + y_0 - 2z_0),$$

odnosno sa

$$L(x, y, z, \lambda) = \frac{1}{10}(x + 3z - 6)^2 + \frac{1}{10}(y + 3z - 2)^2 + \lambda(x + y - 2z).$$

Nužan uvjet ekstrema glasi

$$
\begin{aligned}
L'_x &= \frac{1}{5}\,(x+3z-6)+\lambda=0,\\
L'_y &= \frac{1}{5}\,(y+3z-2)+\lambda=0,\\
L'_z &= \frac{3}{5}\,(x+3z-6)+\frac{3}{5}\,(y+3z-2)-2\lambda=0,\\
L'_\lambda &= x+y-2z=0.
\end{aligned}
$$

Zbrojimo li prve tri jednadžbe, imamo

$$x+y+6z-8=0,$$

što zajedno s četvrtom jednadžbom daje

$$z=1.$$

Oduzimanjem druge jednadžbe od prve dobivamo $x-y=4$, što zajedno s četvrtom jednadžbom i $z=1$ daje

$$x=3 \qquad \text{i} \qquad y=-1.$$

Dakle, $T_0(3,-1,1)$ je tražena točka.

3.24 Zadaci za vježbu

1. Odredite i skicirajte područje definicije funkcija:
   (a) $z(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$;
   (b) $z(x,y)=\dfrac{xy+1}{x^2-y}$;
   (c) $z(x,y)=\ln(x^2+y)$;
   (d) $z(x,y)=\operatorname{arctg}\dfrac{x-y}{1+x^2y^2}$;
   (e) $z(x,y)=\arccos\dfrac{x}{x+y}$;
   (f) $z(x,y)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}$;
   (g) $z(x,y)=\sqrt{(1-x^2-y^2)\,(4-x^2-y^2)}$;
   (h) $z(x,y)=\sqrt{y\sin x}$;
   (i) $z(x,y)=\ln\left[x\,\ln(y-x)\right]$;
2. Odredite parcijalne derivacije prvog reda funkcija:
   (a) $z(x,y)=\arcsin\dfrac{x}{y}$;
   (b) $u(x,y,z)=x^{y^z}$.

3. Odredite parcijalne derivacije drugog reda funkcija:

   (a) $f(x,y) = \ln(x^2 + y)$;

   (b) $f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

4. Za funkciju $u(x,y,z) = e^{xyz}$ odredite $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}$, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial y^3}$ i $\dfrac{\partial^3 u}{\partial z^3}$.

5. Odredite $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, ako je $z(x,y) = \sqrt{2xy + y^2}$.

6. Odredite $\dfrac{\partial^3 z}{\partial^2 x \partial y}$, ako je $z(x,y) = x \ln(xy)$.

7. Riješite parcijalnu diferencijalnu jednadžbu $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2x + y$.

8. Riješite parcijalnu diferencijalnu jednadžbu $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$ uz uvjete $z(x,0) = 1$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}(x,0) = x$.

9. Odredite totalni diferencijal prvog reda funkcije $z(x,y) = \ln\left(1 + \dfrac{x}{y}\right)$.

10. Odredite totalni diferencijal drugog reda funkcije $z(x,y) = x \ln \dfrac{x}{y}$.

11. Odredite derivaciju $\dfrac{dz}{dt}$ ako je:

    (a) $z(x,y) = \arcsin(x - y)$, $x = 3t, y = 4t^3$;

    (b) $z(x,y) = \operatorname{tg}\left(3t + 2x^2 - y\right)$, $x = \dfrac{1}{t}, y = \sqrt{t}$.

12. Odredite parcijalne derivacije $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ i $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ ako je:

    (a) $z(x,y) = \sin xy + \dfrac{1}{1 + x^2 + y^2}$, $x = uv, y = \dfrac{u}{v}$;

    (b) $z(x,y) = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{y}$, $x = u \sin v, y = u \cos v$.

13. Odredite derivaciju prvog i drugog reda funkcije $y = f(x)$ zadane implicitno sa $\left(x^2 + y^2\right)^3 - 3\left(x^2 + y^2\right) + 1$.

14. Odredite parcijalne derivacije prvog reda funkcije $z = f(x,y)$ zadane implicitno sa $e^z - xyz = 0$.

15. Odredite totalni diferencijal prvog reda funkcije $z = f(x,y)$ zadane implicitno sa $x + y + z = xyz$.

16. Odredite tangencijalnu ravninu i normalu na plohu $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ u točki $T(1, 1, z_0)$.

17. Odredite lokalne ekstreme funkcije $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$.

18. Odredite lokalne ekstreme funkcije

    (a) $f(x, y) = \sin x + \sin y + \cos(x + y)$ za $x, y \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$;

    (b) $f(x, y) = \sin x + \cos y + \cos(x - y)$ za $x, y \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

19. Izračunajte najkraću udaljenost točke $T(1, 0, -2)$ do ravnine $x + 2y + z = 4$.

20. Pravokutna kutija bez poklopca treba se napraviti od 12 m^2 kartona. Izračunajte maksimalan volumen takve kutije.

21. Odredite lokalne ekstreme funkcije z zadane implicitno s $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$.

22. Odredite najveću i najmanju vrijednost funkcije $f(x, y) = x^2 + y^2 - 12x + 16y$ ako je $x^2 + y^2 \le 25$.

23. Odredite ekstreme funkcije $f(x, y) = x + 2y$ uz uvjet $x^2 + y^2 = 5$.

24. Pomoću uvjetnih ekstrema odredite maksimalnu površinu jednakokračnog trokuta upisanog u kružnicu polumjera R.

25. Na elipsi $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ odredite točke koje su najmanje i najviše udaljene od pravca $3x - y - 9 = 0$.

26. Odredite ekstreme funkcije $f(x, y, z) = x - 2y + 2z$ uz uvjet $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

27. Odredite ekstreme funkcije $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + xz$ uz uvjet $x + 2y + 3z = 1$.

28. U trokutu ABC površine P i stranica a, b, c odredite točku O takvu da je produkt udaljenosti te točke do stranica trokuta maksimalan.

3.25 Rješenja zadataka za vježbu

1. (a) $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$

   (b) $\mathbb{R}^2 \backslash \{(x, y) \colon y = x^2\}$

   (c) $\{(x, y) \colon y > -x^2\}$

   (d) $\mathbb{R}^2$

   (e) $\{(x, y) \colon y \le 0, y \le -2x\} \cup \{(x, y) \colon y \ge 0, y \ge -2x\}$

   (f) $\{(x, y) \colon -1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1\}$

   (g) $\{(x, y) \colon x^2 + y^2 \le 1\} \cup \{(x, y) \colon x^2 + y^2 \ge 4\}$

(h) $\Big(\cup_{k\in\mathbb{Z}} \{(x,y)\colon y \geq 0, 2k\pi \leq x \leq (2k+1)\pi\}\Big) \cup \Big(\cup_{l\in\mathbb{Z}} \{(x,y)\colon y \leq 0, (2l+1)\pi \leq x \leq 2(l+1)\pi\}\Big)$

(i) $\{(x,y)\colon x>0, y>x+1\} \cup \{(x,y)\colon x<0, x<y<x+1\}$

2. (a) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{|y|}{y\sqrt{y^2-x^2}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{-x|y|}{y^2\sqrt{y^2-x^2}}$

(b) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = y^z x^{(y^z-1)}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = (x^{y^z}\ln x) z y^{z-1}$, $\dfrac{\partial f}{\partial z} = (x^{y^z}\ln x)(y^z \ln y)$

3. (a) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{2y-2x^2}{(x^2+y)^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \dfrac{-2x}{(x^2+y)^2}$,
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{-1}{(x^2+y)^2}$

(b) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{-3xy^2}{(x^2+y^2)^{5/2}}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \dfrac{2x^2y-y^3}{(x^2+y^2)^{5/2}}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{2xy^2-x^3}{(x^2+y^2)^{5/2}}$

4. $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} = e^{xyz}y^3z^3$, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial y^3} = e^{xyz}x^3z^3$, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial z^3} = e^{xyz}x^3y^3$.

5. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = \dfrac{-y^2}{(2xy+y^2)^{3/2}}$

6. $\dfrac{\partial^3 z}{\partial^2 x\partial y} = 0$

7. $z(x,y) = 2xy + \dfrac{y^2}{2} + \varphi(x)$

8. $z(x,y) = y^2 + xy + 1$

9. $dz = \dfrac{1}{x+y}dx - \dfrac{x}{y\,(x+y)}dy$

10. $d^2z = -\dfrac{1}{x}dx^2 + \dfrac{2}{y}dxdy - \dfrac{x}{y^2}dy^2$

11. (a) $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{3-12t^2}{\sqrt{1-(3t-4t^3)^2}}$

(b) $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{3-\frac{4}{t^3}-\frac{1}{2\sqrt{t}}}{\cos^2\left(3t+\frac{2}{t^2}-\sqrt{t}\right)}$

12. (a) $\dfrac{\partial z}{\partial u} = 2u\cos u^2 - \dfrac{2uv^2\left(1+v^4\right)}{\left(v^2+u^2v^4+u^2\right)^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v} = \dfrac{2u^2v\left(1-v^4\right)}{\left(v^2+u^2v^4+u^2\right)^2}$

(b) $\dfrac{\partial z}{\partial u} = 0$, $\dfrac{\partial z}{\partial v} = 1$

13. $y' = -\dfrac{x}{y}$, $y'' = -\dfrac{x^2+y^2}{y^3}$

14. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{z}{x\,(z-1)}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{z}{y\,(z-1)}$

15. $dz = \dfrac{(yz-1)\,dx + (xz-1)\,dy}{1-xy}$

16. $R_t \ldots 2x - 2y + 4z - \pi = 0$, $n \ldots \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-\frac{\pi}{4}}{2}$

17. lokalni minimum u $T(1,0)$

18. lokalni maksimum u $T(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{6})$

19. $d = \dfrac{5\sqrt{6}}{6}$

20. $V = 4\ \mathrm{m}^2$

21. lokalni minimum u $T_1(1,-1,-2)$,
lokalni maksimum u $T_2(1,-2,6)$

22. $f_{maks} = 125, f_{min} = -75$

23. minimum u $T_1(\dfrac{4}{5}, \dfrac{3}{5})$, maksimum u $T_2(-\dfrac{4}{5}, -\dfrac{3}{5})$

24. $P = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}R^2$

25. najmanje udaljena $T_1(\dfrac{4}{\sqrt{5}}, -\dfrac{3}{\sqrt{5}})$, najviše udaljena $T_2(-\dfrac{4}{\sqrt{5}}, \dfrac{3}{\sqrt{5}})$

26. minimum u $T_1(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, -\dfrac{2}{3})$, maksimum u $T_2(\dfrac{1}{3}, -\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3})$

27. nema ekstrema u $T_1(-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4})$

28. $T(\dfrac{2P}{3a}, \dfrac{2P}{3b}, \dfrac{2P}{3c})$

4.

Višestruki integrali

4.1 Područje integracije u dvostrukom integralu

Nacrtajte područje integracije i promijenite redoslijed integriranja u integralu

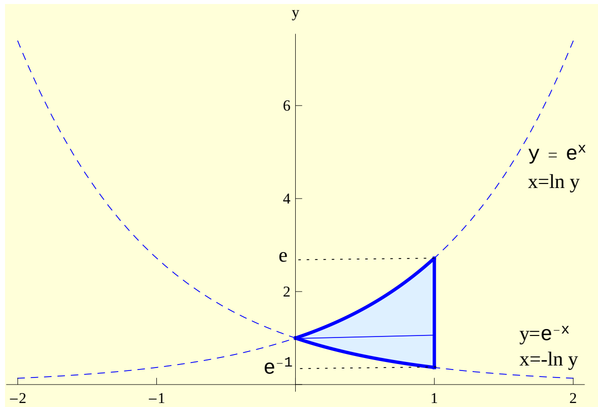
$$I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{e^{-x}}^{e^x} f(x,y)dy.$$

Rješenje.

Vidimo da je područje integracije (([M2, definicija 4.2])) dano s

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, \quad e^{-x} \leq y \leq e^x\},$$

(Slika 4.1)



Slika 4.1: Područje integracije $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, \quad e^{-x} \leq y \leq e^x\}$.

Prema [M2, napomena 4.1] i svojstvu V2 u ([M2, §4.1]) smijemo zamijeniti redoslijed integracije, odnosno integrirati prvo po varijabli y. U tom slučaju područje integracije rastavljamo na uniju dvaju disjunktnih područja

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{e} \leq x \leq 1, \quad -\ln y \leq y \leq 1\},$$

$$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq e, \quad \ln y \leq y \leq 1\},$$

pa je

$$\int_0^1 dx \int_{e^{-x}}^{e^x} f(x, y)dy = \int_{\frac{1}{e}}^1 dy \int_{-\ln y}^1 f(x, y)dx + \int_1^e dy \int_{\ln y}^1 f(x, y)dx.$$

4.2 Neposredno integriranje u dvostrukom integralu

Promijenite redoslijed integriranja i izračunajte vrijednost integrala

$$\int_2^4 \int_x^{2x} \frac{y}{x}\, dx\, dy.$$

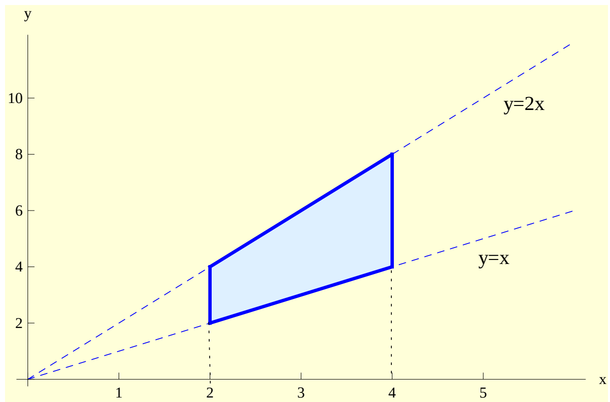
Rješenje.

Područje integracije grafički je prikazano na slici 4.2. Promijenimo redoslijed integriranja. U tom slučaju integriramo po uniji dvaju područja (Slika 4.3)

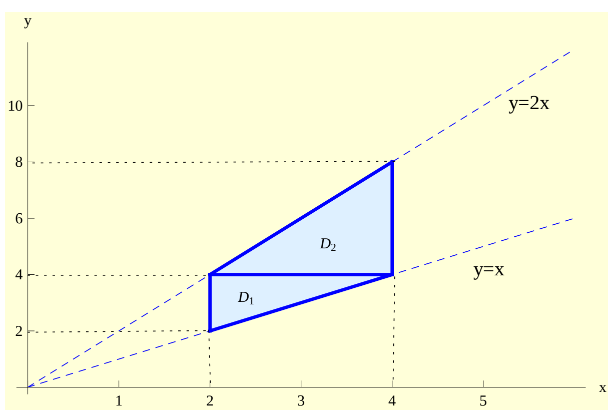
$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq y \leq 4, \quad 2 \leq x \leq y\},$$

i

$$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq y \leq 8, \quad \frac{y}{2} \leq x \leq 4\}.$$



Slika 4.2: Područje integracije $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x \leq 4, \quad x \leq y \leq 2x\}$.



Slika 4.3: Područje integracije $D = D_1 \cup D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq y \leq 4, \quad 2 \leq x \leq y\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq y \leq 8, \quad \frac{y}{2} \leq x \leq 4\}$.

Izračunajmo sada vrijednost integrala uzastopnim računanjem dvaju jednostrukih integrala uz pomoć Newton-Leibnitzove formule ([M2, §2.2]) .

$$
\begin{aligned}
I = \int_2^4 \int_x^{2x} \frac{y}{x}\, dx\, dy &= \int_2^4 y\, dy \int_2^y \frac{dx}{x} + \int_4^8 y\, dy \int_{\frac{y}{2}}^4 \frac{dx}{x} = \\
&= \int_2^4 y\, dy \ln|x| \Big|_2^y + \int_4^8 y\, dy \ln|x| \Big|_{\frac{y}{2}}^4 = \\
&= \int_2^4 y\left(\ln|y| - \ln 2\right)\, dy + \int_4^8 y\left(\ln 4 - \ln\frac{|y|}{2}\right) dy = \\
&\overset{y\geq 0}{=} \int_2^4 y \ln\frac{y}{2}\, dy + \ln 4 \int_4^8 y\, dy - \int_4^8 y \ln\frac{y}{2}\, dy
\end{aligned}
$$

Budući da je

$$
\begin{aligned}
\int y \ln\frac{y}{2}\, dy &= \left\{ \begin{array}{cc} u = \ln\frac{y}{2} & du = \frac{2}{y}\frac{1}{2}\, dy = \frac{dy}{y} \\ dv = y\, dy & v = \frac{y^2}{2} \end{array} \right\} = \\
&= \frac{y^2}{2}\ln\frac{y}{2} - \int \frac{y^2}{2}\frac{1}{y}\, dy = \frac{y^2}{2}\ln\frac{y}{2} - \frac{y^2}{4} + C,
\end{aligned}
$$

imamo

$$
\begin{aligned}
I &= \left(\frac{y^2}{2}\ln\frac{y}{2} - \frac{y^2}{4}\right)\Bigg|_2^4 + \left(\ln 4\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_4^8 - \left(\frac{y^2}{2}\ln\frac{y}{2} - \frac{y^2}{4}\right)\Bigg|_4^8 = \\
&= 8\ln 2 - 4 - (2\ln 1 - 1) + 32\ln 4 - 8\ln 4 - (32\ln 4 - 16) + (8\ln 2 - 4) = \\
&= 8\ln 2 - 4 + 1 + 32\ln 4 - 16\ln 2 - 32\ln 4 + 16 + 8\ln 2 - 4 = 9
\end{aligned}
$$

4.3 Polarne koordinate u dvostrukom integralu

Izračunajte $I = \iint\limits_S \sqrt{4 - x^2 - y^2}\, dx\, dy$ prijelazom na polarne koordinate ako je područje S omeđeno krivuljama $y = x$, $y = \sqrt{3}x$ i $x^2 + y^2 = 4$.

Rješenje.

Područje integracije S prikazano je na Slici 4.4. Uvedimo supstituciju

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi. \tag{4.1}$$

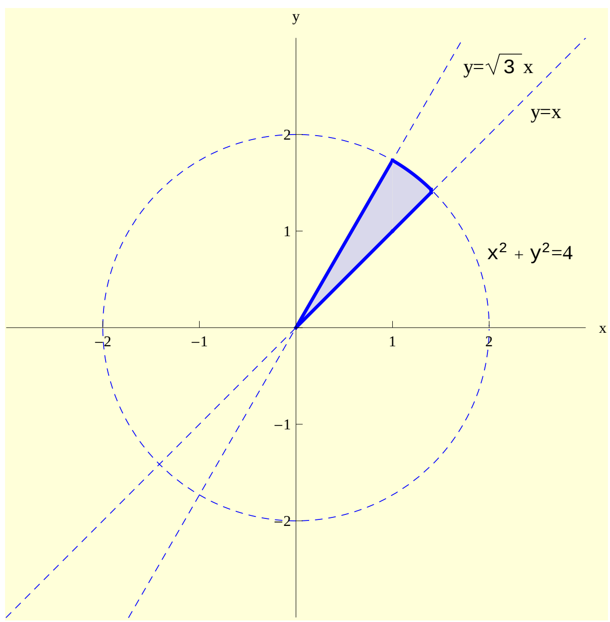
Prema ([M2, §4.2.2]) element površine u polarnim koordinatama jednak je

$$r\,dr\,d\varphi,$$

odnosno, pri prijelazu na polarne koordinate Jakobijan ([M2, teorem 4.2] za $n = 2$, [M2, primjer 4.11]) je

$$J = r.$$

Da bismo područje S opisali u polarnim koordinatama moramo pronaći odgovarajuću jednadžbu zadane kružnice.



