Зад: Испитати и графички представити функцију

$$f(x) = \arcsin \frac{1-x}{1-2x}.$$

Решење:

1° Д.П. $1-2x \neq 0 \ \wedge \ -1 \leq \dfrac{1-x}{1-2x} \leq 1$

$$\underbrace{x \neq \frac{1}{2}, \quad -1 \leq \frac{1-x}{1-2x} \ \wedge \ \frac{1-x}{1-2x} \leq 1}$$

$$\frac{1-x}{1-2x} + 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{2-3x}{1-2x} \geq 0 \Rightarrow \underbrace{x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{2}{3}, +\infty\right)}_{R_1}$$

$$\frac{1-x}{1-2x} - 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{x}{1-2x} \leq 0 \Rightarrow \underbrace{x \in (-\infty, 0] \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)}_{R_2}$$

Д.П је $R_1 \cap R_2$: $\boxed{x \in (-\infty, 0] \cup \left[\frac{2}{3}, +\infty\right)}$

2° НУЛЕ ФУНКЦИЈЕ

$$f(x) = 0 \Rightarrow \arcsin \frac{1-x}{1-2x} = 0 \Rightarrow 1-x = 0 \Rightarrow x = 1$$

тј. $(1, 0)$

3° ПРЕСЈЕК СА y-ОСОМ

$$x = 0 \Rightarrow \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}, \quad \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

4° ПАРНОСТ

$$f(-x) = \arcsin \frac{1+x}{1+2x}$$, није ни парна ни непарна

5° ЗНАК

$$\arcsin \frac{1-x}{1-2x} > 0 \Rightarrow \frac{1-x}{1-2x} > 0 \Rightarrow x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty)$$

$$\boxed{f(x) > 0 \quad , x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)}$$

$$f(x) < 0 \Rightarrow \frac{x-1}{2x-1} < 0 \Rightarrow x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

$$\boxed{f(x) < 0 \ , \ x \in \left(\frac{2}{3}, 1\right)}$$

6° АСИМПТОТЕ

- вертикалну асимптоту нема

$$f(0) = \frac{\pi}{2}, \qquad f\left(\frac{2}{3}\right) = \arcsin \frac{1-\frac{2}{3}}{1-\frac{4}{3}} = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$$

- коса

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\overbrace{\arcsin \frac{1-x}{1-2x}}^{\to \frac{\pi}{6}}}{x} = 0$$, нема к. а.

- хоризонтална

$$y = \lim_{x \to \pm\infty} \arcsin \frac{1-x}{1-2x} = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

па је хоризонтална асимптота $y = \frac{\pi}{6}$, $x \to \pm\infty$

7° ЕКСТРЕМИ И МОНОТОНОСТ

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x}{1-2x}\right)^2}}\cdot\frac{-(1-2x)+2(1-x)}{(1-2x)^2}=\frac{|1-2x|}{\sqrt{3x^2-2x}}\cdot\frac{1}{(1-2x)^2}$$

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(1-2x)\sqrt{x(3x-2)}}, & x\in(-\infty,0)\\[2ex] -\dfrac{1}{(1-2x)\sqrt{x(3x-2)}}, & x\in\left(\frac{2}{3},+\infty\right)\end{cases}$$

ФУНКЦИЈА НЕМА ЕКСТРЕМА

$f'(x)>0$ за $x\in(-\infty,0)$ $\Rightarrow$ $f(x)\nearrow$

$f'(x)>0$ и за $x\in(2/3,+\infty)$, $f(x)\nearrow$

8° ПРЕВОЈНЕ ТАЧКЕ, КОНВЕКСНОСТ И КОНКАВНОСТ

$$f''(x)=\begin{cases}\dfrac{12x^2-9x+1}{(1-2x)^2(3x^2-2x)^{3/2}}, & x\in(-\infty,0)\\[2ex] -\dfrac{12x^2-9x+1}{(1-2x)^2(3x^2-2x)^{3/2}}, & x\in\left(\frac{2}{3},+\infty\right)\end{cases}$$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow 12x^2-9x+1=0$, $x_1\approx 0{,}61 \notin$ Д.П.

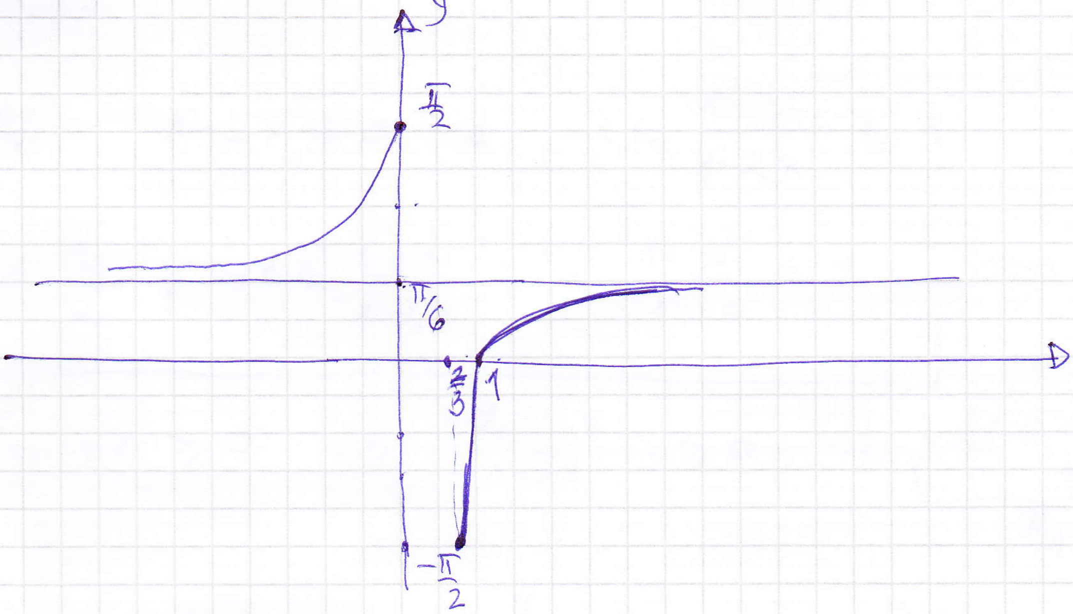
$x_2\approx 0{,}14 \notin$ Д.П.

НЕМА ПРЕВОЈНИХ ТАЧАКА

Знак $f''(x)$ зависи само од $12x^2-9x+1$

па је $f''(x) > 0$ за $x \in (-\infty, 0)$

$f''(x) < 0$ за $x \in (\frac{2}{3}, +\infty)$



ЗАД: ИСПИТАТИ И ГРАФИЧКИ ПРЕДСТАВИТИ ФУНКЦИЈУ $f(x) = \dfrac{x}{1+\ln x}$

1° Д.П. $1+\ln x \neq 0 \;\wedge\; x>0$

$\ln x \neq -1 \Rightarrow x \neq e^{-1}$

$x \in (0, e^{-1}) \cup (e^{-1}, +\infty)$

2° НУЛЕ ФУНКЦИЈЕ

$f(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \notin$ Д.П., ПА ФУНКЦИЈА НЕМА НУЛА

3° ПАРНОСТ

$f(-x) = \dfrac{-x}{1+\ln(-x)}$

НИЈЕ НИ ПАРНА НИ НЕПАРНА МОЖЕМО ЗАКЉУЧИТИ И НА ОСНОВУ Д.П.