Slika 4.4: Područje integracije $S = \{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{3}, \quad 0 \le r \le 2\}$.

Uvrstimo li supstituciju (4.1) u jednadžbu kružnice, dobijemo

$$x^2 + y^2 = 4 \quad \Longrightarrow \quad r^2\cos^{\varphi} + r^2\sin^2\varphi = 4 \quad \Longrightarrow \quad r = 2,$$

pa je područje S (kružni isječak) dano s

$$S = \{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{3}, \quad 0 \le r \le 2\}.$$

Integral u novim, polarnim koordinatama glasi

$$
\begin{aligned}
I &= \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int\limits_{0}^{2} \sqrt{4 - r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi}\, r\, dr = \\
&= \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int\limits_{0}^{2} \sqrt{4 - r^2}\, r\, dr = \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} 4 - r^2 = t^2, \quad t \geq 0 & \\ -2r\,dr = 2t\,dt & \begin{array}{c|c|c} r & 0 & 2 \\ \hline t & 2 & 0 \end{array} \\ r\,dr = -t\,dt & \end{array} \right\} = \\
&= \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int\limits_{2}^{0} t\,(-t)\,dt = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \left(-\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_{2}^{0} = \\
&= \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(0 + \frac{8}{3}\right) d\varphi = \frac{8}{3}\varphi\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \\
&= \frac{8}{3}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{8}{3}\frac{\pi}{12} = \frac{2\pi}{9}
\end{aligned}
$$

4.4 Eliptične koordinate u dvostrukom integralu

Izrazite integral $\displaystyle\iint\limits_S \sqrt{4 - \frac{x^2}{4} - y^2}\, dx\, dy$ u eliptičkim koordinatama pa ga izračunajte ako je S dio prstena koji je omeđen elipsama $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ i $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ u prvom kvadrantu.

Rješenje.

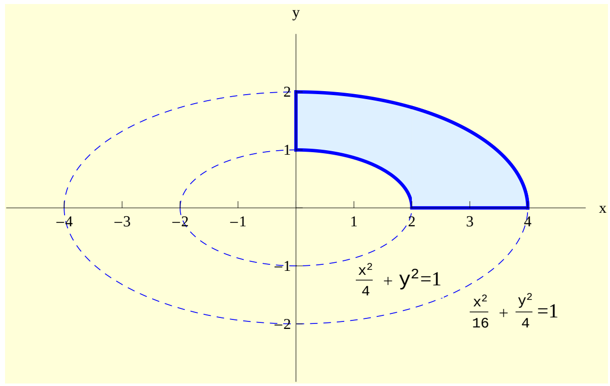
Područje integracije S prikazano je na Slici 4.5. Uvedimo nove varijable φ i r supstitucijom

$$
x = ar\cos\varphi = 2r\cos\varphi, \qquad y = br\sin\varphi = r\sin\varphi. \tag{4.2}
$$

Pri tom su $a = 2$ i $b = 1$ poluosi manje elipse na koordinatnim osima (isto tako smo za a i b mogli uzeti i poluosi veće elipse). Izračunajmo Jakobijan [M2, teorem 4.2] za $n = 2$ i za eliptične koordinate.

$$
J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & -ar\sin\varphi \\ b\sin\varphi & br\cos\varphi \end{vmatrix} = abr\cos^2\varphi + abr\sin^2\varphi = abr
$$

Dakle, za $a = 2$ i $b = 1$ Jakobijan je $2r$.



Slika 4.5: Područje integracije $S = \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, \quad 1 \le r \le 2\}$.

Trebamo pronaći jednadžbe dviju rubnih elipsa u novim, eliptičkim koordinatama.

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{4r^2\cos^2\varphi}{4} + r^2\sin^2\varphi = 1 \quad \Longrightarrow \quad r^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad r = 1$$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{4r^2\cos^2\varphi}{16} + \frac{r^2\sin^2\varphi}{4} = 1 \quad \Longrightarrow \quad r^2 = 4 \quad \Longrightarrow \quad r = 2$$

Prema tome, područje integracije dano je s

$$S = \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, \quad 1 \le r \le 2\}.$$

Konačno, imamo

$$\begin{aligned}
\iint\limits_S \sqrt{4 - \frac{x^2}{4} - y^2}\, dx\, dy &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_1^2 \sqrt{4 - \frac{4r^2\cos^2\varphi}{4} - r^2\sin^2\varphi}\, 2r\, dr = \\
&= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_1^2 \sqrt{4 - r^2}\, 2r\, dr = \left\{ \begin{array}{l} 4 - r^2 = t^2, \quad t \ge 0 \\ -2r\, dr = 2t\, dt \\ 2r\, dr = -2t\, dt \end{array} \quad \begin{array}{c|c|c} r & 1 & 2 \\ \hline t & \sqrt{3} & 0 \end{array} \right\} = \\
&= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{\sqrt{3}}^0 t\,(-2)\,t\, dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left(-2\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_{\sqrt{3}}^{0} = \\
&= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(0 + \frac{2}{3}3\sqrt{3}\right) d\varphi = 2\sqrt{3}\varphi\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\sqrt{3}\frac{\pi}{2} - 0 = \pi\sqrt{3}
\end{aligned}$$

4.5 Površina ravninskog lika

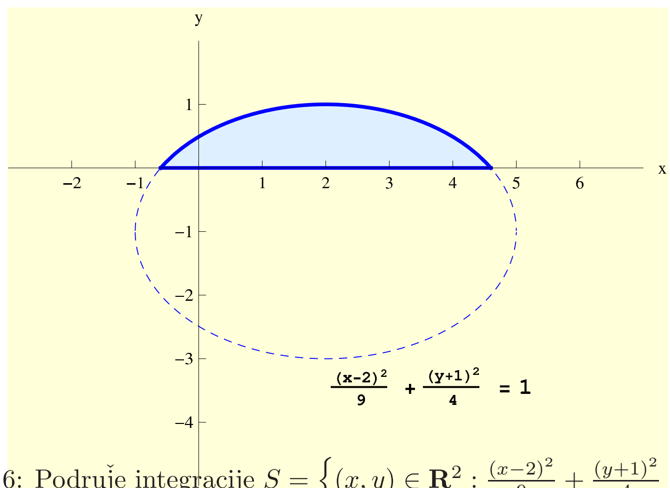
Izračunajte površinu lika

$$S = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 : \frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{4} \leq 1, y \geq 0 \right\}.$$

Rješenje.

Površina područja S, prema [M2, §4.2.1], računa se po formuli

$$P(S) = \iint\limits_S dx\, dy.$$



Slika 4.6: Područje integracije $S = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 : \frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{4} \leq 1, y \geq 0 \right\}$.

Budući da je područje S (Slika 4.6) određeno pravcem i elipsom koja nije centralna, prijeđimo na eliptične koordinate u pomaknutom koordinatnom sustavu:

$$\frac{x-p}{a} = r\cos\varphi \quad\Longrightarrow\quad x = p + ar\cos\varphi \quad\Longrightarrow\quad x = 2 + 3r\cos\varphi,$$

odnosno

$$\frac{y-q}{b} = r\sin\varphi \quad\Longrightarrow\quad y = q + br\sin\varphi \quad\Longrightarrow\quad y = -1 + 2r\sin\varphi.$$

Jakobijan je, za ovakvu zamjenu varijabli, jednak $J = abr = 6r$.

Tada je

$$P(S) = \iint\limits_S dx\, dy = \iint\limits_{S_{\varphi r}} r\, d\varphi\, dr = \int\limits_{\varphi_A}^{\varphi_B} d\varphi \int\limits_{r_{pravca}}^{r_{elipse}} r\, dr.$$

Jednadžba elipse u tom slučaju poprima oblik

$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1 \quad \Longrightarrow \quad r_{elipse} = 1,$$

a jednadžba pravca

$$y = 0 \quad \Longrightarrow \quad -1 + 2r\sin\varphi = 0 \quad \Longrightarrow \quad r_{pravca} = \frac{1}{2\sin\varphi}.$$

Još nam trebaju granične vrijednosti za φ. Izračunajmo najprije presječne točke A i B elipse i pravca. Dobijemo ih rješavanjem sustava

$$\begin{cases} \frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Iz

$$(x-2)^2 = \frac{27}{4}$$

slijedi

$$x_{1,2} = 2 \pm \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

pa su presječne točke $A\left(2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ i $B\left(2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}, 0\right)$.

Za vrijednosti φ_A i φ_B vrijedi

$$\operatorname{tg}\varphi_A = \frac{\sin\varphi_A}{\cos\varphi_A} = \frac{\frac{y_A+1}{2}}{\frac{x_A-2}{3}} = \frac{\frac{0+1}{2}}{\frac{2+\frac{3\sqrt{3}}{2}-2}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Longrightarrow \varphi_A = \frac{\pi}{6},$$

i

$$\operatorname{tg}\varphi_B = \frac{\frac{y_B+1}{2}}{\frac{x_B-2}{3}} = \frac{\frac{0+1}{2}}{\frac{2-\frac{3\sqrt{3}}{2}-2}{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Longrightarrow \varphi_A = \frac{5\pi}{6}.$$

Primijetimo da vrijednosti φ_A i φ_B nisu kutovi koje dužine $\overline{O'A}$ odnosno $\overline{O'B}$ zatvaraju s pozitivnim dijelom osi $O'x$.

Sada je

$$
\begin{aligned}
P(S) &= \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} d\varphi \int\limits_{\frac{1}{2\sin\varphi}}^{1} 6r\,dr = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} d\varphi \left(6\frac{r^2}{2}\right)\Bigg|_{\frac{1}{2\sin\varphi}}^{1} \\
&= \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \left(3 - \frac{3}{4\sin^2\varphi}\right) d\varphi = \left(3\varphi + \frac{3}{4}\operatorname{ctg}\varphi\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} = \\
&= 3\frac{5\pi}{6} - 3\frac{\pi}{6} + \frac{3}{4}\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{6} - \frac{3}{4}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = \\
&= 2\pi - \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{4} = 2\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}
$$

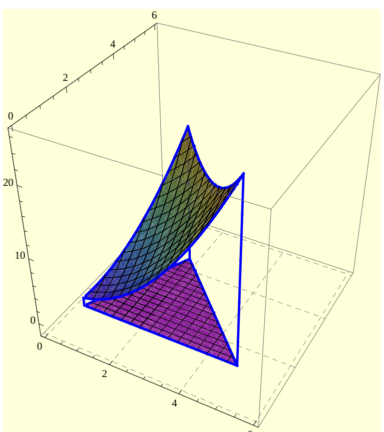
4.6 Volumen tijela, 1. primjer

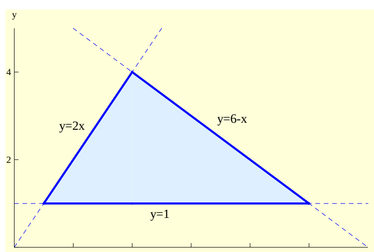
Izračunajte volumen tijela koje je omeđeno plohama $z = x^2 + y^2$, $z = 0$, $y = 2x$, $y = 6 - x$ i $y = 1$.

Rješenje.

Volumen tijela Ω koje je omeđeno bazom D u xy-ravnini i plohom $z = f(x, y)$, prema [M2, §4.2.1], dan je s

$$V(\Omega) = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_D z\,dP.$$





Slika 4.7: Tijelo omedjeno plohama $z = x^2 + y^2$, $z = 0$, $y = 2x$, $y = 6 - x$ i $y = 1$, te njegova projekcija na xy ravninu.

Na Slici 4.7 je prikazano tijelo čiji volumen želimo izračunati i njegova projekcija na xy ravninu. Budući da je tijelo odozgo omeđeno plohom $z = x^2 + y^2$, vrijedi

$$V = \iint\limits_{V_{xy}} \left(x^2 + y^2\right)\, dx\, dy = \int\limits_1^4 dy \int\limits_{\frac{1}{2}y}^{6-y} \left(x^2 + y^2\right)\, dx = \int\limits_1^4 \left(\frac{x^3}{3} + xy^2\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}y}^{6-y} dy =$$

$$= \int\limits_1^4 \left[\frac{(6-y)^3}{3} + (6-y)\,y^2 - \frac{1}{3}\frac{y^3}{8} + \frac{1}{2}yy^2\right] dy =$$

$$= \int\limits_1^4 \left(72 - 36y + 6y^2 - \frac{y^3}{3} + 6y^2 - y^3 - \frac{y^3}{24} - \frac{y^3}{2}\right) dy =$$

$$= \int\limits_1^4 \left(-\frac{15}{8}y^3 + 12y^2 - 36y + 72\right) dy =$$

$$= \left(-\frac{15}{8}\frac{y^4}{4} + 12\frac{y^3}{3} - 36\frac{y^2}{2} + 72y\right)\Bigg|_1^4 = \frac{2511}{32}.$$

4.7 Volumen tijela, 2. primjer

Izračunajte volumen tijela omeđenog površinama $z = x^2 + y^2$, $z = 2(x^2 + y^2)$ i ravninom $z = 4$.

Rješenje.

Volumen tijela Ω omeđenog plohama $z = f(x, y)$ i $z = g(x, y)$ iznad područja D, pri čemu je $g(x, y) \leq f(x, y)$, $\forall (x, y) \in D$, prema [M2, §4.2.1], računa se po formuli

$$V(\Omega) = \iint\limits_D \left[f(x, y) - g(x, y)\right]\, dx\, dy.$$

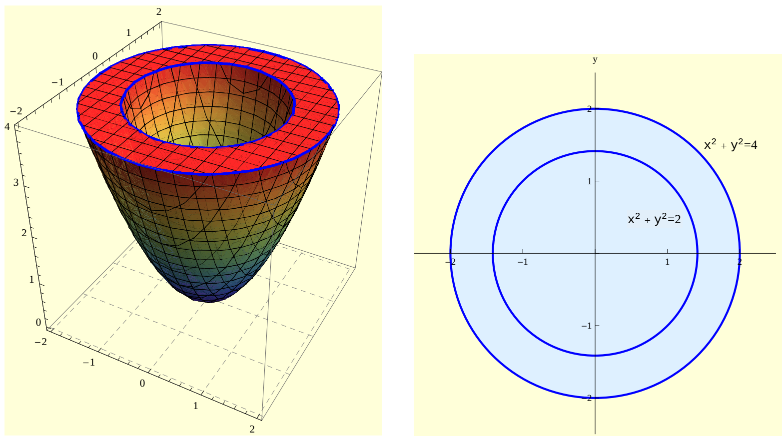
Na Slici 4.8 je prikazano tijelo čiji volumen želimo izračunati i njegova projekcija na xy ravninu.

Uvedimo polarne koordinate

$$x = r\cos\varphi,$$
$$y = r\sin\varphi.$$

Jednadžba kružnice $x^2 + y^2 = 4$ u novim koordinatama glasi $r = 2$, a jednadžba kružnice $x^2 + y^2 = 2$ glasi $r = \sqrt{2}$.

Volumen tijela omeđenog širim paraboloidom ($z = x^2 + y^2$) i ravninom $z = 4$ jednak je



Slika 4.8: Tijelo odredjeno s $z \geq x^2+y^2$, $z \leq 2(x^2+y^2)$ i $z \leq 4$, te njegova projekcija na xy ravninu.

$$
\begin{aligned}
V_1 &= \iint\limits_{V_{xy}} \left(z_{ravnine} - z_{parabole}\right)\, dx\, dy = \iint\limits_{V_{xy}} \left(4 - x^2 - y^2\right)\, dx\, dy = \\
&= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2} \left(4 - r^2\right) r\, dr = \int\limits_0^{2\pi} \left(4\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^2 d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} 4\, d\varphi = \\
&= 4\varphi \Bigg|_0^{2\pi} = 8\pi,
\end{aligned}
$$

a volumen tijela omeđenog užim paraboloidom ($z = 2(x^2 + y^2)$) i ravninom $z = 4$ jednak je

$$
\begin{aligned}
V_2 &= \iint\limits_{V_{xy}} \left[4 - 2\left(x^2 + y^2\right)\right]\, dx\, dy = \\
&= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} \left(4 - 2r^2\right) r\, dr = \int\limits_0^{2\pi} \left(4\frac{r^2}{2} - 2\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2}} d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} 2\, d\varphi = \\
&= 2\varphi \Bigg|_0^{2\pi} = 4\pi,
\end{aligned}
$$

pa je traženi volumen

$$V = V_1 - V_2 = 8\pi - 4\pi = 4\pi.$$

4.8 Površina dijela plohe u prostoru

Odredite površinu onog dijela ravnine $6x+3y+2z-12=0$ koji se nalazi u prvom oktantu projicirajući zadani dio ravnine na yz - ravninu.

Rješenje.

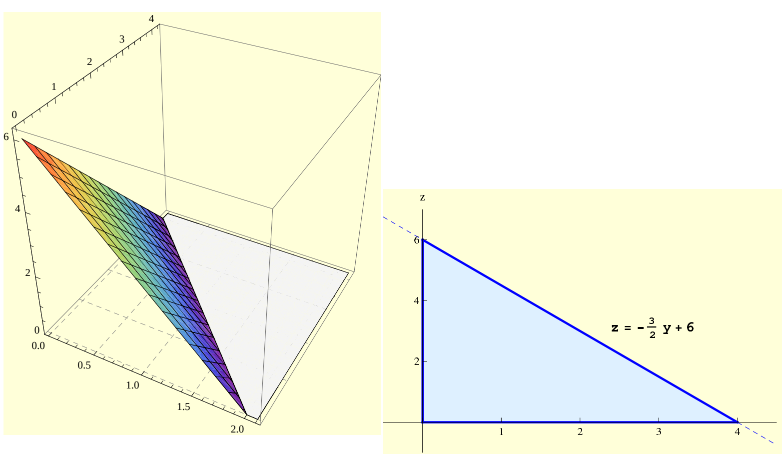
Površina dijela glatke plohe $z=f(x,y)$ iznad ograničenog područja D u xy-ravnini dana je s

$$P = \iint\limits_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy. \tag{4.3}$$

Ako želimo površinu računati preko projekcije na yz ravninu, samo u (4.3) zamijenimo varijable x i z. Odnosno, površina dijela glatke plohe $x=f(y,z)$ iznad ograničenog područja D u yz-ravnini dana je s

$$P = \iint\limits_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\, dy\, dz.$$

Odsječak ravnine $\pi \ldots 6x+3y+2z-12=0$ u prvom oktantu i njegova projekcija na yz ravninu prikazani su na Slici 4.9.



Slika 4.9: Odsječak ravnine $\pi \ldots 6x+3y+2z-12=0$ u prvom oktantu i njegova projekcija na yz ravninu.

Zapišimo najprije jednadžbu ravnine π u obliku $x=f(y,z)$:

$$x = 2 - \frac{1}{2}y - \frac{1}{3}z.$$

Vrijedi

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}=\sqrt{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{7}{6},$$

pa je

$$P=\iint\limits_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,dy\,dz=\int\limits_0^4 dy\int\limits_0^{-\frac{3}{2}y+6}\frac{7}{6}\,dz=$$

$$=\int\limits_0^4\frac{7}{6}z\Bigg|_0^{-\frac{3}{2}y+6}dy=\int\limits_0^4\frac{7}{6}\left[\left(-\frac{3}{2}y+6\right)-0\right]dy=$$

$$=\int\limits_0^4\left(-\frac{7}{4}y+7\right)dy=\left(-\frac{7}{4}\frac{y^2}{2}+7y\right)\Bigg|_0^4=14.$$

4.9 Područje integracije u trostrukom integralu

Postavite granice za integral $I=\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ ako je područje V

a) kugla radijusa 2 sa središtem u ishodištu,

b) unutrašnjost stošca $z^2=x^2+y^2$ uz uvjet $0\leq z\leq 5$.

Rješenje.

a) Jednadžba središnje sfere radijusa 2 (Slika 4.10) glasi

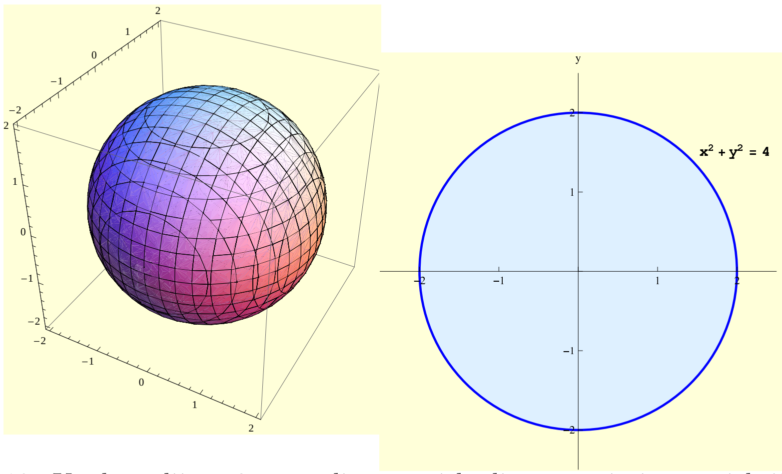
$$x^2+y^2+z^2=4.$$

Rub njene projekcije na xy ravninu je kružnica s jednadžbom

$$x^2+y^2=4,$$

pa je područje integracije zadano s

$$-2\leq x\leq 2,$$
$$-\sqrt{4-x^2}\leq y\leq\sqrt{4-x^2},$$
$$-\sqrt{4-x^2-y^2}\leq z\leq\sqrt{4-x^2-y^2}\},$$



Slika 4.10: Kugla radijusa 2 sa središtem u ishodištu, te njezina projekcija na xy ravninu.

i prema [M2, §4.3] vrijedi

$$I = \iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy \int\limits_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} f(x,y,z)\,dz$$

b) Projekcija stošca na xy ravninu (Slika 4.11) je krug

$$x^2 + y^2 \leq 25,$$

pa vrijedi

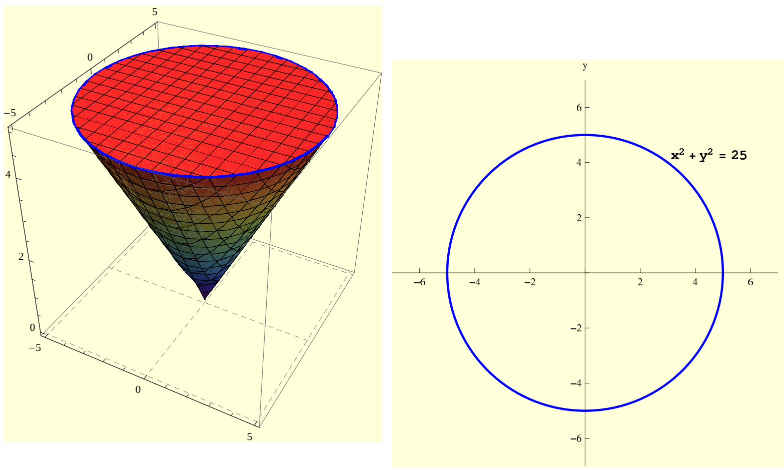
$$I = \iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_{-5}^{5} dx \int\limits_{-\sqrt{25-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} dy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{5} f(x,y,z)\,dz$$

4.10 Neposredna integracija u trostrukom integralu

Izračunajte integral $\iiint\limits_V x^3y^2z\,dx\,dy\,dz$ ako je

$$V \ldots \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x \\ 0 \leq z \leq xy \end{cases}.$$

Rješenje.



Slika 4.11: Stožac odredjen sa $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 5$, i njegova projekcija na xy ravninu.

Trostruki integral neprekidne funkcije računamo slično kao i dvostruki integral [M2, §4.3] :

$$
\begin{aligned}
\iiint\limits_V x^3y^2z\,dx\,dy\,dz &= \iint\limits_{V_{xy}} x^3y^2\,dx\,dy \int\limits_0^{xy} z\,dz = \int\limits_0^1 x^3\,dx \int\limits_0^x y^2\,dy \int\limits_0^{xy} z\,dz = \\
&= \int\limits_0^1 x^3\,dx \int\limits_0^x y^2 \left(\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_0^{xy} dy = \\
&= \int\limits_0^1 x^3\,dx \int\limits_0^x y^2 \left(\frac{x^2y^2}{2} - 0\right) dy = \int\limits_0^1 x^3\,dx \int\limits_0^x \frac{x^2y^4}{2}\,dy = \\
&= \int\limits_0^1 \frac{x^5}{2}\left(\frac{y^5}{5}\right)\Bigg|_0^x dx = \int\limits_0^1 \frac{x^5}{2}\left(\frac{x^5}{5} - 0\right) dx = \\
&= \int\limits_0^1 \frac{x^{10}}{10} dx = \frac{x^{11}}{10 \cdot 11}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{110}\ .
\end{aligned}
$$

4.11 Cilindrične koordinate u trostrukom integralu

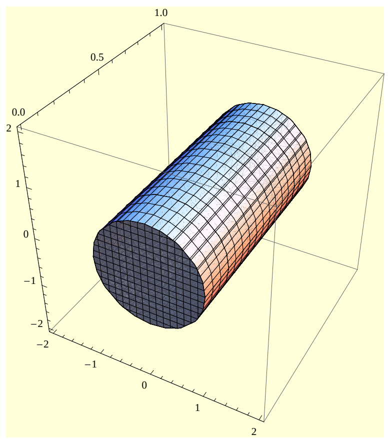
Izračunajte integral

$$\iiint\limits_V \left(x^2 + y + z^2\right)^3\,dx\,dy\,dz$$

ako je $V \ldots \begin{cases} x^2+z^2 \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$.

Rješenje.

Područje integracije V zadanog integrala prikazano je na Slici 4.12.



Slika 4.12: Područje integracije zadano s $x^2+z^2 \le 1$ i $0 \le y \le 1$.

Uvedimo cilindrične koordinate [M2, §4.3.1], ali tako da polarni koordinatni sustav bude u ravnini xz:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi, \\ y &= y, \\ z &= r\sin\varphi. \end{aligned}$$

U novim koordinatama je element volumena jednak

$$dV = r\,dr\,d\varphi\,dz,$$

odnosno, Jakobijan je $J=r$, pa je integral jednak

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_V \left(x^2+y+z^2\right)^3\,dx\,dy\,dz &= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 dr \int\limits_0^1 \left(r^2+y\right)^3\, r\,dy = \\
&= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r\frac{\left(r^2+y\right)^4}{4}\Bigg|_0^1 dr = \\
&= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \left[\frac{1}{4}r\left(r^2+1\right)^4 - \frac{1}{4}r^9\right] dr = \\
&= \int\limits_0^{2\pi} \left[\frac{1}{8}\frac{\left(r^2+1\right)^5}{5} - \frac{1}{4}\frac{r^{10}}{10}\right]\Bigg|_0^1 d\varphi = \\
&= \int\limits_0^{2\pi} \frac{3}{4}\,d\varphi = \frac{3}{4}\varphi\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{2}\ .
\end{aligned}$$

4.12 Sferne koordinate u trostrukom integralu

Izračunajte integral

$$\iiint\limits_V \sqrt{1+(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx\,dy\,dz$$

ako je $V \ldots x^2+y^2+z^2 \leq 1$.

Rješenje.

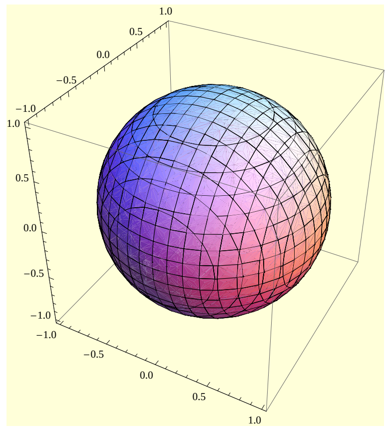
Područje integracije V integrala prikazano je na Slici 4.13.

Prijeđimo na sferne koordinate [M2, §4.3.1],:

$$\begin{aligned}
x &= r\sin\theta\cos\varphi, \\
y &= r\sin\theta\sin\varphi, \\
z &= r\cos\theta.
\end{aligned}$$

Jakobijan je $J = r^2\sin\theta$. Integriramo po cijeloj kugli, pa za nove varijable vrijedi

$$\varphi \in [0, 2\pi]\,, \quad \Theta \in [0, \pi]\,, \quad r \in [0, 1]\,.$$



Slika 4.13: Područje integracije $V \dots x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

i imamo

$$\iiint\limits_V \sqrt{1 + (x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\, dx\, dy\, dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\Theta\, d\Theta \int_0^1 \sqrt{1+r^3} r^2\, dr =$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} 1 + r^3 = t & \begin{array}{c|c|c} r & 0 & 1 \\ \hline t & 1 & 2 \end{array} \\ r^2\, dr = \frac{1}{3}\, dt & \end{array} \right\} =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\Theta\, d\Theta \int_1^2 \frac{1}{3} t^{\frac{1}{2}}\, dt = \text{(sve su varijable separirane)}$$

$$= \varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot (-\cos\Theta) \Big|_0^{\pi} \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right) \Bigg|_1^2 =$$

$$= \frac{2}{9} 2\pi \left(-\cos\pi + \cos 0\right) \left(2\sqrt{2} - 1\right) = \frac{8\pi}{9} \left(2\sqrt{2} - 1\right) .$$

4.13 Volumen tijela

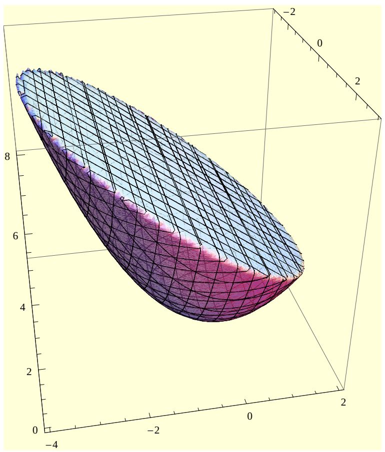
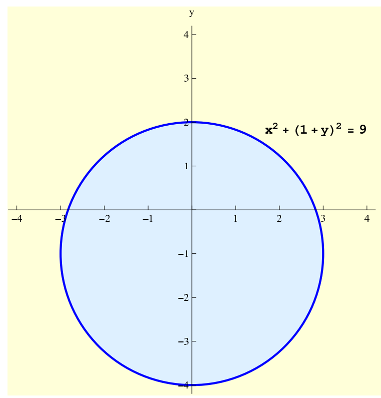
Izračunajte uz pomoć trostrukog integrala volumen tijela omeđenog plohama

a) $2z = x^2 + y^2$ i $y + z = 4$,

b) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ i $z^2 = x^2 + y^2$ izvan stošca.

Rješenje.

a) Tijelo omeđeno paraboloidom $2z = x^2 + y^2$ i ravninom $y + z = 4$ prikazano je na Slici 4.14.

Slika 4.14: Tijelo omedjeno paraboloidom $2z = x^2 + y^2$ i ravninom $y + z = 4$, i njegova projekcija na xy ravninu.

Odredimo njegovu projekciju na xy koordinatnu ravninu. Iz

$$\begin{aligned} z &= -y + 4 \\ 2z &= x^2 + y^2 \end{aligned}$$

izjednačavanjem $z = z$ dobijemo

$$2(-y + 4) = x^2 + y^2,$$

odnosno

$$x^2 + (y + 1)^2 = 9,$$

jednadžbu kružnice polumjera 3 sa središtem $S(0, -1)$. Uvedimo pomaknute cilindrične koordinate

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi, \\ y + 1 &= r\sin\varphi, \\ z &= z. \end{aligned}$$

Vrijedi $J = r$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $r \in [0, 3]$ i

$$\begin{aligned} &\frac{x^2 + y^2}{2} \le z \le 4 - y \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow \frac{r^2\cos^2\varphi + (-1 + r\sin\varphi)^2}{2} \le z \le 4 - (-1 + r\sin\varphi) \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow \frac{r^2\cos^2\varphi + 1 - 2r\sin\varphi + r^2\sin^2\varphi}{2} \le z \le 5 - r\sin\varphi \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow \frac{r^2 + 1 - 2r\sin\varphi}{2} \le z \le 5 - r\sin\varphi \end{aligned}$$

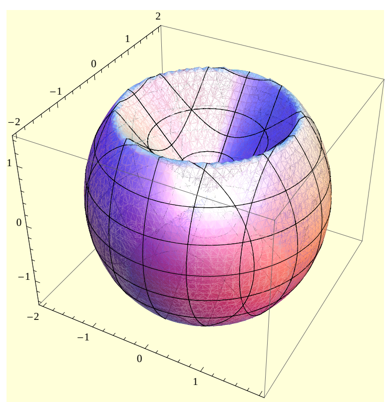
Volumen je jednak

$$V = \iiint\limits_V dx\,dy\,dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^3 r\,dr \int\limits_{\frac{r^2+1-2r\sin\varphi}{2}}^{5-r\sin\varphi} dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^3 r\,z \Big|_{\frac{r^2+1-2r\sin\varphi}{2}}^{5-r\sin\varphi} dr =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^3 r\left(5 - r\sin\varphi - \frac{r^2}{2} - \frac{1}{2} + r\sin\varphi\right) dr = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^3 \left(\frac{9}{2}r - \frac{1}{2}r^3\right) dr =$$

$$= \varphi\Big|_0^{2\pi} \left(\frac{9r^2}{4} - \frac{r^4}{8}\right)\Big|_0^3 = 2\pi\left(\frac{81}{4} - \frac{81}{8} - 0\right) = \frac{81\pi}{4}.$$

b) Tijelo omeđeno zadanim stošcem i sferom za $a = 4$ je prikazano na Slici 4.15.



Slika 4.15: Tijelo omedjeno sferom $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ i stošcem $z^2 = x^2 + y^2$ (izvan stošca).

Uvedimo sferne koordinate

$$\begin{aligned} x &= r\sin\Theta\cos\varphi, \\ y &= r\sin\Theta\sin\varphi, \\ z &= r\cos\Theta. \end{aligned}$$

Vrijedi $J = r^2\sin\Theta$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, i $r \in [0, a]$. Presjek stošca $z^2 = x^2 + y^2$ i ravnine $x = 0$ (yz koordinatne ravnine) čine pravci $z = -y$ i $z = y$, pa je

$\Theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$. Volumen je

$$V = \iiint\limits_V dx\,dy\,dz = \iiint\limits_V r^2 \sin\Theta\,dr\,d\varphi\,d\Theta = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin\Theta\,d\Theta \int\limits_0^a r^2\,dr =$$

$$= \varphi \Big|_0^{2\pi} (-\cos\Theta) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left(\frac{r^3}{3}\right) \Big|_0^a = 2\pi \left(-\cos\frac{3\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\right) \frac{a^3}{3} = \frac{2\pi\sqrt{2}}{3} a^3.$$

4.14 Koordinate težišta homogenog tijela

Izračunajte koordinate težišta homogenog stošca čija je visina h i radijus baze R.

Rješenje.

Odredimo najprije jednadžbu stošca. Opća jednadžba centralnog stošca je $x^2 + y^2 = az^2$. Iz $z = h$ i $x^2 + y^2 = R^2$ dobijemo $ah^2 = R^2$, odnosno $a = \left(\frac{R}{h}\right)^2$. Prema tome, jednadžba zadanog stošca je

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{R}{h}\right)^2 z^2.$$

Prema [M2, §4.5], koordinate težišta su dane sa

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m}, \qquad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m}, \qquad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m},$$

gdje su M_{yz}, M_{xz} i M_{xy} momenti stošca oko koordinatnih ravnina. Zbog simetrije težište leži na osi z, pa je $\bar{x} = 0$ i $\bar{y} = 0$.

Stožac ima konstantnu gustoću, što znači da je njegova masa jednaka umnošku gustoće i volumena

$$m = \iiint\limits_V \rho dV = \rho \iiint\limits_V dV = \rho \frac{hR^2\pi}{3},$$

a moment oko koordinatne ravnine xy

$$M_{xy} = \iiint\limits_V z\rho\,dV = \rho \iiint\limits_V z\,dV.$$

Prema tome je

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{\rho \iiint\limits_V z\,dV}{\rho \iiint\limits_V dV} = \frac{\iiint\limits_V z\,dV}{\iiint\limits_V dV}.$$

Uvedimo cilindrične koordinate

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi, \\ y &= r\sin\varphi, \\ z &= z. \end{aligned}$$

Vrijedi

$$\begin{aligned} \iiint\limits_V z\,dV &= \iint\limits_{V_{xy}} dx\,dy \int\limits_{\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}}^{h} z\,dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R r\,dr \int\limits_{\frac{h}{R}r}^{h} z\,dz = \\ &= \varphi\Big|_0^{2\pi} \int\limits_0^R r\left(\frac{z^2}{2}\right)\Big|_{\frac{h}{R}r}^{h} dr = 2\pi \int\limits_0^R r\left(\frac{h^2}{2} - \frac{h^2r^2}{2R^2}\right) dr = \\ &= \pi h^2 \int\limits_0^R \left(r - \frac{r^3}{R^2}\right) dr = \pi h^2\left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2}\right)\Big|_0^R = \\ &= \pi h^2\left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{4R^2} - 0\right) = \frac{h^2R^2\pi}{4}. \end{aligned}$$

Dakle,

$$\bar{z} = \frac{\frac{h^2R^2\pi}{4}}{\frac{hR^2\pi}{3}} = \frac{3h}{4},$$

odnosno, koordinate težišta su

$$T\left(0, 0, \frac{3h}{4}\right).$$

4.15 Zadaci za vježbu

1. Nacrtajte područje integracije i promijenite redoslijed integriranja u integralu $I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{2x} f(x,y)\,dy.$

2. Nacrtajte područje integracije i izračunajte vrijednost integrala $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos y\,dy.$

3. Izračunajte $\iint\limits_S y^2 \sin x\,dx\,dy$ ako je $S = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 < x < \pi, 0 < y < 1 + \cos x\right\}.$

4. Izrazite integral $I = \iint\limits_S \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}\, dx\, dy$ u polarnim koordinatama pa ga izračunajte uz grafički prikaz područja integracije ako je S dio ravnine što ga omeđuju kružnice $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 9$ i pravci $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ i $y = \sqrt{3}x$.

5. Izračunajte $\iint\limits_S \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}}\, dx\, dy$ ako je $S = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}$.

6. Odredite volumen tetraedra omeđenog ravninama $x + 2y + z = 2$, $x = 2y$, $x = 0$ i $z = 0$.

7. Izračunajte volumen tijela određenog nejednadžbama $z \leq x^2 + y^2$, $y \geq x^2$, $y \leq 1$, $z \geq 0$.

8. Odredite površinu lika koji je omeđen kružnicama $x^2 + y^2 = 2x$ i $x^2 + y^2 = 4x$ i pravcima $y = x$ i $y = 0$.

9. Odredite površinu onog dijela ravnine $6x + 3y + 2z - 12 = 0$ koji se nalazi u prvom oktantu projicirajući zadani dio ravnine na

   a) xy - ravninu,

   b) xz - ravninu.

10. Odredite površinu onog dijela plašta kružnog stošca $x^2 + y^2 = z^2$ koji leži iznad ravnine xy a odsjeca ga ravnina $z = \sqrt{2}\left(\frac{x}{2} + 1\right)$.

11. Izračunajte integral $\iiint\limits_V \dfrac{dx\, dy\, dz}{(1 + x + y + z)^3}$ ako je područje V omeđeno ravninama: $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$.

12. Izračunajte integral $\iiint\limits_V (x + y + z)\, dx\, dy\, dz$ ako je područje V omeđeno ravninama: $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 1$.