4° ЗНАК ФУНКЦИЈЕ

$f(x)>0 \Rightarrow \dfrac{x}{1+\ln x} > 0 \Rightarrow 1+\ln x > 0 \Rightarrow$

$\ln x > -1 \Rightarrow x > e^{-1}$, тј:

$f(x) > 0$ ЗА $x \in (e^{-1}, +\infty)$

$f(x) < 0$ ЗА $x \in (0, e^{-1})$

5° АСИМПТОТЕ:

а) ВЕРТИКАЛНА

$\lim\limits_{x \to \frac{1}{e}-} \dfrac{x}{1+\ln x} = \dfrac{e^{-1}}{\underbrace{1+\ln e^{-1}}_{<0}} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to e^{-1}+} \dfrac{x}{1+\ln x} = \dfrac{e^{-1}}{\underbrace{1+\ln e^{-1}}_{+0}} = +\infty$

$$\lim_{x \to 0_+} \frac{\overset{\to 0}{x}}{\underset{\to -\infty}{1+\ln x}} = 0$$

КОСА АСИМПТОТА

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x}{1+\ln x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\underset{\to +\infty}{1+\ln x}} = 0 \text{, нема косу А.}$$

ХОРИЗОНТАЛНА АСИМПТОТА

$$y = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{1+\ln x} \overset{Л.П.}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = +\infty$$

НЕМА НИ ХОРИЗОНТАЛНУ А.

6° МОНОТОНОСТ И ЕКСТРЕМИ ФУНКЦИЈЕ

$$f'(x) = \frac{1+\ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{(1+\ln x)^2} = \frac{\ln x}{(1+\ln x)^2}$$

$f'(x) = 0 \iff \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$, $(1,1)$

$f'(x) > 0 \Rightarrow \ln x > 0 \Rightarrow x > 1$, $f(x) \nearrow$

$f'(x) < 0 \Rightarrow x < 1$, $f(x) \searrow$

У ТАЧКИ $(1,1)$ ФУНКЦИЈА ИМА МИНИМУМ

7° ПРЕВОЈНЕ ТАЧКЕ И КОНВЕКСНОСТ, КОНКАВНОСТ

$$f''(x) = \frac{\frac{1}{x}(1+\ln x)^{\cancel{2}} - \ln x \cdot 2\cancel{(1+\ln x)} \cdot \frac{1}{x}}{(1+\ln x)^{\cancel{4}}} = \frac{1+\ln x - 2\ln x}{x(1+\ln x)^3}$$

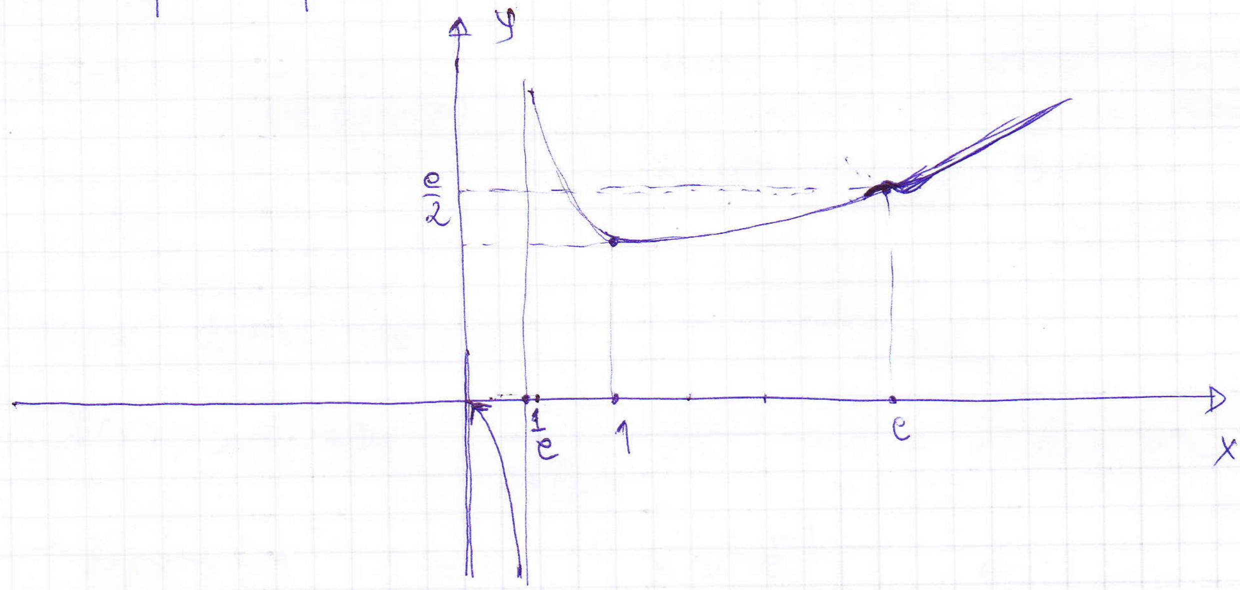
$$f''(x) = \frac{1-\ln x}{x(1+\ln x)^3}$$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e$