13. Izračunajte integral $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy\, dz$ ako je
$$V \ldots \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 2x \\ 0 \leq y \\ 0 \leq z \leq a \end{cases}.$$

14. Izračunajte pomoću trostrukog integrala volumen tijela omeđenog plohama

   a) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ i $x^2 + y^2 = 3z$ unutar paraboloida.

   b) $(x - 1)^2 + y^2 = z$ i $2x + z = 2$.

15. Izračunajte volumen tijela omeđenog plohama

a) $z = 4 - y^2$, $z = 2 + y^2$, $x = -1$ i $x = 2$,

b) $z = x^2 + y^2$ i $z = x + y$,

c) $y = \frac{2}{3}x, z = 0$ i $z = -\frac{x}{3} + 3$, $y = \frac{x}{3}$ i $x = 3$.

d) $(z-1)^2 + y^2 = x$ i $x + 2z = 2$.

16. Izračunajte volumen kugle radijusa R.

17. Izračunajte koordinate težišta homogenog tijela omeđenog plohama $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ i $x^2 + y^2 = z^2$ unutar stošca.

4.16 Rješenja zadataka za vježbu

1. $I = \int\limits_0^2 dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^1 f(x,y)\,dx.$

2. $I = 1.$

3. $I = \frac{4}{3}.$

4. $I = \frac{\pi^2}{6}.$

5. $I = \frac{2}{3}ab\pi.$

6. $V = \frac{1}{3}.$

7. $V = \frac{88}{105}.$

8. $P = 3\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right).$

9. $P = 14.$

10. $P = 8\pi.$

11. $I = -\frac{5}{16} + \frac{1}{2}\ln 2$

12. $I = \frac{3}{2}$

13. $I = \frac{8}{9}a^2$

14. $I = \frac{3\pi}{2}$

15. a) $V = \dfrac{19\pi}{6}$

    b) $V = \dfrac{\pi}{2}$

16. a) $V = 8$

    b) $V = \dfrac{\pi}{8}$

    c) $V = \dfrac{7}{2}$

    d) $V = \dfrac{\pi}{2}$

17. $V = \dfrac{4\pi}{3} R^3$

18. $T(0, 0, \frac{7}{6})$

5.

DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE

5.1 Uvod

(a) Provjerite da li je $\varphi(x) = e^{\sqrt{1-x^2}}$ rješenje diferencijalne jednadžbe $xy + \sqrt{1-x^2} \cdot y' = 0$.

(b) Pokažite da je svaki član familije krivulja $y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$ rješenje diferencijalne jednadžbe $y' = xy$, te odredite ono rješenje koje zadovoljava početni uvjet $y(1) = 2$.

(c) Odredite diferencijalnu jednadžbu čije je rješenje familija krivulja $y = Cx+C^2$.

(d) Odredite krivulju iz familije krivulja $y = C_1e^x - 2C_2e^{-2x}$ za koju je $y(0) = 1$ i $y'(0) = -2$.

Rješenje.

(a) Provjeru vršimo uvrštavanjem $\varphi(x)$ u zadanu diferencijalnu jednadžbu. Prvo računamo derivaciju od $\varphi(x)$

$$\varphi'(x) = e^{\sqrt{1-x^2}}\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-xe^{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Uvrštavanjem dobivamo

$$\begin{aligned} x \cdot e^{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2}\frac{-xe^{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-x^2}} &= 0 \\ x \cdot e^{\sqrt{1-x^2}} - xe^{\sqrt{1-x^2}} &= 0 \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

Dakle, $\varphi(x)$ jest rješenje diferencijalne jednad žbe $xy + \sqrt{1-x^2} \cdot y' = 0$.

(b) Uvrštavanjem $Ce^{\frac{x^2}{2}}$ u zadanu diferencijalnu jednadžbu $y' = xy$, dobivamo

$$Ce^{\frac{x^2}{2}}x = xCe^{\frac{x^2}{2}},$$

pa $Ce^{\frac{x^2}{2}}$ jest rješenje diferencijalne jednadžbe $y' = xy$. Preostaje još pronaći ono rješ enje koje zadovoljava početni uvjet $y(1) = 2$.

$$\begin{aligned} y(1) = 2 \Rightarrow 2 &= Ce^{\frac{1}{2}} \\ C &= 2e^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Traženo partikularno rješenje dobije se uvrštavanjem dobivene konstante C u opće rješenje.

$$\begin{aligned} y &= Ce^{\frac{x^2}{2}}, C = 2e^{-\frac{1}{2}} \\ y &= 2e^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{x^2}{2}} = 2e^{\frac{1}{2}\left(x^2-1\right)}. \end{aligned}$$

(c) Zadanu familiju krivulja prvo deriviramo s ciljem eliminiranja konstante C.

$$\begin{aligned} y &= Cx + C^2 \\ y' &= C, \end{aligned}$$

pa uvrštavanjem u zadanu diferencijalnu jednadžbu dobivamo

$$y = xy' + (y')^2.$$

(d) Vrijedi

$$y = C_1 e^x - 2C_2 e^{-2x}$$
$$y' = C_1 e^x + 4C_2 e^{-2x}.$$

Uvrštavanjem početnih uvjeta dobivamo

$$y(0) = 1 \Rightarrow 1 = C_1 e^0 - 2C_2 e^{-2\cdot 0}$$
$$y'(0) = -2 \Rightarrow -2 = C_1 e^0 + 4C_2 e^{-2\cdot 0}.$$

Rješenje sustava

$$1 = C_1 - 2C_2$$
$$-2 = C_1 + 4C_2.$$

je $C_1 = 0$ i $C_2 = -\frac{1}{2}$, pa se tra žena krivulja dobije uvrštavanjem tih konstanti u zadanu familiju krivulja

$$y = -2\left(-\frac{1}{2}\right) e^{-2x} \Rightarrow y = e^{-2x}.$$

5.2 Populacijska jednadžba

Kultura bakterija u početku ima 1000 bakterija. Stopa rasta proporcionalna je broju bakterija. Nakon 2 sata populacija je narasla na 9000 jedinki. Odredite izraz koji daje broj bakterija nakon t sati. Odredite broj bakterija nakon 10 sati.

Rješenje.

Zadani uvjeti su slijedeći:

$$P(0) = 1000$$
$$P(2) = 9000$$

želimo izračunati $P(t)$, a zatim i $P(10)$ koristeći formulu za populacijsku jednadžbu [M2, §5.1].

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

integriranjem dobivamo

$$P(t) = Ae^{kt} \tag{5.1}$$

Iz uvjeta za početnu populaciju slijedi

$$P(0) = A = 1000 \Rightarrow P(t) = 1000 \cdot e^{kt}.$$

Iz veličine populacije nakon dva sata slijedi

$$9000 = 1000 \cdot e^{2k},$$

pa je

$$k = \frac{1}{2}\ln 9 = \ln 3.$$

Uvrštavanjem u (5.1) dobivamo

$$P(t) = 1000 \cdot e^{t \ln 3}$$

Nakon 10 sati broj bakterija bit će

$$\begin{aligned} P(10) &= 1000 \cdot e^{10 \ln 3} \\ P(10) &= 59049000. \end{aligned}$$

5.3 Logistička jednadžba

Vijesti se šire gradom tako da je brzina širenja vijest proporcionalna produktu dijela stanovništva y koji su čuli vijest i dijela stanovništva koji nisu čuli vijest. Gradić ima 1000 stanovnika. U 8 sati, vijest je čulo 80 ljudi, a do podne ju je čulo pola grada.

(a) Napišite diferencijalnu jednadžbu koju y zadovoljava i rije šite je.

(b) U kojem će trenutku 90% stanovništva znati vijest?

Rješenje.

(a) Vrijedi

$$y' = ky\,(1000 - y)\,,$$

pa je

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y\,(1000-y)} &= k\,dt \\ \frac{1}{1000}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{1000-y}\right) dy &= k\,dt. \end{aligned}$$

Integriranjem dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{1000}\ln\frac{y}{1000-y} &= kt + \ln C \\ \ln\frac{y}{1000-y} &= 1000kt + 1000\ln C \\ \frac{y}{1000-y} &= Ae^{1000kt}. \end{aligned}$$

(b) Zadano je

$$y(0) = 80$$
$$y(4) = 500$$
$$y(t_0) = 900.$$

želimo izračunati t_0. Iz rješenja pod (a) slijedi

$$\frac{80}{1000-80} = A \Rightarrow A = 0.08696$$

i

$$\frac{500}{1000-500} = 0.08696e^{400k} \Rightarrow k = 0.00061,$$

pa je

$$\frac{y}{1000-y} = 0.08696e^{0.61t_0}.$$

Ako uvrstimo $y(t_0) = 900$ dobivamo

$$\frac{900}{1000-900} = 0.08696e^{0.61t_0}$$

iz čega je

$$t_0 = \frac{\ln \frac{9}{0.08696}}{0.61} = 7.6.$$

Dakle u 8 sati + 7.6, odnosno u 15 sati i 36 minuta 900 ljudi će znati vijest.

5.4 Jednadžbe sa separiranim varijablama

(a) Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe $x + xy + y'(y + xy) = 0$.

(b) Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe $\left(1+x^2\right)y' + y\sqrt{1+x^2} = xy$, te partikularno rješenje koje zadovoljava početni uvjet $y(0) = 1$.

Rješenje.

(a) Uvrštavanjem $y' = \dfrac{dy}{dx}$ u zadanu diferencijalnu jednadžbu dobivamo

$$\frac{x}{1+x}\,dx = -\frac{y}{1+y}dy$$

Ovo je diferencijalna jednadžba separiranih varijabli [M2, §5.2] , pa je rješavamo integriranjem:

$$\int \frac{x}{1+x}\,dx = -\int \frac{y}{1+y}dy$$
$$\int \frac{x+1-1}{1+x}\,dx = -\int \frac{y+1-1}{1+y}dy$$
$$\int dx - \int \frac{1}{1+x}\,dx = -\int dy + \int \frac{1}{1+y}dy$$
$$x - \ln|x+1| = -y + \ln|y+1| + C$$

Sređivanjem dobivamo

$$\begin{aligned} x+y-(\ln|x+1|+\ln|y+1|)+\ln C &= 0 \\ x+y-\ln C\,(x+1)\,(y+1) &= 0. \end{aligned}$$

(b) Uvrštavanjem $y' = \dfrac{dy}{dx}$ u zadanu diferencijalnu jednadžbu dobivamo

$$\begin{aligned} \left(1+x^2\right)\frac{dy}{dx} &= xy - y\sqrt{1+x^2} \\ \left(1+x^2\right)dy &= y\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)dx \\ \frac{dy}{y} &= \frac{x-\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}\,dx \\ \int\frac{dy}{y} &= \int\frac{x-\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}\,dx \\ \int\frac{dy}{y} &= \int\frac{x}{1+x^2}\,dx - \int\frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}\,dx \\ \ln|y| &= \frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2+1\right)}{1+x^2} - \int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \\ \ln|y| &= \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) - \ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right| + \ln C \end{aligned}$$

Vrijedi

$$\begin{aligned} \ln|y| - \ln\sqrt{1+x^2} + \ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right| + \ln C &= 0 \\ \ln\frac{Cy\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{1+x^2}} &= 0 \\ \frac{Cy\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{1+x^2}} &= e^0 \\ Cy\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) &= \sqrt{1+x^2}. \end{aligned}$$

Za početni uvjet $y(0) = 1$ dobivamo

$$C\left(0+\sqrt{0^2+1}\right) = \sqrt{1+0^2},$$

iz čega slijedi $C = 1$, odnosno partikularno rješenje za ovaj početni uvjet je

$$y\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) = \sqrt{1+x^2}.$$

5.5 Homogene diferencijalne jednadžbe

Odredite opće rješenje diferencijalnih jednadžbi

(a) $yy' = y - x$.

(b) $\left(1 + e^{\frac{x}{y}}\right) dx + e^{\frac{x}{y}} \left(1 - \frac{x}{y}\right) dy = 0$.

Rješenje.

(a) Uvrštavanjem $y' = \frac{dy}{dx}$ u zadanu diferencijalnu jednadžbu dobivamo

$$ydy = (y - x)\ dx,$$

odnosno

$$(y - x)\ dx - ydy = 0 \tag{5.2}$$

Ovo je homogena diferencijalna jednadžba 1. stupnja homogenosti, pa je rješavamo supstitucijom:

$$\begin{aligned} \frac{y}{x} &= z \\ y &= xz \\ y' &= z + xz' \end{aligned}$$

Uvrštavanjem u (5.2) dobivamo

$$\begin{aligned} (xz - x) - xz\,(z + xz') &= 0 \,/ : x \\ z - 1 &= z\,(z + xz') \\ z - 1 - z^2 &= xz' \cdot z \\ xz\frac{dz}{dx} &= z - 1 - z^2 \\ \frac{zdz}{z - 1 - z^2} &= \frac{dx}{x} \\ \frac{zdz}{z^2 - z + 1} &= -\frac{dx}{x}. \end{aligned}$$

Ovo je diferencijalna jednadžba separiranih varijabli, pa vrijedi

$$\begin{aligned} \int \frac{zdz}{z^2 - z + 1} &= -\int \frac{dx}{x} \\ \int \frac{\frac{1}{2} d\left(z^2 - z + 1\right) + \frac{1}{2}}{z^2 - z + 1} &= -\ln|x| + C \\ \frac{1}{2}\int \frac{d\left(z^2 - z + 1\right)}{z^2 - z + 1} + \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^2 - z + 1} &= -\ln|x| + C \\ \frac{1}{2}\ln\left|z^2 - z + 1\right| + \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{z - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} &= -\ln|x| + C \\ \ln\sqrt{z^2 - z + 1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2z - 1}{\sqrt{3}} &= -\ln|x| + C. \end{aligned}$$

Vraćanjem u susptituciju $\frac{y}{x} = z$ dobivamo

$$\begin{aligned}
\ln\sqrt{\frac{y}{x}^2 - \frac{y}{x} + 1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\frac{y}{x} - 1}{\sqrt{3}} &= -\ln|x| + C \\
\ln\sqrt{y^2 - xy + x^2} - \ln|x| + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2y - x}{x\sqrt{3}} &= -\ln|x| + C \\
\ln\sqrt{y^2 - xy + x^2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2y - x}{x\sqrt{3}} &= C \\
\ln C\sqrt{y^2 - xy + x^2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2y - x}{x\sqrt{3}} &= 0.
\end{aligned}$$

(b) Ovo je homogena diferencijalna jednadžba stupnja homogenosti 0, pa je rješavamo supstitucijom:

$$\begin{aligned}
\frac{x}{y} &= z \\
x &= yz \\
\frac{dx}{dy} &= x' = z + yz'
\end{aligned}$$

Uvrštavanjem u zadanu diferencijalnu jednadžbu dobivamo

$$\begin{aligned}
(1 + e^z)(z'y + z) + e^z(1 - z) &= 0 \\
z'y + z + yz'e^z + ze^z + e^z - ze^z &= 0 \\
z'y(1 + e^z) &= -z - e^z \\
y(1 + e^z)\frac{dz}{dy} &= -z - e^z \\
y(1 + e^z)\,dz &= (-z - e^z)\,dy \\
-\frac{1 + e^z}{e^z + z}dz &= \frac{dy}{y}.
\end{aligned}$$

Ovo je diferencijalna jednadžba separiranih varijabli, pa vrijedi

$$\begin{aligned}
-\int\frac{d(e^z + z)}{e^z + z} &= \int\frac{dy}{y} \\
-\ln|e^z + z| &= \ln|y| + C \\
\frac{1}{|e^z + z|} &= Cy \\
e^z + z &= \frac{1}{Cy}.
\end{aligned}$$

Vraćanjem u susptituciju $\frac{x}{y} = z$ dobivamo

$$e^{\frac{x}{y}} + \frac{x}{y} = \frac{1}{Cy}.$$

5.6 Diferencijalne jednadžbe koje se svode na homogene

Odredite opće rješenje diferencijalnih jednadžbi

(a) $(3y - 7x + 7)\,dx - (3x - 7y - 3)\,dy = 0$,

(b) $y' = \dfrac{2x + y - 1}{4x + 2y + 5}$.

Rješenje.

(a) Zadanu diferencijalnu jednadžbu možemo pisati kao

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-7x + 3y + 7}{3x - 7y - 3}. \tag{5.3}$$

Tražimo sjecište pravaca:

$$\begin{aligned} -7\alpha + 3\beta + 7 &= 0 \\ 3\alpha - 7\beta - 3 &= 0. \end{aligned}$$

Rješavanjem sustava dobije se $\alpha = 1, \beta = 0$, pa zadanu diferencijalnu jednadžbu rješavamo supstitucijom

$$\begin{aligned} x &= X + 1 \\ y &= Y. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem u (5.3) dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dx} &= \frac{-7X + 3Y - 7 + 7}{3X - 7Y + 3 - 3} \\ \frac{dY}{dx} &= \frac{-7X + 3Y}{3X - 7Y}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Ovo je homogena diferencijalna jednadžba, pa je rješavamo supstitucijom:

$$\begin{aligned} \frac{Y}{X} &= z \\ Y &= Xz \\ Y' &= z + Xz' \end{aligned}$$

Uvrštavanjem u (5.4) dobivamo

$$\begin{aligned} z'X + z &= \frac{-7 + 3z}{3 - 7z} \\ \frac{dz}{dX}X &= \frac{-7 + 3z - 3z + 7z^2}{3 - 7z} \\ \frac{-7z + 3}{7\,(z^2 - 1)}dz &= \frac{dX}{X}. \end{aligned}$$

Ovo je diferencijalna jednadžba separiranih varijabli, pa je rješ avamo integriranjem

$$\begin{aligned}\int \frac{-7z+3}{7\left(z^2-1\right)}dz &= \int \frac{dX}{X}\\ -\int \frac{z}{z^2-1}dz+\frac{3}{7}\int \frac{dz}{z^2-1} &= \int \frac{dX}{X}\\ -\frac{1}{2}\ln\left(z^2-1\right)+\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{2}\ln\frac{z-1}{z+1} &= \ln CX.\end{aligned}$$

Sređivanjem dobivamo

$$\begin{aligned}CX &= \left[\left(z^2-1\right)^{-7}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3\right]^{\frac{1}{14}}\\ CX &= \left[(z-1)^{-4}(z+1)^{-10}\right]^{\frac{1}{14}}\\ CX &= \left[(z-1)^{-2}(z+1)^{-5}\right]^{\frac{1}{7}}\end{aligned}$$

Vraćanjem u susptituciju $z=\frac{Y}{X}=\frac{y}{x-1}$ dobivamo

$$C(x-1)=\left[\left(\frac{y}{x-1}-1\right)^{-2}\left(\frac{y}{x-1}+1\right)^{-5}\right]^{\frac{1}{7}},$$

odnosno

$$(y-x+1)^2(y+x-1)^5=C.$$

(b) Pravci

$$\begin{aligned}2x+y-1&=0\\ 4x+2y+5&=0\end{aligned}$$

su paralelni $\left(\frac{4}{2}=\frac{2}{1}=2\right)$ pa koristimo supstituciju

$$\begin{aligned}z&=2x+y\\ z'&=2+y'\\ y'&=z'-2.\end{aligned}$$

Uvrštavanjem u zadanu diferencijalnu jednadžbu dobivamo

$$\begin{aligned}z'-2&=\frac{z-1}{2z+5}\\ z'&=\frac{z-1+4z+10}{2z+5}\\ \frac{dz}{dx}&=\frac{5z+9}{2z+5}\\ \frac{2z+5}{5z+9}dz&=dx.\end{aligned}$$

Ovo je diferencijalna jednadžba separiranih varijabli, pa vrijedi

$$\int \frac{2z+5}{5z+9} dz = \int dx$$

$$\frac{2}{5} z + \frac{7}{25} \ln (5z+9) = x + C$$

Vraćanjem u susptituciju $z = 2x + y$ dobivamo

$$\frac{2}{5} (2x+y) + \frac{7}{25} \ln (10x + 5y + 9) = x + C.$$

5.7 Egzaktne diferencijalne jednadžbe i integrirajući faktor

(a) Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y' = -\dfrac{\sin y}{x \cos y}$.

(b) Riješite egzaktnu diferencijalnu jednadžbu $\left(2xy + x^2 y + \dfrac{y^3}{3}\right) dx + \left(x^2 + y^2\right) dy = 0$, ako je $\lambda = \lambda(x)$.

(c) Riješite egzaktnu diferencijalnu jednadžbu $y(1+xy)\, dx - xdy = 0$, ako je $\lambda = \lambda(y)$.

Rješenje.

(a) Zadanu diferencijalnu jednadžbu možemo zapisati u obliku

$$\sin y\, dx + x \cos y dy = 0.$$

Ovo je egzaktna diferencijalna jednadžba [M2, §5.7] jer vrijedi

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \cos y = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Rješenje zadane diferencijalne jednadžbe dobije se rješavanjem integrala

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y)\, dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\, dy = C$$

Za početnu točku (x_0, y_0) uzmimo npr. točku $(0,0)$, pa vrijedi

$$\int_0^x \sin y\, dx + \int_0^y 0 \cdot \cos y dy = C$$

$$x \sin y \Big|_0^x + 0 = C$$

$$x \sin y = C,$$

i to je rješenje zadane diferencijalne jednadžbe.

(b) Kako je $\lambda = \lambda(x)$ računamo ga po formuli za inetgrirajući faktor [M2, §5.7], pa je

$$\lambda(x) = \pm e^{\int \frac{2x+x^2+y^2-2x}{x^2+y^2}} = \pm e^{\int dx} = \pm e^x.$$

Rješenje dobivamo inetgriranjem

$$\int\limits_{x_0}^{x} \left(2xy_0 + x^2 y_0 + \frac{y_0^3}{3}\right) e^x \, dx + \int\limits_{y_0}^{y} \left(x^2 + y^2\right) e^x dy = C$$

za npr. početnu točku $(0,0)$ je

$$\begin{aligned}
\int\limits_{0}^{x} \left(2x \cdot 0 + x^2 \cdot 0 + \frac{0^3}{3}\right) e^x \, dx + \int\limits_{0}^{y} \left(x^2 + y^2\right) e^x dy &= C \\
0 + x^2 e^x \int\limits_{0}^{y} dy + e^x \int\limits_{0}^{y} y^2 dy &= C \\
x^2 e^x y \Big|_0^y + e^x \frac{y^3}{3}\Big|_0^y &= C \\
x^2 e^x y + e^x \frac{y^3}{3} &= C \\
e^x \left(x^2 y + \frac{y^3}{3}\right) &= C
\end{aligned}$$

(c) Kako je $\lambda = \lambda(y)$ rač unamo ga po formuli za inetgrirajući faktor [M2, §5.7], pa je

$$\lambda(x) = \pm e^{\int \frac{1+2xy+1}{-y(1+xy)}} = \pm e^{-\int \frac{2}{y}\, dx} = \pm e^{-2\ln|y|} = \pm \frac{1}{y^2}$$

i rješenje dobivamo integriranjem

$$\int\limits_{x_0}^{x} \frac{1+xy}{y} \, dx - \int\limits_{y_0}^{y} \frac{x_0}{y^2} dy = C$$

za npr. početnu točku $(0,1)$

$$\begin{aligned}
\int\limits_{0}^{x} \frac{1+xy}{y} \, dx - \int\limits_{1}^{y} \frac{0}{y^2} dy &= C \\
\frac{x}{y}\Big|_0^x + \frac{x^2}{2}\Big|_0^x &= C \\
\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} &= C.
\end{aligned}$$

5.8 Ortogonalne trajektorije

Odredite ortogonalne trajektorije familije elipsa $x^2 + y^2 = a^2$.

Rješenje.

Derivirajnem dobivamo

$$\begin{aligned} 2x + 4yy' &= 0 \\ x + 2yy' &= 0 \end{aligned}$$

Diferencijalna jednadžba ortogonalnih trajektorija zadane familije elipsa dobije se uvrštavanjem $-\dfrac{1}{y'}$ umjesto y'.

$$\begin{aligned} x + 2y\left(-\frac{1}{y'}\right) &= 0 \\ x &= \frac{2y}{y'} \\ y' &= \frac{2y}{x} \end{aligned}$$

Ovo je diferencijalna jednadžba separiranih varijabli, pa vrijedi

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{2y}{x} \\ \int \frac{dy}{y} &= \int \frac{2\,dx}{x} \\ \ln y &= 2\ln x + C \\ y &= Cx^2 \end{aligned}$$

Dakle, rješenje je familija parabola $y = Cx^2$.

5.9 Singularna rješenja

Odredite singularna rješenja diferencijalnih jednadžbi

(a) $2y\,(y' + 2) - x\,(y')^2 = 0$.

(b) $(y')^2\,(2 - 3y)^2 = 4\,(1 - y)$.

Rješenje.

(a) Deriviranjem zadane diferencijalne jednadžbe po y' dobivamo

$$2y - 2xy' = 0.$$

Da bi dobili potencijalna singularna rješenja zadane diferencijalne jednadžbe rješavamo sustav:

$$\begin{aligned} 2y\left(y'+2\right)-x\left(y'\right)^2&=0\\ 2y-2xy'&=0. \end{aligned}$$

Iz druge jednadžbe slijedi

$$y'=\frac{y}{x},$$

pa uvrštavanjem u prvu dobivamo

$$\begin{aligned} 2y\left(\frac{y}{x}+2\right)-x\left(\frac{y}{x}\right)^2&=0\\ \frac{2y^2}{x}+4y-\frac{y^2}{x}&=0\\ \frac{y^2}{x}+4y&=0\\ y^2+4xy&=0. \end{aligned}$$

Rješenja ove jednadžbe su

$$y_1=0, y_2=-4x$$

Da bi to bila singularna rješenja zadane diferencijalne jednadžbe nužno je i dovoljno je da je zadovoljavaju, pa ćemo to i provjeriti:
Za $y_1=0$ je

$$\begin{aligned} 2y\left(y'+2\right)-x\left(y'\right)^2&=0\\ 0&=0, \end{aligned}$$

pa $y_1=0$ jest singularno rješenje.
Za $y_2=-4x$ je

$$\begin{aligned} 2y\left(y'+2\right)-x\left(y'\right)^2&=0\\ -8x\left(-4+2\right)-16x&=0\\ 0&=0, \end{aligned}$$

pa je i $y_2=-4x$ singularno rješenje zadane diferencijalne jednadžbe.

(b) Deriviranjem zadane diferencijalne jednadžbe po y' dobivamo

$$2y\left(2-3y\right)^2=0.$$

Rješavamo sustav:

$$\begin{aligned} \left(y'\right)^2\left(2-3y\right)^2&=4\left(1-y\right)\\ 2y'\left(2-3y\right)^2&=0. \end{aligned}$$

Iz prve jednadžbe slijedi
$$y' = \frac{2\sqrt{1-y}}{2-3y},$$
pa uvrštavanjem u drugu dobivamo
$$2\frac{2\sqrt{1-y}}{2-3y}(2-3y)^2 = 0$$
$$\sqrt{1-y}\,(2-3y) = 0$$
Rješenja ove jednadžbe su
$$y_1 = 1, y_2 = \frac{2}{3}.$$
Provjerimo da li ova rješenja zadovoljavaju početnu diferencijalnu jednadžbu.
Za $y_1 = 1$ je
$$(y')^2(2-3y)^2 = 4(1-y)$$
$$0 = 0,$$
pa $y_1 = 1$ jest singularno rješenje.
Za $y_2 = \frac{2}{3}$ je
$$(y')^2(2-3y)^2 = 4(1-y)$$
$$(0)^2\left(2-3\frac{2}{3}\right)^2 = 4\left(1-\frac{2}{3}\right)$$
$$0 = \frac{4}{3},$$
pa $y_2 = \frac{2}{3}$ nije singularno rješenje zadane diferencijalne jednadžbe.

5.10 Linearne diferencijalne jednadžbe prvog reda

Odredite opće rješenje diferencijalnih jednadžbi:

(a) $y'\cos x - y\sin x = \sin(2x)$.

(b) $y' = \dfrac{1}{x\cos y + a\sin(2y)}, a \neq 0$.

(c) $y' - y = e^x$.

(d) $\left(x^2+1\right)y' + 4xy = 3$.

Napomena: Zadatke pod (a) i (b) rješavat ćemo primjenom formule za rješavanje linearne diferencijalne jednadžbe [M2, §5.8], a zadatke pod (c) i (d) metodom varijacije konstanti.

Rješenje.

(a) Dijeljenjem zadane diferencijalne jednadžbe sa $\cos x$ dobivamo

$$\begin{aligned} y' - y\mathrm{tg}x &= \frac{2\sin x\cos x}{\cos x} \\ y' - y\mathrm{tg}x &= 2\sin x \end{aligned}$$

U formulu za rješavanje linearne diferencijalne jednadžbe [M2, §5.8] uvrštavamo

$$p(x) = -\mathrm{tg}x, q(x) = 2\sin x$$

i dobivamo

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int(-\mathrm{tg}x)\,dx}\left[\int 2\sin x e^{\int(-\mathrm{tg}x)\,dx}\,dx + C\right] \\ y &= e^{\int \mathrm{tg}x\,dx}\left[\int 2\sin x e^{-\int \mathrm{tg}x\,dx}\,dx + C\right] \\ y &= e^{-\int \frac{d(\cos x)}{\cos x}}\left[\int 2\sin x e^{\int \frac{d(\cos x)}{\cos x}}\,dx + C\right] \\ y &= e^{\ln\frac{1}{|\cos x|}}\left[\int 2\sin x e^{\ln|\cos x|}\,dx + C\right] \\ y &= \frac{1}{|\cos x|}\left[\int 2\sin x\,|\cos x|\,dx + C\right] \\ y &= \frac{1}{|\cos x|}\left[\mathrm{sgn}(\cos x)\int 2\sin x\cos x\,dx + C\right] \\ y &= \frac{1}{|\cos x|}\left[\mathrm{sgn}(\cos x)\int \sin 2x\,dx + C\right] \\ y &= \frac{1}{|\cos x|}\left[\mathrm{sgn}(\cos x)\left(-\frac{1}{2}\right)\cos 2x + C\right] \\ y &= -\frac{1}{2}\frac{\cos 2x}{\cos x} + \frac{C}{\cos x}. \end{aligned}$$

(b) Neka je $x = x(y)$. Tada je

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{x'},$$

pa zadanu diferencijlanu jednadžbu možemo pisati kao

$$\begin{aligned} \frac{1}{x'} &= \frac{1}{x\cos y + a\sin(2y)} \\ x' &= x\cos y + a\sin(2y) \\ x' - x\cos y &= a\sin(2y). \end{aligned}$$

U formulu za rješavanje linearne diferencijalne jednadžbe [M2, §5.8] uvrštavamo

$$p(y) = -\cos y, q(y) = a\sin(2y)$$

i dobivamo

$$x = e^{-\int -\cos y dy} \left[a \int \sin(2y)\, e^{-\int \cos y dy} dy + C \right]$$
$$x = e^{\sin y} \left[a \int \sin(2y)\, e^{-\sin y} dy + C \right]$$
$$x = e^{\sin y} \left[2a \int \sin y \cos y e^{-\sin y} dy + C \right]$$
$$x = e^{\sin y} \left[2a \int \sin y \cos y e^{-\sin y} dy + C \right]. \tag{5.5}$$

Označimo sa I integral $\int \sin y \cos y e^{-\sin y} dy$ i riješimo ga:

$$I = \int \sin y \cos y e^{-\sin y} dy = \left\{ \begin{array}{c} \sin y = t \\ \cos y dy = dt \end{array} \right\} = \int t e^{-t}\, dt$$
$$= \left\{ \begin{array}{cc} u = t & dv = e^{-t}\, dt \\ du = dt & v = -e^{-t} \end{array} \right\} = -te^{-t} + \int e^{-t}\, dt$$
$$= -te^{-t} - e^{-t} = -(t+1)\, e^{-t} = -(\sin y + 1)\, e^{-\sin y}.$$

Uvrštavanjem dobivenog rješenja u (5.5) slijedi

$$x = e^{\sin y} \left[-2a (\sin y + 1)\, e^{-\sin y} + C \right]$$
$$x = Ce^{\sin y} - 2a (\sin y + 1).$$

(c) Ovu linearnu diferencijalnu jednadžbu rješavat ćemo metodom varijacije konstanti. Prvo ćemo riješiti pripadnu homogenu diferencijalnu jednadžbu, koja je diferencijalna jednadžba separiranih varijabli.

$$y' - y = 0$$
$$\frac{dy}{dx} = y$$
$$\frac{dy}{y} = dx$$
$$\int \frac{dy}{y} = \int dx$$
$$\ln |y| = x + C$$
$$\ln Cy = x$$
$$y = Ce^{x}.$$

Sada je opće rješenje zadane diferencijalne jednadžbe oblika $y = C(x)\, e^{x}$, pa ga u nju i uvrštavamo.

$$C'(x)\, e^{x} + C(x)\, e^{x} - C(x)\, e^{x} = e^{x}$$

Integriranjem dobivamo $C\left(x\right)$.

$$\begin{aligned} C'\left(x\right)e^{x} &= e^{x} \\ C'\left(x\right) &= 1 \\ C\left(x\right) &= \int dx \\ C\left(x\right) &= x + A. \end{aligned}$$

Dakle, opće rješenje zadane diferencijalne jednadžbe glasi:

$$y = \left(x + A\right)e^{x}.$$

(d) I ovu linearnu diferencijalnu jednadžbu rješavat ćemo metodom varijacije konstanti. Prvo ćemo rješiti pripadnu homogenu diferencijalnu jednadžbu.

$$\begin{aligned} y' - \frac{4x}{x^2+1}y &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{4x}{x^2+1}y \\ \frac{dy}{y} &= -\frac{4x}{x^2+1}\,dx \\ \int \frac{dy}{y} &= -2\int \frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1} \\ \ln|y| &= -2\ln\left(x^2+1\right) + \ln C \\ y &= \frac{C}{\left(x^2+1\right)^2}. \end{aligned}$$

Sada je opće rješenje zadane diferencijalne jednadžbe oblika $y = \dfrac{C\left(X\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$, pa ga uvrštavamo u zadanu diferencijalnu jednadžbu.

$$\begin{aligned} \frac{C'\left(X\right)\left(x^2+1\right)^2 - 4x\left(x^2+1\right)C\left(X\right)}{\left(x^2+1\right)^4} + \frac{4x}{x^2+1}\frac{C\left(X\right)}{\left(x^2+1\right)^2} &= \frac{3}{x^2+1} \\ \frac{C'\left(X\right)\left(x^2+1\right) - 4xC\left(X\right)}{\left(x^2+1\right)^3} + \frac{4x}{x^2+1}\frac{C\left(X\right)}{\left(x^2+1\right)^2} &= \frac{3}{x^2+1} \end{aligned}$$

Sređivanjem dobivamo

$$\begin{aligned} C'\left(x\right) &= 3\left(x^2+1\right) \\ C\left(x\right) &= x^3 + 3x + A. \end{aligned}$$

Dakle, opće rješenje zadane diferencijalne jednadžbe glasi:

$$y = \frac{x^3 + 3x + A}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

5.11 Bernoullijeva diferencijalna jednadžba

Odredite opće rješenje diferencijalnih jednadžbi:

(a) $y' - xy = -y^3 e^{-x^2}$.

(b) $\left(x^2 y^3 + xy\right) y' = 1$.

Rješenje.

(a) Uvođenjem supstitucije

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{y^2} \\ z' &= -2y^{-3}y' \\ \frac{z'}{-2} &= \frac{y'}{y^3} \end{aligned}$$

i dijeljenjem zadane diferencijalne jednadžbe sa y^3 dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y^3} - \frac{x}{y^2} &= -e^{-x^2} \\ \frac{z'}{-2} - xz &= -e^{-x^2} \\ z' + 2xz &= 2e^{-x^2}, \end{aligned}$$

a ovo je linearna diferencijalna jednadžba. U formulu za rješavanje linearne diferencijalne jednadžbe [M2, §5.8] uvrštavamo

$$p\,(x) = 2x, q\,(x) = 2e^{-x^2}$$

i dobivamo

$$\begin{aligned} z &= e^{-\int 2x\,dx}\left[\int 2e^{-x^2} e^{\int 2x\,dx}\,dx + C\right] \\ z &= e^{-x^2}\left[\int 2e^{-x^2} e^{x^2}\,dx + C\right] \\ z &= e^{-x^2}\,(2x + C) \end{aligned}$$

Vraćanjem u susptituciju $z = \dfrac{1}{y^2}$ dobivamo

$$\frac{1}{y^2} = e^{-x^2}\,(2x + C)\,.$$

(b) Neka je $x = x\,(y)$. Tada je

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{x'},$$

pa zadanu diferencijlanu jednadžbu možemo pisati kao:

$$\begin{aligned}\left(x^2y^3+xy\right)\frac{1}{x'} &= 1\\ x' &= \left(x^2y^3+xy\right)\\ x'-xy &= x^2y^3.\end{aligned}$$

Dijeljenjem zadane diferencijalne jednadžbe sa x^2 dobivamo

$$\frac{x'}{x^2}-\frac{y}{x}=y^3, \tag{5.6}$$

pa uvodimo supstituciju

$$\begin{aligned}z &= \frac{1}{x}\\ z' &= -\frac{x'}{x^2}\\ -z' &= \frac{x'}{x^2}.\end{aligned}$$

Sada diferencijalna jednadžba (5.6) glasi:

$$z'+yz=-y^3$$

a ovo je linearna diferencijalna jednadžba u kojoj je

$$p\left(y\right)=y, q\left(y\right)=-y^3$$

pa uvrštavanjem u formulu za rješavanje linearne diferencijalne jednadžbe [M2, §5.8] dobivamo

$$z=e^{-\int ydy}\left[-\int y^3e^{\int ydy}dy+C\right]$$

Rješavanjem integrala i vraćanjem u spustituciju dobivamo konačno rješenje zadane diferencijalne jednadžbe

$$\frac{1}{x}=2-y^2+Ce^{-\frac{y^2}{2}}.$$

5.12 Eulerova metoda

(a) Eulerovom metodom s korakom 0.5 izračunajte približne vrijednosti za

$$y_i\left(x_i\right), i=1,...,4$$

ako je $y\left(x\right)$ rješenje početnog problema

$$\begin{aligned}y' &= 1+3x-2y\\ y\left(1\right) &= 2.\end{aligned}$$

(b) Eulerovom metodom s korakom 0.2 izračunajte približnu vrijednost $y(1)$, ako je $y(x)$ rješenje početnog problema

$$\begin{aligned} y' &= x + y^2 \\ y(0) &= 0. \end{aligned}$$

Rješenje.