$y(e) = \frac{e}{2}$, $(e, \frac{e}{2})$

$f''(x) > 0 \Rightarrow \frac{1 - \ln x}{\underbrace{x}_{>0}(1 + \ln x)} > 0 \overset{A.\Pi.}{\Rightarrow} \frac{1 - \ln x}{1 + \ln x} > 0$

	0 — e^{-1}	e^{-1} — e	e — $+\infty$
$1 - \ln x$	+	+	−
$1 + \ln x$	−	+	+
f''	−	+	−
f	$\cap$	$\cup$	$\cap$



(И.З.) **ЗАД 4.** Испитати и графички представити функцију

$$f(x) = \arcsin \frac{x^2}{\sqrt{2x^4-2x^2+1}}$$

Решење:

1° Д.П.

$$-1 \le \frac{x^2}{\sqrt{2x^4-2x^2+1}} \le 1 \quad \Big/ \cdot \sqrt{2x^4-2x^2+1} > 0 \text{ за } \forall x \in \mathbb{R}$$

$$-\sqrt{2x^4-2x^2+1} \le x^2 \quad T$$

и

$$x^2 \le \sqrt{2x^4-2x^2+1} \quad \Big/^2$$

$$x^4 \le 2x^4-2x^2+1 \Rightarrow x^4-2x^2+1 \ge 0 \Rightarrow (x^2-1)^2 \ge 0 \quad T$$

тј. Д.П. $\forall x \in \mathbb{R}$

2° Нуле

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \arcsin \frac{x^2}{\sqrt{2x^4-2x^2+1}} = 0 \Leftrightarrow \boxed{x=0}$$

3° Парност

$$f(-x) = f(x) \quad \text{– парна}$$

4° Знак

$$f(x) > 0, \ \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{јер је} \quad \frac{x^2}{\sqrt{2x^4-2x^2+1}} > 0$$

$$\arcsin \frac{x^2}{\sqrt{2x^4-2x^2+1}} > 0$$

јер arcsin – је растућа функ.

5° асимптоти

нема В.А.

Коса

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\arcsin \frac{x^2}{\sqrt{2x^4-2x^2+1}}}{x} = 0 \qquad \frac{\pi}{4} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}$$

нема К.А.

Х.А.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \arcsin \frac{x^2}{\sqrt{2x^4-2x^2+1}} = \frac{\pi}{4}$$

6° екстреми

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^4}{2x^4-2x^2+1}}} \cdot \frac{2x\sqrt{2x^4-2x^2+1} - x^2 \cdot \frac{\cancel{8}^{4}x^3-\cancel{4}^{2}x}{\cancel{2}\sqrt{2x^4-2x^2+1}}}{2x^4-2x^2+1}$$

$$= \frac{\cancel{\sqrt{2x^4-2x^2+1}}}{\sqrt{x^4-2x^2+1}} \cdot \frac{2x(2x^4-2x^2+1) - x^2(4x^3-2x)}{(2x^4-2x^2+1)\cdot\cancel{\sqrt{2x^4-2x^2+1}}}$$

$$= \frac{\cancel{4x^5}-4x^3+2x-\cancel{4x^5}+2x^3}{\sqrt{(x^2-1)^2}\;(2x^4-2x^2+1)} = \frac{-2x^3+2x}{|x^2-1|\,(2x^4-2x^2+1)} = \frac{2x(1-x^2)}{|x^2-1|\,(2x^4-2x^2+1)}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-2x}{\underbrace{2x^4-2x^2+1}_{>0}}, & x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty) \\[2ex] \dfrac{2x}{\underbrace{2x^4-2x^2+1}_{>0}}, & x\in(-1,1) \end{cases}$$