(a) Vrijedi

$$\begin{aligned} F(x,y) &= 1 + 3x - 2y \\ x_0 &= 1, y_0 = 2 \end{aligned}$$

Za korak $h = 0.5$ vrijedi

$$x_0 = 1, x_1 = 1.5, x_2 = 2, x_3 = 2.5, x_4 = 3.$$

Koristeći formulu [M2, §5.4] Eulerove metode

$$\begin{aligned} y_1 &= y(x_1) = y(1.5) = y_0 + 0.5(1 + 3x_0 - 2y_0) = 2 + 0.5(1 + 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2) = 2 \\ y_2 &= y(2) = y_1 + 0.5(1 + 3x_1 - 2y_1) = 2 + 0.5(1 + 3 \cdot 1.5 - 2 \cdot 2) = 2.75 \\ y_3 &= y(2.5) = y_2 + 0.5(1 + 3x_2 - 2y_2) = 2.75 + 0.5(1 + 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2.75) = 3.5 \\ y_4 &= y(3) = y_3 + 0.5(1 + 3x_3 - 2y_3) = 3.5 + 0.5(1 + 3 \cdot 2.5 - 2 \cdot 3.5) = 4.25 \end{aligned}$$

(b) Vrijedi

$$\begin{aligned} F(x,y) &= x + y^2 \\ x_0 &= 0, y_0 = 0 \end{aligned}$$

Za korak $h = 0.2$ vrijedi

$$x_0 = 0, x_1 = 0.2, x_2 = 0.4, x_3 = 0.6, x_4 = 0.8, x_5 = 1.$$

Koristeći formulu [M2, §5.4] Eulerove metode dobivamo

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + 0.2\left(x_0 + y_0^2\right) = 0 + 0.2\left(0 + 0^2\right) = 0 \\ y_2 &= y_1 + 0.2\left(x_1 + y_1^2\right) = 0 + 0.2\left(0.2 + 0^2\right) = 0.04 \\ y_3 &= y_2 + 0.2\left(x_2 + y_2^2\right) = 0.04 + 0.2\left(0.4 + 0.04^2\right) = 0.12032 \\ y_4 &= y_3 + 0.2\left(x_3 + y_3^2\right) = 0.12032 + 0.2\left(0.6 + 0.12032^2\right) = 0.2432153 \\ y_5 &= y_4 + 0.2\left(x_4 + y_4^2\right) = 0.2432153 + 0.2\left(0.8 + 0.2432153^2\right) = 0.415046 = y(1). \end{aligned}$$

5.13 Diferencijalne jednadžbe drugog reda - Opće rješenje

Ispitajte da li je $y = C_1 x^{\frac{3}{2}} + C_2$ opće rješenje diferencijalne jednadžbe $2xy'' - y' = 0$ u području $x > 0$ i odredite partikularno rješenje koje odgovara početnim uvjetima $y(1) = 4$, $y'(1) = 3$.

Rješenje. Funkciju $y(x) = C_1 x^{\frac{3}{2}} + C_2$ dva puta deriviramo po varijabli x i dobivamo: $y'(x) = \frac{3}{2}C_1 x^{\frac{1}{2}}$, $y''(x) = \frac{3}{4}C_1 x^{-\frac{1}{2}}$. Uvrštavanjem dobivenih derivacija u zadanu diferencijalnu jednadžbu dobivamo istinitu jednakost

$$2x \cdot \frac{3}{4}C_1 x^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}C_1 x^{\frac{1}{2}} = 0$$

i zaključujemo da je $y(x) = C_1 x^{\frac{3}{2}} + C_2$ opće rješenje zadane diferencijalne jednadžbe.

Da bismo odredili partikularno rješenje, u opće rješenje i njegovu prvu derivaciju ćemo uvrstiti zadane početne uvjete. Na taj način iz uvjeta $y'(1) = 3$ dobivamo $C_1 = 2$, a potom, iz uvjeta $y(1) = 4$ slijedi $C_2 = 2$.

Dakle, partikularno rješenje, koje zadovoljava zadane početne uvjete, glasi $y(x) = 2x^{\frac{3}{2}} + 2$.

5.14 Reduciranje DJ-e drugog reda na DJ-u prvog reda I

Ako se u DJ-i drugog reda, kojoj je opći oblik $y'' = f(x, y, y')$, ne pojavljuje eksplicitno jedna od varijabli x, y ili y' onda kažemo da je DJ-a nepotpuna te ju možemo riješiti reduciranjem (spuštanjem) reda.

Odredite partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe $y'' = xe^{-x}$ uz početne uvjete $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Rješenje. Ako je DJ-a drugog reda oblika $y'' = f(x)$ onda njeno opće rješenje dobivamo uzastopnim integriranjem zadane jednadžbe.

Dakle, integrirajmo, po varijabli x, jednadžbu $y'' = xe^{-x}$. Dobivamo

$$y'(x) = -xe^{-x} - e^{-x} + C_1. \tag{5.7}$$

Sada ćemo iskoristiti zadani uvjet $y'(0) = 0$ tj. uvrstit ćemo ga u (5.7) pa slijedi $C_1 = 1$.

Jednakost (5.7) integriramo još jednom i dobivamo

$$y(x) = (x + 2)e^{-x} + C_1 \cdot x + C_2. \tag{5.8}$$

Iz (5.8) i uvjeta $y(0) = 1$ je sada $C_2 = -1$.

Time smo dobili da partikularno rješenje ove diferencijalne jednadžbe, uz zadane početne uvjete, glasi $y(x) = (x + 2)e^{-x} + x - 1$.

5.15 Reduciranje DJ-e drugog reda na DJ-u prvog reda II

Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin(2x)$.

Rješenje. Diferencijalne jednadžbe oblika $y'' = f(x, y')$ rješavamo uvođenjem supstitucije $y'(x) = p(x)$ te na taj način zadanu diferencijalnu jednadžbu drugog reda svedemo na diferencijalnu jednadžbu prvog reda.

Dakle, neka je $y'(x) = p(x)$. Tada je $y''(x) = p'(x)$ pa, nakon uvođenja ovih zamjena u zadanu diferencijalnu jednadžbu, dobivamo

$$p' + p \operatorname{tg} x = \sin(2x). \tag{5.9}$$

Jednadžba (5.9) je linearna diferencijalna jednadžba prvog reda koju ćemo riješiti primjenom formule [M2, §5.8]. Slijedi

$$\begin{aligned}
p(x) &= e^{-\int \operatorname{tg} x\, dx}\left[\int \sin(2x) e^{\int \operatorname{tg} x\, dx} dx + C_1\right] \\
&= e^{\ln|\cos x|}\left[\int 2 \sin x \cos x e^{-\ln|\cos x|} dx + C_1\right] \\
&= |\cos x|\left[2sgn(\cos x) \int \sin x\, dx + C_1\right] \\
&= |\cos x|\left[2sgn(\cos x) \cdot (-\cos x) + C_1\right] \\
&= -2\cos^2 x + C_1 \cos x.
\end{aligned}$$

Da bismo dobili opće rješenje zadane jednadžbe pomoćni parametar p zamjenit ćemo sa $\frac{dy}{dx}$. Slijedi

$$\begin{aligned}
y(x) &= \int (-2\cos^2 x + C_1 \cos x) dx \\
y(x) &= -\int (1 + \cos(2x)) dx + C_1 \int \cos x\, dx + C_2.
\end{aligned}$$

Dakle, opće rješenje glasi

$$y(x) = -x - \frac{1}{2}\sin(2x) + C_1 \sin x + C_2.$$

5.16 Reduciranje DJ-e drugog reda na DJ-u prvog reda III

Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe $2(y')^2 = (y-1)y''$.

Rješenje. U slučaju kada diferencijalna jednadžba ne sadrži eksplicitno nezavisnu varijablu x tj. ima oblik $y'' = f(y, y')$ rješavamo ju uvođenjem supstitucije $y'(x) = p(y)$. Tada je $y''(x) = \frac{dp}{dy} p(y)$.

Nakon ovih zamjena zadana diferencijalna jednadžba poprima sljedeći oblik

$$p\left[2p-(y-1)\frac{dp}{dy}\right]=0.$$

Iz $p(y)=\dfrac{dy}{dx}=0$ dobivamo partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe $y=C$.

Iz $2p-(y-1)\dfrac{dp}{dy}=0$ ćemo, separiranjem varijabli, doći do općeg rješenja zadane diferencijalne jednadžbe. Naime, vrijedi

$$\begin{aligned}\frac{dp}{2p}&=\frac{dy}{y-1}\\ \frac{1}{2}\ln|p|&=\ln|y-1|+\ln C_1\\ p&=C_1^2(y-1)^2\\ \frac{dy}{dx}&=C_1^2(y-1)^2\\ \frac{dy}{C_1^2(y-1)^2}&=dx.\end{aligned}$$

Nakon integriranja dobivamo opće rješenje oblika $(x+C_2)(y-1)=C_1$.

5.17 Homogene LDJ drugog reda s konstantnim koeficijentima

Odredite opća odnosno partikularna rješenja diferencijalnih jednadžbi:

(a) $y''-5y'-6y=0$,

(b) $y''-2y'+y=0$ ako je $y(0)=4$ i $y'(0)=2$,

(c) $y''+4y'+13y=0$.

Rješenje. Prema [M2, §5.10] opće rješenje homogene diferencijalne jednadžbe drugog reda s konstantnim koeficijentima ima oblik $y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ gdje su y_1 i y_2 linearno nezavisna partikularna rješenja do kojih ćemo doći rješavajući karakterističnu jednadžbu zadane diferencijalne jednadžbe. Karakterističnu jednadžbu formiramo na način da u zadanoj diferencijalnoj jednadžbi umjesto y'' pišemo λ^2, umjesto y' pišemo λ i umjesto y pišemo 1. Dobivamo kvadratnu jednadžbu u varijabli λ čija će rješenja, λ_1 i λ_2, odredite oblik općeg rješenja diferencijalne jednadžbe na sljedeći način.

Ako su λ_1 i λ_2 realni i ralzičiti brojevi onda opće rješenje diferencijalne jednadžbe glesi $y(x)=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$. Ako su λ_1 i λ_2 realni i jednaki brojevi tj. $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$

onda opće rješenje ima oblik $y(x) = C_1e^{\lambda x} + C_2xe^{\lambda x}$. Ako su λ_1 i λ_2 konjugiorano kompleksni brojevi tj $\lambda_{1,2} = a \pm bi$ onda je opće rješenje zadane diferencijalne jednadžbe $y(x) = e^{ax}(C_1 \cos(bx) + C_2 \sin(bx))$.

(a) Karakteristična jednadžba glasi $\lambda^2 - 5\lambda - 6 = 0$. Njena rješenja su: $\lambda_1 = 6$ i $\lambda_2 = -1$. Prema gore opisanom postupku zaključujemo da opće rješenje zadane diferencijalne jednadžbe ima oblik $y(x) = C_1e^{6x} + C_2e^{-x}$.

(b) Karakteristična jednadžba ima oblik $\lambda^2 - 2\lambda + 1$ i rješenja $\lambda_{1,2} = 1$. Tada je opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y(x) = e^x((C_1 + C_2x)$. Iz $y(0) = 4$ dobivamo da je $C_1 = 4$, a iz drugog zadanog uvjeta $y'(0) = 2$ slijedi da je $C_2 = -2$. Dakle, partikularno rješenje diferencijalne jednažbe je $y(x) = e^x(4 - 2x)$.

(c) Iz karakteristične jednadžbe $\lambda^2 + 6\lambda + 13 = 0$ dobivamo rješenja $\lambda_{1,2} = -3 \pm 2i$. Tada opće rješenje zadane diferencijalne jednadžbe glasi $y(x) = e^{-3x}(C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x))$.

5.18 Nehomogene LDJ drugog reda s konstantnim koeficijentima

Izračunajte opća odnosno partikularna rješenja sljedećih diferencijalnih jednadžbi:

(a) $y'' - 2y' + 2y = x^2$,

(b) $y'' - 8y' + 16y = e^{4x}$, ako je $y(0) = 0$ i $y'(0) = 1$,

(c) $y'' + y = 5\sin(2x)$,

(d) $y'' + y' = 4x^2e^x$,

(e) $y'' + 2y' + 2y = e^x \sin x$.

Rješenje. Opće rješenje nehomogene diferencijalne jednadžbe oblika $y''+ay'+by = f(x)$ je zbroj rješenja pripadne homogene diferencijalne jednadžbe i partikularnog rješenja nehomogene jednadžbe tj. $y(x) = y_H(x) + y_P(x)$. Rješenje pripadne homogene jednadžbe određivat ćemo kao u prethodnom zadatku a do partikularnog rješenja možemo doći na dva načina. Prvi način, metodu neodređenih koeficijenata, pokazat ćemo u ovom zadatku, a u sljedećem zadatku ćemo primjenjivati drugi način tj. metodu varijacije konstanti.

Metoda neodređenih koeficijenata podrazumjeva formiranje partikularnog rješenja ovisno o obliku funkcije $f(x)$ pa razlikujemo nekoliko slučajeva:

(a) *Prvi slučaj.* Ako je $f(x)$ polinom n- tog stupnja onda je $y_P(x)$ polinom stupnja $n + r$, gdje je r red najniže derivacije koja se pojavljuje u diferencijalnoj jednadžbi.

U zadatku pod (a) najprije riješimo pripadnu homogenu diferencijalnu jednadžbu $y''-2y'+2y = 0$. Njena karakteristična jednadžba ima oblik $\lambda^2-2\lambda+2 =$

0. Rješenja karakteristične jednadžbe su $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$ pa rješenje homogene diferencijalne jednadžbe glasi $y_H(x) = (C_1 \cos x + C_2 \sin x)\, e^x$.

Prema prethodno opisanom postupku određivanja partikularnog rješenja zaključujemo da y_P ima oblik $y_P(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$. Da bismo odredili nepoznate koeficijente a_2, a_1 i a_0 u zadanu diferencijalnu jednadžbu ćemo uvrstiti y_P, y_P' i y_P''. Na taj način dobivamo sljedeću jednakost

$$2a_2x^2 + (-4a_2 + 2a_1)x + (2a_2 - 2a_1 + 2a_0) = x^2. \tag{5.10}$$

Nakon izjednačavanja koeficijenata u (5.10) slijedi

$$a_0 = \frac{1}{2}, \quad a_1 = 1 \quad \text{i} \quad a_2 = \frac{1}{2}.$$

Tada je $y_P(x) = \dfrac{1}{2}(x+1)^2$ pa opće rješenje zadane diferencijalne jednadžbe glasi $y(x) = (C_1 \cos x + C_2 \sin x)\, e^x + \dfrac{1}{2}(x+1)^2$.

(b) *Drugi slučaj.* Ako je $f(x)$ eksponencijalna funkcija oblika $f(x) = ke^{bx}$, k je konstanta, onda je partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe jednako:

- $y_P(x) = \dfrac{ke^{bx}}{P(b)}$ ako je $b \neq \lambda_1, \lambda_2$,
- $y_P(x) = \dfrac{kxe^{bx}}{P'(b)}$ ako je $b = \lambda_1$ i $b \neq \lambda_2$,
- $y_P(x) = \dfrac{kx^2e^{bx}}{P''(b)}$ ako je $b = \lambda_1 = \lambda_2$,

gdje je $P(r)$ oznaka za polinom na lijevoj strani karekteristične jednadžbe određene diferencijalne jednadžbe.

Diferencijalnoj jednadžbi zadanoj pod (b) najprije rješavamo pripadnu homogenu jednadžbu $y'' - 8y' + 16y = 0$. Njena karakteristična jednadžba je $\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$, a njena rješenja su $\lambda_{1,2} = 4$. Dakle, vrijedi $y_H(x) = C_1e^{4x} + C_2xe^{4x}$.

Budući je $f(x) = e^{4x}$, tj. $b = \lambda_{1,2} = 4$ zaključujemo da je $y_P(x) = \dfrac{kx^2e^{bx}}{P''(b)}$. Nadalje, $P(\lambda) = \lambda^2 - 8\lambda + 16$ pa je $P(b) = b^2 - 8b + 16$, odnosno $P'' = 2$. Dakle, partikularno rješenje ove diferencijalne jednadžbe glasi $y_P(x) = \dfrac{x^2e^{4x}}{2}$.

Tada je opće rješenje jednako $y(x) = C_1e^{4x} + C_2xe^{4x} + \dfrac{x^2e^{4x}}{2}$.

Uvraštavanjem zadanih početnih uvjeta u dobiveno opće rješenje diferencijalne jednadžbe slijedi da je $C_1 = 0$ i $C_2 = 1$ pa partikularno rješenje koje zadovoljava zadane uvjete glasi $y(x) = xe^{4x}\left(1 + \dfrac{1}{2}x\right)$.

(c) *Treći slučaj.* Ako funkcija $f(x)$ ima oblik $k\sin(mx)$ ili $k\cos(mx)$ onda je njeno partikularno rješenje $y_P(x) = A\cos(mx) + B\sin(mx)$, gdje su A i B nepoznate konstante.

Za diferencijalnu jednadžbu pod (c) pripadna homogena jednadžba glasi $y'' + y = 0$. Njena karakteristična jednadžba ima rješenja $\lambda_{1,2} = \pm i$ pa je $y_H(x) = C_1\cos x + C_2\sin x$. Budući je $f(x) = 5\sin(2x)$ slijedi $m = 2$ i $y_P(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x)$. Sada ćemo $y_P(x)$, $y_P'(x)$ i $y_P''(x)$ uvrstiti u zadanu diferencijalnu jednadžbu. Time dolazimo do jednakosti

$$-3A\cos(2x) - 3B\sin(2x) = 5\sin(2x). \tag{5.11}$$

Izjednačavanjem koeficijenata jednakosti (5.11) koji se nalaze uz $\cos(2x)$ odnosno $\sin(2x)$ dobivamo $A = 0$ i $B = -\dfrac{5}{3}$ pa partikularno rješenje glasi $y_P(x) = -\dfrac{5}{3}\sin(2x)$.

Dakle, opće rješenje zadane diferencijalne jednadžbe je $y(x) = C_1\cos x + C_2\sin x - \dfrac{5}{3}\sin(2x)$.

(d) *Četvrti slučaj.* Ako je funkcija f oblika $f(x) = P_n(x)e^{bx}$, gdje je P_n oznaka za polinom n-tog stupnja, onda je

$$y_P = x^s\left(a_n x^n + ... + a_1 x + a_0\right)e^{bx},$$

gdje je

- $s = 0$, za $b \neq \lambda_1, \lambda_2$,
- $s = 1$, za $b = \lambda_1, b \neq \lambda_2$ i
- $s = 2$, za $b = \lambda_1 = \lambda_2$,

gdje su λ_1 i λ_2 rješenja karakteristične jednadžbe.

Karakteristična jednadžba diferencijalne jednadžbe zadane pod (d) ima rješenja $\lambda_1 = 0$ i $\lambda_2 = -1$ pa je $y_H(x) = C_1 + C_2 e^{-x}$. Budući je $f(x) = 4x^2 e^x$ zaključujemo $n = 2$, $b = 1 \neq \lambda_1 \neq \lambda_2$ pa je $s = 0$. Dakle, partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe je oblika $y_P(x) = \left(a_2 x^2 + a_1 x + a_0\right)e^x$. Sada izračunamo y_P' i y_P'' te ih, zajedno sa y_P uvrstimo u zadanu diferencijalnu jednadžbu. Dobivamo sljedeću jednakost

$$e^x\left[a_2x^2 + (4a_2 + a_1)x + 2a_2 + 2a_1 + a_0\right] + e^x\left[a_2x^2 + (2a_2 + a_1)x + a_1 + a_0\right] = 4x^2e^x. \tag{5.12}$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz odgovarajuće potencije, slijedi da je $a_0 = 7$, $a_1 = -6$ i $a_2 = 2$.

Dakle, $y_P(x) = (2x^2 - 6x + 7)e^x$ pa opće rješenje zadane diferencijalne jednadžbe glasi $y(x) = C_1 + C_2e^{-x} + (2x^2 - 6x + 7)e^x$.

(e) *Peti slučaj.* Ako je $f(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ ili $f(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$ onda je

$$y_p = x^s e^{\alpha x}\left(a_0\cos(\beta x) + b_0\sin(\beta x)\right),$$

gdje je:

- $s = 0$, ako $\alpha \pm i\beta$ nije par kompleksno konjugiranih rješenja karakteristične jednadžbe,
- $s = 1$, ako je $\alpha \pm i\beta$ jednostruki par kompleksno konjugiranih rješenja karakteristične jednadžbe,
- $s = 2$, ako je $\alpha \pm i\beta$ dvostruki par kompleksno konjugiranih rješenja karakteristične jednadžbe.