	$-\infty$	-1		0		1		$+\infty$
f'	$+$	Н.В.	$-$		$+$	Н.В.	$-$	
f	$\nearrow$	$\wedge$	$\searrow$	$\cup$	$\nearrow$	$\wedge$	$\searrow$	

$f(\pm 1) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$

7° превојне тачке

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{2(6x^4-2x^2-1)}{(2x^4-2x^2+1)^2}, & x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty) \\ -\frac{2(6x^4-2x^2-1)}{(2x^4-2x^2+1)^2}, & x \in (-1,1) \end{cases}$$

$f''(x) = 0 \iff 6x^4 - 2x^2 - 1 = 0$

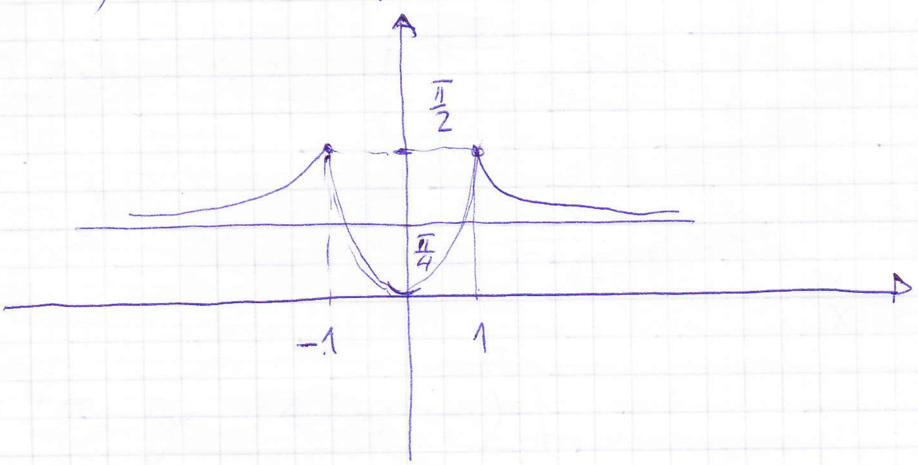
смјена: $x^2 = t$, $6t^2 - 2t - 1 = 0$

$t_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+24}}{12} = \frac{2 \pm 2\sqrt{7}}{12} = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{6}$

$x^2 = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{6}$, $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{6}}$

$x_{3,4}$ – комплексна рјешења

$x_1 \approx 0{,}78$, $x_2 \approx -0{,}78$



$\boxed{5.}$ 1° Д.П. $1-x \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$, тј. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

2° НУЛЕ, $f(x)=0 \Rightarrow 1-\dfrac{1}{e^x(1-x)}=0 \Rightarrow e^x(1-x)=1 \Rightarrow \boxed{x=0}$

3° ПАРНОСТ $f(-x)=1-\dfrac{1}{e^{-x}(1+x)}$ НИЈЕ НИ ПАРНА НИ НЕПАРНА

4° АСИМПТОТЕ:

В.А. $\lim\limits_{x \nearrow 1}\left(1-\dfrac{1}{e^x(1-x)}\right)=1-\dfrac{1}{e\cdot(+0^+)}=-\infty$

$\lim\limits_{x \downarrow 1}\left(1-\dfrac{1}{e^x(1-x)}\right)=1-\dfrac{1}{e(-0)}=+\infty$

КОСА $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1-\frac{1}{e^x(1-x)}}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x x(1-x)}\right)$

$k_1=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\cancel{\dfrac{1}{x}}^{\,0}-\cancel{\dfrac{1}{e^x x(1-x)}}^{\,0}\right)=0$, $k_2=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\cancel{\dfrac{1}{x}}^{\,0}-\dfrac{1}{\underset{0}{e^x}\underset{\infty}{x(1-x)}}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{e^{-x}}{x-x^2}\right)\frac{\infty}{\infty}$

$k_2=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{e^{-x}}{1-2x}\right)\overset{L.P.}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-e^{-x}}{-2}=\infty$

нема косу асимптоту

ХОРИЗОНТАЛНА

$h_1=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\cancel{\dfrac{1}{e^x(1-x)}}^{\,0}\right)=1$, $h_1=1$

$h_2=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\dfrac{1}{\underset{0}{e^x}\underset{+\infty}{(1-x)}}\right)=1-\lim\limits_{x\to-\infty}\underbrace{\dfrac{e^{-x}}{1-x}}_{\frac{\infty}{\infty}}\overset{Л.П.}{=}1-\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-e^{-x}}{-1}^{\,+\infty}$

$=1-\infty=-\infty$

ИМА ХОРИЗОНТАЛНУ АСИМПТОТУ $y=1$ ЗА $x\to+\infty$,

А КАДА $x\to-\infty$ НЕМА

Екстрем

$$f'(x) = \left(1 - \frac{e^{-x}}{1-x}\right)' = -\left(\frac{e^{-x}}{1-x}\right)' = \frac{-e^{-x}(1-x) + e^{-x}}{(1-x)^2} = -\frac{x e^{-x}}{(1-x)^2}$$

$f'(x) = 0, \quad x = 0$

$f'(x) > 0$ за $x < 0 \Rightarrow f(x) \nearrow$

$f'(x) < 0$ за $x > 0 \Rightarrow f(x) \searrow$

па у тачки $(0,0)$ имамо максимум

Превојне тачке

$$f''(x) = -\frac{(e^{-x} - xe^{-x})(1-x)^{\cancel{2}} + 2xe^{-x}\cancel{(1-x)}}{(1-x)^{\cancel{4}}} = -\frac{e^{-x}(1+x^2)}{(1-x)^3}$$

Нема превојних тачака

$f''(x) > 0 \Rightarrow \frac{1}{x-1} > 0 \Rightarrow x > 1 \quad \cup$

$f''(x) < 0 \Rightarrow \frac{1}{x-1} < 0 \Rightarrow x < 1 \quad \cap$

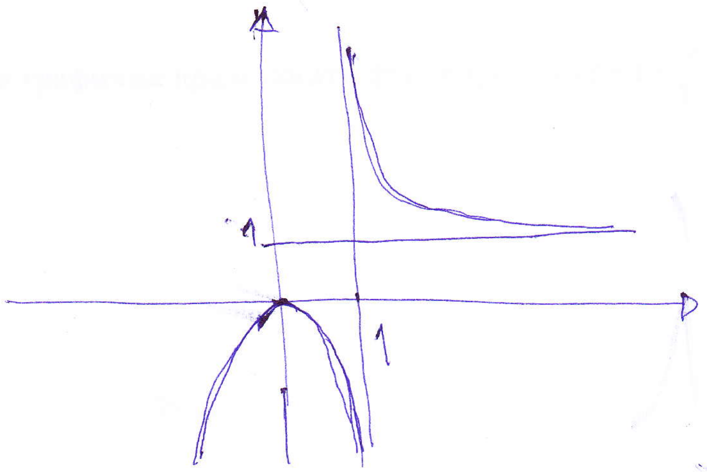
Знак

$f(x) > 0 \Rightarrow 1 - \frac{e^{-x}}{1-x} > 0 \Rightarrow 1 > \frac{e^{-x}}{1-x} \;/\cdot e^{x} \Rightarrow e^{x} > \frac{1}{1-x} \Rightarrow$

$1 - x < 0 \Rightarrow \boxed{1 < x}$

$f(x) < 0 \Rightarrow 1 < \frac{e^{-x}}{1-x} \Rightarrow e^{x} < \frac{1}{1-x} \Rightarrow 1 - x > 0$

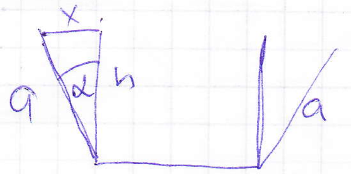
$\Rightarrow \boxed{1 > x}$



$f(x) = 1 - \frac{e^{-x}}{1-x}$

Зад2: Од три једнаке даске ширине a треба направити жлијеб највећег ~~попр~~ попречног пресјека.