Rješenja karakteristične jednadžbe diferencijalne jednadžbe u zadatku pod (e) su $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$ pa je $y_H(x) = C_1 e^{-x} \cos x + C_2 e^{-x} \sin x$.Kako je zadana funkcija f oblika $f(x) = e^x \sin x$ slijedi da je $\alpha = 1$, $\beta = 1$ tj. $\alpha \pm i\beta = 1 \pm i$ što nije jednako rješenju karakteristične jednadžbe. Zaključujemo $s = 0$ i $y_P(x) = e^x(a_0 \cos x + b_0 \sin x)$. Nakon uvrštavanja izraza za y_P, y_P' i y_P'' u zadanu diferencijalnu jednadžbu i izjednačavanja koeficijenata uz odgovarajuće potencije dobivamo da je $a_0 = -\dfrac{1}{8}$ i $b_0 = \dfrac{1}{8}$ tj.

$$y_p(x) = \frac{1}{8} e^x \left(-\cos x + \sin x\right).$$

Dakle, opće rješenje glasi $y(x) = C_1 e^{-x} \cos x + C_2 e^{-x} \sin x + \dfrac{1}{8} e^x \left(-\cos x + \sin x\right)$.

5.19 Homogene LDJ višeg reda

Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$, te partikularno rješenje uz početne uvjete $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, i $y''(0) = 3$.

Rješenje. Zadatak rješavamo analogno kao i homogenu diferencijalnu jednadžbu drugog reda. Pripadna karakteristična jednadžba ima oblik $\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0$ tj. $(r + 1)^3 = 0$ pa su njena rješenja $\lambda_{1,2,3} = -1$. Budući su sva tri rješenja realna i međusobno jednaka, prema [M2, §5.10], opće rješenje zadane diferencijalne jednažbe glasi

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 x^2 e^{-x}.$$

Nakon uvrštavanja zadanih početnih uvjeta u dobiveno opće rješenje, odnosno njegovu prvu i drugu derivaciju dobivamo da je $C_1 = 1$, $C_2 = 3$ i $C_3 = 4$, pa traženo partikularno rješenje glasi

$$y(x) = e^{-x} + 3xe^{-x} + 4x^2 e^{-x}.$$

5.20 Princip superpozicije rješenja

Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y'' - 2y' = e^{2x} + 5$.

Rješenje. Ako je desna strana diferencijalne jednadžbe suma više funkcija

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x), \tag{5.13}$$

a y_i, $(i = 1, 2, ...n)$, su rješenja pojedinih jednadžbi $y'' + py' + qy = f_i(x)$, $(i = 1, 2, ..., n)$, onda je suma

$$y = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$$

rješenje jednadžbe (5.13).

Pripadna homogena jednadžba zadane diferencijalne jednadžbe glasi $y'' - 2y' = 0$, a njena karakteristična jednadžba $\lambda^2 - 2\lambda = 0$ ima rješenja $\lambda_1 = 0$ i $\lambda_2 = 2$. Dakle, opće rješenje homogene diferencijalne jednadžbe je $y_H(x) = C_1 + C_2 e^{2x}$.

Odredimo sada partikularno rješenje y_1 za diferencijalnu jednadžbu $y'' - 2y' = e^{2x}$.

Prema [M2 vjžbe, §3.18] y_1 ima oblik $y_1 = \frac{xke^{bx}}{P'(b)}$. Budući je $b = 2 = \lambda_2$, $k = 1$ i $P'(2) = 2$ zaključujemo $y_1 = \dfrac{xe^{2x}}{2}$.

Za funkciju $f_2(x) = 5$ tj. diferencijalnu jednadžbu $y'' - 2y' = 5$ partikularno rješenje ima oblik $y_2(x) = ax + b$, gdje je $a - \dfrac{5}{2}$ i $b = 0$. Dakle, $y_2 = -\dfrac{5}{2}x$.

Iz svega dobivenog zaključujemo da opće rješenje zadane diferencijalne jednadžbe glasi $y(x) = C_1 + C_2 e^{2x} + \dfrac{1}{2}xe^{2x} - \dfrac{5}{2}x$.

5.21 Metoda varijacije konstanti

Metodom varijacije konstanti odredite opća rješenja diferencijalnih jednadžbi

(a) $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$, te provjerite linearnu nezavisnost partikularnih rješenja,

(b) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$,

(c) $y''' + y'' = \dfrac{x-1}{x^2}$.

Rješenja.

(a) Odredimo najprije rješenje pripadne homogene diferencijalne jednadžbe $y'' + y = 0$. Njena karakteristična jednadžba $\lambda^2 + 1 = 0$ ima rješenja $\lambda_{1,2} = \pm i$ pa je rješenje homogene diferencijalne jednadžbe $y_H(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. P rema [M2, §5.10], opće rješenje zadane diferencijalne jednadžbe ima oblik $y(x) = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$. Nepoznate funkcije $C_1(x)$ i $C_2(x)$ odredit ćemo iz sljedećeg sustava jednadžbi:

$$C_1'(x)\cos x + C_2'(x) = 0$$
$$-C_1'(x)\sin x + C_2' 8x)\cos x = \frac{1}{\sin x}.$$

Slijedi: $C_1'(x) = -1$ odnosno $C_1(x) = -x + A$ i $C_2'(x) = \operatorname{ctg} x$ odnosno $C_2(x) = \ln|\sin x| + B$.

Dakle, opće rješenje zadane diferencijalne jednadžbe glasi $y(x) = A\sin x + B\cos x - x\cos x + \sin x \cdot \ln|\sin x|$. Da bismo provjerili linearnu nezavisnost partikularnih rješenja $y_1(x) = \cos x$ i $y_2(x) = \sin x$, prema [M2, §5.10],, izračunat ćemo vrijednost determinante Wronskoga. Vrijedi

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \neq 0.$$

Zaključujemo da su partikularna rješenja linearno nezavisna.

(b) Pripadna homogena diferencijalna jednadžba zadane jednadžbe glasi $y'' - 2y' + y = 0$. Rješenja njene karakteristične jednadžbe $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ su $\lambda_{1,2} = 1$ pa zaključujemo da je rješenje homogene jednadžbe $y_H(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x$. Dakle, opće rješenje zadane diferencijalne jednadžbe ima oblik $yx) = C_1(x)e^x + C_2(x)xe^x$ pa ćemo, u svrhu određivanja nepoznatih funkcija $C_1(x)$ i $C_2(x)$, riješiti sljedeći sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned} C_1'(x)e^x + C_2'(x)xe^x &= 0 \\ C_1'(x)e^x + C_2'(x)(e^x + xe^x) &= \frac{e^x}{x}. \end{aligned}$$

Slijedi: $C_1(x) = -x + A$, $C_2(x) = \ln|x| + B$ pa opće rješenje zadane jednadžbe glasi $y(x) = e^x(A + Bx) + xe^x(\ln|x| - 1)$.

(c) Analogno kao u prethodna dva zadatka riješit ćemo najprije pripadnu homogenu diferencijalnu jednadžbu na način da joj pridružimo njenu karakterističnu jednadžbu $\lambda^3 + \lambda^2 = 0$. Rješenja karakteristične jednadžbe su $\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_3 = -1$ pa rješenje homogene diferencijalne jednadžbe glasi $y_H(x) = C_1 + xC_2 + e^{-x}C_3$. Sada zaključujemo da opće rješenje zadane diferencijalne jednadžbe ima oblik $yx) = C_1(x) + xC_2(x) + e^{-x}C_3(x)$. Nepoznate funkcije $C_1(x)$, $C_2(x)$ i $C_3(x)$ određujemo iz sljedećeg sustava jednadžbi

$$\begin{aligned} C_1'(x) + xC_2'(x) + C_3'(x)e^{-x} &= 0 \\ C_2'(x) - C_3'(x)e^{-x} &= 0 \\ C_3'(x)e^{-x} &= \frac{x-1}{x^2}. \end{aligned}$$

Rješavanjem jednadžbi iz sustava dobivamo da je $C_1(x) = -\frac{1}{x} - x + A$, $C_2(x) = \ln|x| + \frac{1}{x} + B$ i $C_3(x) = \frac{1}{x}e^x + C$. Dakle, opće rješenje zadane diferencijalne jednadžbe glasi $y(x) = A + Bx + Ce^{-x} - x + x\ln|x| + 1$.

5.22 Sustavi diferencijalnih jednadžbi

(a) Riješite sustav difrencijalnih jednadžbi

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y + 1 \\ \frac{dy}{dt} &= x + 1. \end{aligned}$$

Rješenje. Rješenje sustava, tj. nepoznate funkcije $x(t)$ i $y(t)$, odredit ćemo na način da najprije iz prve jednadžbe sustava izrazimo jednu funkciju. Tada je, npr.

$$y = \frac{dx}{dt} - 1. \tag{5.14}$$

Dobivenu jednadžbu ćemo derivirati po varijabli t. Slijedi $\frac{dy}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$. Sada, izraze dobivene za y i $\frac{dy}{dt}$ uvrštavamo u drugu po redu jednadžbu zadanog sustava. Dobivamo sljedeću diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{d^2x}{dt^2} - x = 1. \tag{5.15}$$

(5.15) je linearna nehomogena diferencijalna jednadžba drugog reda s konstantnim koeficijentima pa ju riješitavamo tako da najprije odredimo rješenje pripadne homogene diferencijalne jednažbe $\frac{d^2x}{dt^2} - x = 0$. Rješenja pripadne karakteristične jednadžbe su $\lambda_{1,2} = \pm 1$ pa je rješenje homogene diferencijalne jednadžbe $x_H(t) = C_1e^t + C_2e^{-t}$. Budući je desna strana jednadžbe (5.15) polinom nultog stupnja, zaključujemo da je partikularno rješenje također polinom nultog stupnja oblika $x_P(t) = A$, A je konstanta. Uvrštavanjem x_P u (5.15) dobivamo da je A_-1 pa je opće rješenje diferencijalne jednadžbe (5.15) $x(t) = C_1e^t + C_2e^{-t} - 1$. Sada, iz (5.14) i dobivenog rješenja za funkciju $x(t)$, slijedi $y(t) = C_1e^t - C_2e^{-t} - 1$.

(b) Odredite ono rješenje sustava

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} + 3x + y &= 0 \\ \frac{dy}{dt} - x + y &= 0 \end{aligned}$$

koje zadovoljava početne uvjete $x(0) = 1$, $y(0) = 1$.

Rješenje. Primjenit ćemo isti postupak kao u zadatku pod (a). Iz prve jednadžbe sustava slijedi

$$y(t) = -\frac{dx}{dt} - 3x \tag{5.16}$$

i $\frac{dy}{dt} = -\frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt}$. Uvrštavanjem tih dviju jednakosti u drugu jednadžbu sustava dobivamo

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 4x = 0. \tag{5.17}$$

(5.17) je linearna homogena diferencijalna jednadžba drugog reda s konstantnim koeficijentima. Rješenja njene karaktaristične jednadžbe su $\lambda_{1,2} = -2$ pa je opće rješenje jednadžbe (5.17) $x(t) = C_1e^{-2t} + C_2te^{-2t}$. Iz (5.16) i dobivenog rješenja $x(t)$ slijedi $y(t) = -C_1e^{-2t} - C_2e^{-2t} - C_2te^{-2t}$. Iskoristimo sada zadane početne uvjete. Iz $x(0) = 1$ dobivamo da je $C_1 = 1$, a iz $y(0) = 1$ da je $C_2 = -2$. Dakle, partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe koje zadovoljava dane početne uvjete glasi $x(t) = (1 - 2t)e^{-2t}$, $y(t) = (1 + 2t)e^{-2t}$.

(c) Odredite opće rješenje sustava diferencijalnih jednadžbi

$$\frac{dx}{dt} = 3 - 2y$$
$$\frac{dy}{dt} = 2x - 2t.$$

Rješenje. Analognim postupkom kao u prethodna dva primjera iz prve jednadžbe sustava slijedi da je $y(t) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{3}{2}$ te $\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}$. Uvrštavanjem u drugu jednadžbu sustava dobivamo linearnu nehomogenu diferencijalnu jednadžbu drugog reda s konstantnim koeficijentima koja glasi $\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 4t$. Rješenje pripadne homogene diferencijalne jednadžbe je $x_H(t) = C_1\cos(2t) + C_2\sin(2t)$. Matodom neodređenih koeficijenata ili metodom varijacije konstanti jednostavno se pokazuje da je opće rješenje za funkciju $x(t)$ dano sa $x(t) = C_1\cos(2t) + C_2\sin(2t) + t$. Uvrštavanjem dobivenog rješenja natrag u prvu jednadžbu sustava slijedi i opće rješenje za funkciju $y(t)$ koje glasi $y(t) = C_1\sin(2t) - C_2\cos(2t) + 1$.

5.23 Lovac-plijen jednadžba

Populacija ptica (lovci) i insekata (plijen) modelirana je jednadžbama

$$\frac{dx}{dt} = 0.4x - 0.002xy$$
$$\frac{dy}{dt} = -0.2y + 0.000008xy.$$

Odredite rješenja ravnoteže (konstantna rješenja) i objasniti njihovo značenje?

Rješenje. Konstantna rješenja dobivamo rješavanjem sustava jednadžbi

$$\frac{dx}{dt} = 0$$
$$\frac{dy}{dt} = 0.$$

Dakle, uvrštavanjem zadanih podataka u sustav rješenja ravnoteže dobivamo sljedeće jednadžbe

$$0.4x - 0.002xy = 0$$
$$-0.2y + 0.000008xy = 0.$$

Izlučivanjem zajedničkih faktora u jednadžbama dobivamo

$$x(0.4 - 0.002y) = 0$$
$$y(-0.2 + 0.000008x) = 0.$$

Dakle, prvo rješenje sustava je $x = 0$, $y = 0$ ali ono je u kontradikciji sa zadanim podacima pa ga odbacujemo. Drugo rješenje sustava glasi $x = 25000$, $y = 200$ pa zaključujemo da ćemo uravnoteženost populacije postići sa brojem od 200 ptica i 25000 insekata, tj. 25000 insekata je dovoljno da održi konstantnom populaciju od 200 ptica.

5.24 Zadaci za vježbu

1. Provjerite da li je $\varphi(x) = \dfrac{1}{x}$ rješenje diferencijalne jednadžbe $y'' = x^2 + y^2$.

2. Odredite diferencijalnu jednadžbu za familiju krivulja $\dfrac{x^2}{c^2} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

3. Odredite krivulju iz familije krivulja $y = c_1 \sin(x - c_2)$, koja zadovoljava početne uvjete $y(\pi) = 1$, $y'(\pi) = 0$.

4. Populacija je modelirana diferencijalnom jednadžbom $\dfrac{dP}{dt} = 1.2P\left(1 - \dfrac{P}{4200}\right)$.

   (a) Za koje vrijednosti od P populacija raste?

   (b) Za koje vrijednosti od P populacija pada?

5. Kolač je izvađen iz pećnice na $200°C$. Nakon 10 minuta temperatura kolača bila je $150°C$. Za koliko će vremena kolač biti na temperaturi od $30°C$ ako je sobna temperatura $20°C$?

6. Vrijeme poluraspada izotopa stroncija ${}^{90}Sr$ je 25 godina. Početna masa uzorka ${}^{90}Sr$ je 18 mg.

   (a) Izračunajte masu koja ostaje nakon t godina.

   (b) Koliko vremena treba da se masa smanji na 2 mg?

7. Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y'x^3 = 2y$.

8. Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe $xy' + y = y^2$.

9. Nađite partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe $e^y(1 + x^2)dy - 2x(1 + e^y)dx = 0$ uz početni uvjet $y(0) = 0$.

Odredite opće rješenje diferencijalnih jednadžbi:

10. $y' = \dfrac{xy}{x^2 - y^2}$.

11. $\left(y' - \dfrac{y}{x}\right) \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} = 1$

12. $(2x - y + 4)dy + (x - 2y + 5)dx = 0$

13. $y' = \dfrac{1-3x-3y}{1+x+y}$

14. $(x^2 - y)dx + (y^2 - x)dy = 0$

15. $2xy \ln y dx + (x^2 + y^2\sqrt{y^2+1})dy = 0, \quad \lambda = \lambda(y)$

16. $(x\cos y - y\sin y)\, dy + (x\sin y + y\cos y)\, dx = 0,\ \lambda = \lambda(x).$

17. Odredite jednadžbu ortogonalne trajektorije familije krivulja $x^2 + y^2 = 2ax$ koja prolazi kroz točku $(1, 1)$.

18. Odredite ortogonalne trajektorije familije krivulja $y^2 = ax$.

19. Nađite ortogonalne trajektorije familije krivulja $xy = a$.

20. Odredite singularna rješenja jednadžbe $y^2(y')^2 + y^2 - 1 = 0$

21. Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y' + y\cos x = \sin x \cos x$, te partikularno rješenje koje zadovoljava uvjet $y(\frac{\pi}{2}) = 1$.

22. Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe $\left(1 - x^2\right) y' + 2xy - 4x = 0$, te partikularno rješenje koje zadovoljava uvjet $y(0) = -1$.

Odredite opće rješenje diferencijalnih jednadžbi:

23. $xy' + (x+1)\, y = 3x^2 e^{-x}$

24. $y = x\,(y' - x\cos x)$

25. $y' + xy = x^3 y^3$

26. $y' - ytgx = y^4 \cos x.$

27. $y' + \dfrac{y}{x} = x^2 y^4.$

28. Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe $xy' - y\,(2y\ln x - 1) = 0$, te partikularno rješenje koje zadovoljava uvjet $y(1) = 1$.

29. Eulerovom metodom s korakom 0.5 izračunajte približnu vrijednost $y\,(2)$ ako je $y = y\,(x)$ rješenje početnog problema $y' = x\sin(x+y), \quad y\,(-1) = 1$.

30. Eulerovom metodom s korakom 0.2 izračunajte približnu vrijednost $y\,(1)$ ako je $y = y\,(x)$ rješenje početnog problema $y' = 2xy^2, \quad y\,(0) = 1$.

Odredite opće rješenje diferencijalnih jednadžbi:

31. $y'' = 2\sin x \cos^2 x - \sin^3 x$

32. $(1+x)y'' + y' = 0$

33. $y'' + 2y(y')^3 = 0$

34. $2y'' - y' - y = 0$

35. $y'' + 6y' + 13y = 0.$

36. Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y'' + 2y' + 5y = 0$, te partikularno rješenje uz početne uvjete $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Odredite opće rješenje diferencijalnih jednadžbi:

37. $y'' - 2y' = x^2 - x$

38. $y'' - 2y' + y = e^{2x}$

39. $y'' - 2y' + 10y = 37\cos(3x)$

40. $2y'' - y' - y = 4xe^{2x}$.

41. Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y^{(4)} - 81y = 27e^{-3x}$.

42. Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y'' - 4y' + 4y = \sin(2x) + e^{2x}$.

43. Metodom varijacije konstanti odredite opće rješ enje diferencijalne jednadžbe $y'' + 2y' + y = \sqrt{x} \cdot e^{-x}$.

44. Metodom varijacije konstanti odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y'' + y = \dfrac{1}{\sin^3 x}$.

45. Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}\ln x$ metodom varijacije konstanti.

46. Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y'' - 3y' + 2y = e^x(3 - 4x)$ metodom varijacije konstanti te Provjerite linearnu nezavisnost partikularnih rješenja.

47. Riješite sustav diferencijalnih jednadžbi

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= y + z\\ \frac{dz}{dx} &= x + y + z.\end{aligned}$$

48. Odredite ono rješenje sustava diferencijalnih jednadžbi

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= 3z - y\\ \frac{dz}{dt} &= y + z + e^t,\end{aligned}$$

koje zadovoljava početne uvjete $y(0) = 0$, $z(0) = 0$.

49. Riješite sustav diferencijalnih jednadžbi

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} + 2y + z &= \sin x\\ \frac{dz}{dx} - 4y - 2z &= \cos x.\end{aligned}$$

50. Populacije biljnih ušiju (eng. aphids) i bubamara (eng. ladybugs) modelirane su jednadžbama

$$\begin{aligned}\frac{dA}{dt} &= 2A - 0.01AL\\ \frac{dL}{dt} &= -0.5L + 0.0001AL.\end{aligned}$$

   (a) Odredite rješenja ravnoteže i objasnite njihovo značenje

   (b) Odredite izraz za $\frac{dL}{dA}$.