Рјешење:



$P_1 = m \cdot h$

m – средња линија трапеза

$m = \frac{a+a+2x}{2} = a+x$, $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}]$

$\cos\alpha = \frac{h}{a} \Rightarrow h = a \cdot \cos\alpha$

$\sin\alpha = \frac{x}{a} \Rightarrow x = a\sin\alpha$

$P(\alpha) = (a+x)\cdot h = (a+a\sin\alpha)\cdot a\cos\alpha = a^2\cos\alpha(1+\sin\alpha)$

$$\begin{aligned}P'(\alpha) &= a^2[-\sin\alpha(1+\sin\alpha)+\cos^2\alpha] \\ &= a^2(-\sin\alpha-\sin^2\alpha+\cos^2\alpha) \\ &= a^2(-\sin\alpha-\sin^2\alpha+1-\sin^2\alpha) \\ &= a^2(-2\sin^2\alpha-\sin\alpha+1)\end{aligned}$$

$P'(\alpha) = 0 \Rightarrow -2\sin^2\alpha - \sin\alpha + 1 = 0$

$(\sin\alpha)_{1/2} = \frac{1\pm 3}{-4}$, $(\sin\alpha)_1 = -1$, $(\sin\alpha)_2 = \frac{1}{2}$

$\underbrace{\alpha_1 = \frac{3\pi}{2}}_{\notin (0,\frac{\pi}{2}]}$ $\qquad$ $\underbrace{\alpha_2 = \frac{\pi}{6} \in (0, \frac{\pi}{2}]}_{\text{што максимализу ов.}}$

$h = a\cdot\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, $x = \frac{a}{2}$

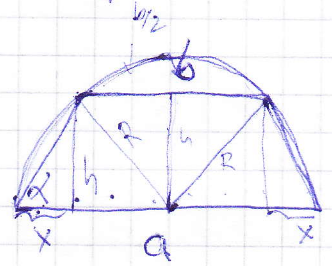
$P = (a+\frac{a}{2})\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$, $P''(\alpha_2) < 0$

ПРИМЈЕНА ИЗВОДА

к.з. 28.01.2011.

У полукруг полупречника R уписан је трапез чија је већа основица пречник круга. Одредити угао на основици трапеза тако да му површина буде максимална.

РЈЕШЕЊЕ:



$\alpha = ?$ $\quad P_{max}$

$a = 2R \quad , \quad b = 2R - 2x$

$P = \frac{a+b}{2} \cdot h \quad , \quad tg\alpha = \frac{h}{x}$

$a+b = 2R + 2R - 2x = 4R - 2x$

$R^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + h^2 \Rightarrow \boxed{h = \sqrt{R^2 - \frac{b^2}{4}}} \quad \boxed{x = \frac{2R-b}{2}}$

$a+b = 4R - 2R + b = 2R + b$

$P = \frac{2R+b}{2} \cdot \frac{\sqrt{4R^2-b^2}}{2} = \frac{2R+b}{4}\sqrt{4R^2-b^2}$, b − непознато

$P'_b = \frac{1}{4}\sqrt{4R^2-b^2} + \frac{2R+b}{4} \cdot \frac{-2b}{\cancel{2}\sqrt{4R^2-b^2}} = \frac{1}{4} \frac{4R^2-b^2-2Rb-b^2}{\sqrt{4R^2-b^2}}$

$P'_b = 0 \Rightarrow -b^2 - 2Rb + 4R^2 = 0 \quad / : (-2)$

$b^2 + Rb - 2R^2 = 0 \Rightarrow b_{1,2} = \frac{-R \pm \sqrt{9R^2}}{2}$

$\boxed{b_1 = R} \quad \cancel{b_2 = -2R}$

$\boxed{h = \frac{\sqrt{3}}{2}R} \quad \boxed{x = \frac{R}{2}}$

$tg\alpha = \sqrt{3} \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{\pi}{3}}$