5.25 Rješenja zadataka za vježbu

1. Ne.
2. $-xyy' + y^2 = 4$.
3. $y = -\cos x$.
4. (a) $0 < P < 4200$,
   (b) $P > 4200$.
5. $t = 88.93$.
6. (a) $m(t) = 18 \cdot e^{-\frac{1}{25} t \ln 2}$,
   (b) $t = 25\frac{\ln 9}{\ln 2}$.
7. $y = ce^{-\frac{1}{x^2}}$.
8. $y = \frac{1}{1 - cx}$.
9. $y = \ln\left[c(1 + x^2) - 1\right]$, $c = 2$, $y = \ln(2x^2 + 1)$.
10. $2y^2 \ln(cy) + x^2 = 0$.
11. $\frac{y}{x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + \ln c$.
12. $(x + y - 1)^3 = c(x - y + 3)$.
13. $3x + y + 2\ln|x + y - 1| = c$.

14. $\frac{1}{3}x^3 - xy + \frac{1}{3}y^3 = c.$

15. $x^2 \ln y + \frac{1}{3}(y^2+1)^{\frac{3}{2}} = c.$

16. $y = (x \sin y + y \cos y - \sin y)\, e^x = c.$

17. $x^2 + (y-1)^2 = 1.$

18. $2x^2 + y^2 = c^2.$

19. $x^2 - y^2 = c.$

20. $y = 1, y = -1.$

21. $y = \sin x - 1 + ce^{-\sin x}$, $c = e$, $y = \sin x - 1 + e^{1-\sin x}$.

22. $y = 2 + c\left(1 - x^2\right)$, $c = -3$, $y = 2 - 3\left(1 - x^2\right)$.

23. $xy = \left(x^3 + c\right) e^{-x}.$

24. $y = cx + x \sin x.$

25. $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2 + ce^{x^2}}}.$

26. $c = \dfrac{1}{\sqrt[3]{c \cos^3 x - 3 \sin x \cos^2 x}}.$

27. $y = \dfrac{1}{x\sqrt[3]{3 \ln \frac{c}{x}}}.$

28. $y = \dfrac{1}{2\left(\ln x + 1\right) + cx}, c = -1, y = \dfrac{1}{2(\ln x + 1) - x}.$

29. $y \approx 1.05484$

30. $y \approx 4.28982$

31. $y = \frac{1}{3}\sin^3 x + c_1 x + c_2.$

32. $y = c_1 \ln(x+1) + c_2.$

33. $3x = y^3 + c_1 y + c_2.$

34. $y = c_1 e^x + c_2 e^{-\frac{1}{2}x}.$

35. $y = e^{-3x}(c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)).$

36. $y = e^{-x}(c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x))$, $y = \frac{1}{2}e^{-x}\sin(2x)$.

37. $y = c_1 + c_2 e^{2x} - \frac{x^3}{6}.$

38. $y = c_1 e^x + c_2 x e^x + e^{2x}.$

39. $y = (c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x))e^x + \cos(3x) - 6\sin(3x)$.

40. $y = c_1 e^x + c_2 e^{-\frac{1}{2}x} + \left(\frac{4}{5}x - \frac{28}{25}\right) e^{2x}$.

41. $y(x) = c_1 e^{3x} + \left(c_2 - \frac{x}{4}\right) e^{-3x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x$.

42. $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + \frac{1}{8}\cos(2x) + \frac{1}{2}x^2 e^{2x}$.

43. $y(x) = \frac{4}{15}x^{\frac{5}{2}}e^{-x} + Be^{-x} + Axe^{-x}$.

44. $y(x) = \frac{\cos^2 x}{\sin x} - \frac{1}{2\sin x} + A\sin x + B\cos x$.

45. $y(x) = e^{-2x}\left(\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{3}{4}x^2 + Ax + B\right)$.

46. $y(x) = Ae^{2x} + Be^x + e^x(2x^2 + x)$.

47. $y(x) = c_1 + c_2 e^{2x} - \frac{1}{4}(x^2 + x), \quad z(x) = c_2 e^{2x} - c_1 + \frac{1}{4}(x^2 - x - 1)$.

48. $y(t) = -e^{-t} + \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{3}{4}e^{2t}, \quad z(t) = -\frac{2}{3}e^t - \frac{1}{12}e^{-2t} + \frac{3}{4}e^{2t}$.

49. $y(x) = c_1 + c_2 x + 2\sin x, \quad z(t) = -2c_1 - c_2(2x + 1) - 3\sin x - 2\cos x$.

50. (a) $L = 200$, $A = 5000$, (b) $\frac{dL}{dA} = \frac{-0.5L + 0.0001AL}{2A - 0.01AL}$.

6.

Metoda najmanjih kvadrata i QR rastav

6.1 Problem najmanjih kvadrata

6.1.1 Linearna regresija

U tablici su navedeni podaci o broju utrošenih minuta na pozive u nepokretnoj i pokretnim telefonskim mrežama (u milijunima) kroz godine:

godina	2006	2007	2008	2009	2010
nepokretna m.	8 515	5 392	5 557	5 276	5 099
pokretne m.	4 115	4 985	5 657	5 981	5 937

Uz pretpostavku da se radi o linearnoj ovisnosti, izračunajte regresijske pravce i predvidite odnos broja utrošenih minuta u nepokretnoj i pokretnim telefonskim mrežama na pozive u 2012. godini.

Rješenje.

Pronađimo najprije regresijski pravac $y = kx+l$ za točke $T_1(2006, 8515)$, $T_2(2007, 5392)$, $T_3(2008, 5557)$, $T_4(2009, 5276)$ i $T_5(2010, 5099)$.

Prema [M2, §6.1.1], pravac $y = kx + l$ će "najbolje" prolaziti kroz zadane točke ako su k i l rješenja preodređenog sustava

$$\begin{array}{rcccl} 2006k & + & l & = & 8\,515 \\ 2007k & + & l & = & 5\,392 \\ 2008k & + & l & = & 5\,557 \\ 2009k & + & l & = & 5\,276 \\ 2010k & + & l & = & 5\,099 \end{array}$$

ili u matričnom obliku

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 2006 & 1 \\ 2007 & 1 \\ 2007 & 1 \\ 2008 & 1 \\ 2009 & 1 \\ 2010 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 8\,515 \\ 5\,392 \\ 5\,557 \\ 5\,276 \\ 5\,099 \end{bmatrix}.$$

Rješenje sustava u smislu najmanjih kvadrata dobit ćemo kao rješenje normalne jednadžbe

$$A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}.$$

Vrijedi

$$A^T A = \begin{bmatrix} 20\,160\,330 & 10\,040 \\ 10\,040 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad A^T b = \begin{bmatrix} 59\,909\,764 \\ 29\,839 \end{bmatrix},$$

pa smo dobili sustav od dvije jednadžbe s dvije nepoznanice

$$\begin{bmatrix} 20\,160\,330 & 10\,040 \\ 10\,040 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 59\,909\,764 \\ 29\,839 \end{bmatrix}$$

koji ima jedinstveno rješenje

$$\begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T\mathbf{b} = \frac{1}{50} \begin{bmatrix} 5 & -10\,040 \\ -10040 & 20\,160\,330 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 59\,909\,764 \\ 29\,839 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -694.8 \\ 1\,401\,126.2 \end{bmatrix}.$$

Jednadžba regresijskog pravca je

$$y = -694.8x + 1\,401\,126.2,$$

a broj utrošenih minuta na pozive u nepokretnoj mreži (koji se s vremenom smanjuje) u 2012. godini bi trebao biti otprilike

$$y(2012) = -694.8 \cdot 2012 + 1\,401\,126.2 = 3\,188.6\ .$$

Na isti način pronaći ćemo i drugi regresijski pravac (za toč ke $S_1(2006, 4\,115)$, $S_2(2007, 4\,985)$, $S_3(2008, 5\,657)$, $S_4(2009, 5\,981)$ i $S_5(2010, 5937)$).

Kao i u prvom slučaju, prema [M2, §6.1.1], pravac $y = kx+l$ će "najbolje" prolaziti kroz zadane točke ako su k i l rješenja preodređenog sustava

$$\begin{array}{rcccl} 2006k & + & l & = & 4\,115 \\ 2007k & + & l & = & 4\,985 \\ 2008k & + & l & = & 5\,657 \\ 2009k & + & l & = & 5\,981 \\ 2010k & + & l & = & 5\,937 \end{array},$$

ili u matričnom obliku

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 2006 & 1 \\ 2007 & 1 \\ 2008 & 1 \\ 2009 & 1 \\ 2010 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4\,115 \\ 4\,985 \\ 5\,657 \\ 5\,981 \\ 5\,937 \end{bmatrix}.$$

Vrijedi

$$A^T A = \begin{bmatrix} 20\,160\,330 & 10\,040 \\ 10\,040 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad A^T b = \begin{bmatrix} 53\,568\,040 \\ 26\,675 \end{bmatrix},$$

pa normalna jednadžba glasi

$$\begin{bmatrix} 20\,160\,330 & 10\,040 \\ 10\,040 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 53\,568\,040 \\ 26\,675 \end{bmatrix}.$$

Rješenje jednadžbe je

$$\begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b} = \frac{1}{50} \begin{bmatrix} 5 & -10\,040 \\ -10040 & 20\,160\,330 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 53\,568\,040 \\ 26\,675 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 464 \\ -926\,377 \end{bmatrix}.$$

Prema tome, jednadžba regresijskog pravca je

$$y = 464x - 926\,377,$$

a broj utrošenih minuta na pozive u pokretnoj mreži (koji se s vremenom povećava) u 2012. godini bi trebao biti otprilike

$$y(2012) = 464 \cdot 2012 - 926\,377 = 7\,191.$$

6.2 QR rastav

6.2.1 QR rastav vektora i matrice

(a) Zadana je točka $T(10, 20, 20)$. Odredite točku T' na negativnom dijelu osi x tako da bude $\|\mathbf{r}_T\| = \|\mathbf{r}_{T'}\|$. Odredite odgovarajuću Householderovu matricu H koja će vektor $\mathbf{r}_T$ preslikati u $\mathbf{r}_{T'}$.

(b) Primjenom Householderovih transformacija matricu

$$\begin{bmatrix} 10 & 9 & 18 \\ 20 & -15 & -15 \\ 20 & -12 & 51 \end{bmatrix}$$

transformirajte u gornju trokutastu matricu.

Rješenje.

(a) Norma radij vektora $\mathbf{r}_T = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 20 \end{bmatrix}$ točke $T(10, 20, 20)$ je $\|\mathbf{r}_T\|_2 = 30$.

Budući de se točka T' nalazi na negativnom dijelu osi apscisa, ordinata i aplikata su joj 0. Od ishodišta je jednako udaljena kao i točka T, pa joj je apscisa -30, odnosno $T'(-30, 0, 0)$.

Sada vektor $\mathbf{r}_T$ moramo zarotirati u $\mathbf{r}_{T'}$, što znači da moramo pronaći matricu H za koju je

$$H \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -30 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Prema [M2, §6.2.1], takva matrica H je dana s $H = I - \dfrac{2}{\mathbf{v}^T\mathbf{v}}\mathbf{v}\mathbf{v}^T$, gdje je $\mathbf{v} = \mathbf{r}_T - \mathbf{r}_{T'}$. Dakle,

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 40 \\ 20 \\ 20 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad H = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Lako se provjeri da je

$$H\mathbf{r}_T = \begin{bmatrix} -30 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(b) QR rastav matrice nalazimo uzastopnom primjenom QR rastava vektora, [M2, §6.2.2].

U prethodnom zadatku pronašli smo Householderov reflektor

$$H = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

koji prvi stupac matrice A rotira u vektor $\begin{bmatrix} -30 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Kod QR rastava vektora, matrica Q je upravo Householderov reflektor, pa je QR rastav prvog stupca matrice A

$$\begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 20 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -30 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Označimo $H_1 = Q_1 = H$. Vrijedi

$$Q_1 A = \left[\begin{array}{c|cc} -30 & \times & \times \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{A_2}} \\ 0 & & \end{array}\right] = \begin{bmatrix} -30 & 15 & -30 \\ 0 & -12 & -39 \\ 0 & -9 & 27 \end{bmatrix}.$$

Sada pronađimo Householderov reflektor H_2 pridružen prvom stupcu $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -12 \\ -9 \end{bmatrix}$ matrice $A_2 = \begin{bmatrix} -12 & -39 \\ -9 & 27 \end{bmatrix}$.

Norma vektora $\mathbf{a}_2$ je $\|\mathbf{a}_2\|_2 = 15$, što znači da vektor $\mathbf{a}_2$ treba zarotirati u $\begin{bmatrix} \pm 15 \\ 0 \end{bmatrix}$. Predznak se u praksi (zbog numeričke stabilnosti) bira tako da se izbjegne oduzimanje. U našem slučaju to je $+$.

Dakle,

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -12 \\ -9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -27 \\ -9 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad H_2 = I - \frac{2}{\mathbf{v}_2^T \mathbf{v}_2} \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2^T = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Stavimo

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & \\ & H_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -3 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Sada je

$$Q_2 Q_1 A = \begin{bmatrix} -30 & 15 & -30 \\ 0 & 15 & 15 \\ 0 & 0 & 45 \end{bmatrix} = R.$$

Matrica Q je jednaka

$$Q_1 Q_2 = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} -5 & 14 & 2 \\ -10 & -5 & -10 \\ -15 & -2 & 11 \end{bmatrix},$$

i QR rastav matrice A glasi

$$\begin{bmatrix} 10 & 9 & 18 \\ 20 & -15 & -15 \\ 20 & -12 & 51 \end{bmatrix} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} -5 & 14 & 2 \\ -10 & -5 & -10 \\ -15 & -2 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -30 & 15 & -30 \\ 0 & 15 & 15 \\ 0 & 0 & 45 \end{bmatrix}$$

6.2.2 Rješavanje problema najmanjih kvadrata uz pomoć QR rastava

Metodom najmanjih kvadrata uz pomoć QR algoritma riješite preodređeni sustav $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Rješenje.

Pronađimo najprije QR rastav matrice A.

$\mathbf{a}_1 = [2 \;\; 0 \;\; 2 \;\; 1]^T$ trebamo zarotirati u $\mathbf{b}_1 = [-3 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0]^T$ jer je $\|\mathbf{a}_1\| = 3$.

$\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_1 - \mathbf{b}_1 = [5 \;\; 0 \;\; 2 \;\; 1]^T$ i

$$H_1 = Q_1 = I - \frac{2}{\mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^T = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} -10 & 0 & -10 & -5 \\ 0 & 15 & 0 & 0 \\ -10 & 0 & 11 & -2 \\ -5 & 0 & -2 & 14 \end{bmatrix}.$$

Vrijedi

$$Q_1 A = \left[\begin{array}{c|c} -3 & \times \\ \hline 0 & \\ 0 & A_2 \\ 0 & \end{array} \right] = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5} \\ 0 & \frac{8}{5} \end{bmatrix}.$$

Sada pronađimo Householderov reflektor H_2 pridružen vektoru $A_2 = \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{6}{5} \\ \frac{8}{5} \end{bmatrix}$

Norma vektora $\mathbf{a}_2$ je $\|\mathbf{a}_2\|_2 = 2$, što znači da vektor $\mathbf{a}_2$ treba zarotirati u $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Dakle,

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{a}_2 - \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{6}{5} \\ \frac{8}{5} \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad H_2 = I - \frac{2}{\mathbf{v}_2^T \mathbf{v}_2} \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2^T = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 0 & -15 & -20 \\ -15 & 16 & -12 \\ -20 & -12 & 9 \end{bmatrix}.$$

Stavimo

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & \\ & H_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -15 & -20 \\ 0 & -15 & 16 & -12 \\ 0 & -20 & -12 & 9 \end{bmatrix}.$$

Sada je

$$Q_2Q_1A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = R.$$

Matrica Q je jednaka

$$Q_1Q_2 = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} -10 & 10 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -9 & -12 \\ -10 & -5 & 8 & -6 \\ -5 & -10 & -8 & 6 \end{bmatrix},$$

i QR rastav matrice A glasi

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} -10 & 10 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -9 & -12 \\ -10 & -5 & 8 & -6 \\ -5 & -10 & -8 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Riješimo sada sustav $Ax = b$. Zamijenimo li A s QR, zbog ortogonalnosti matrice Q vrijedi

$$QRx = b,$$

odnosno

$$Rx = Q^T b.$$

Prema [M2, §6.2.4], dovoljno je riješiti sustav

$$R_0 x = Q_0^T b,$$

gdje su

$$R_0 = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad Q_0 = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} -10 & 10 \\ 0 & 0 \\ -10 & -5 \\ -5 & -10 \end{bmatrix}.$$

Vrijedi

$$Q_0^T b = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} -10 & 0 & -10 & -5 \\ 10 & 0 & -5 & -10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

i rješenje sustava

$$\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

a time ujedno i rješenje polaznog sustava u smislu najmanjih kvadrata je

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{4}{9} \end{bmatrix}.$$

6.2.3 Zadaci za vježbu

1. Metodom najmanjih kvadrata nađite funkciju oblika $y(x) = a \ln x + b$ koja aproksimira sljedeći skup podataka (točaka):

x_i	1	2	3	4	5
y_i	0.5	1.7	2.4	2.9	3.3

2. Metodom najmanjih kvadrata nađite funkciju oblika $y(x) = a\sqrt{x} + b$ koja aproksimira sljedeći skup podataka (točaka):

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1.7	2.4	2.9	3.2	3.6

3. Izračunajte QR rastav matrice
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

4. Neka je $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

   a) Izračunajte QR rastav matrice A;

   b) Koristeći QR rastav riješite sustav $Ax = \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}$.

5. Neka je $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -4 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

   a) Izračunajte QR rastav matrice A;

   b) Koristeći QR rastav riješite sustav $Ax = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$.

6. Neka je $A = \begin{bmatrix} 12 & 10 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \\ 4 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

   a) Izračunajte QR rastav matrice A;

   b) Koristeći QR rastav riješite sustav $Ax = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

7. Zadane su točke u ravnini:

   $(1, 3.5)$, $(2, 4.9)$, $(3, 6.8)$, $(4, 9.3)$, $(5, 10.9)$, $(6, 13.4)$, $(7, 15.1)$, $(8, 16.7)$, $(9, 19)$.

   Aproksimirajte točke pravcem $y = a_0 + a_1x$ metodom najmanjih kvadrata koristeći QR rastav matrice.

8. Odredite $\mathbf{x}$ koji minimizira normu $||A\mathbf{x} - \mathbf{b}||_2$ koristeći metodu najmanjih kvadrata uz pomoć QR rastava.

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 10 \\ 0 & 3 \\ 4 & -10 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \quad , \quad b = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

6.2.4 Rješenja zadataka za vježbu

1. $y(x) = 1.736857 \ln x + 0.497221$

2. $y(x) = 1.511312\sqrt{(}x) + 0.226336$

3. $A = QR = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

4. $A = QR = \dfrac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 7 & 8 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \dfrac{1}{9} \begin{bmatrix} 25 \\ 16 \\ -14 \end{bmatrix}$

5. $A = QR = \begin{bmatrix} -0.6 & 0.64 & 0.48 \\ 0 & 0.6 & -0.8 \\ 0.8 & 0.48 & 0.36 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

6. $A = QR = \dfrac{1}{999999} \begin{bmatrix} 857142 & -285714 & -428571 \\ 428571 & 857142 & 285714 \\ 285714 & -428571 & 857142 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 & 12 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$

   $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

7. $y = 1.225 + 1.968333x$

8. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 31 \end{bmatrix}$