ЗАД1: Испитати и графички представити функцију $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{x+1}{x}$.

Рјешење:

1° Д.П. $x \neq 0$, $\forall x \in R\setminus\{0\}$

2° Нуле функције: $f(x)=0 \iff \operatorname{arctg}\frac{x+1}{x} = 0 \Rightarrow \frac{x+1}{x} = 0 \Rightarrow \underline{x=-1}$

$(-1,0)$ нула функције

3° парност функције

$f(-x) = \operatorname{arctg}\frac{-x+1}{-x} = \operatorname{arctg}\frac{x-1}{x}$, није ни парна ни непарна

4° знак функције

$f(x) > 0 \Rightarrow \operatorname{arctg}\frac{x+1}{x} > 0 \xrightarrow{\operatorname{arctg} \text{ је растућа}} \frac{x+1}{x} > 0$

$x \in (-\infty,-1) \cup (0,+\infty)$

$f(x) < 0 \Rightarrow x \in (-1,0)$

5° асимптоте

В.А.

$\lim\limits_{x\to 0_+} \operatorname{arctg}\underbrace{\frac{x+1}{x}}_{\to+\infty} = \frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to 0_-} \operatorname{arctg}\underbrace{\frac{x+1}{x}}_{\to-\infty} = -\frac{\pi}{2}$

Нема вертикалних асимптота

Х.А.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \operatorname{arctg}\underbrace{\frac{x+1}{x}}_{\to 1} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$; $y = \frac{\pi}{4}$ хоризонталне асимптоте за $x \to \pm\infty$

Нема косу асимптоту

6° екстреми и монотоност функције

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{x}\right)^2} \cdot \frac{x-x-1}{x^2} = \frac{x^2}{2x^2+2x+1} \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{-1}{2x^2+2x+1}$$

Нема екстрема

$f'(x) < 0$, $\forall x \in$ Д.П. па је функција опадајућа

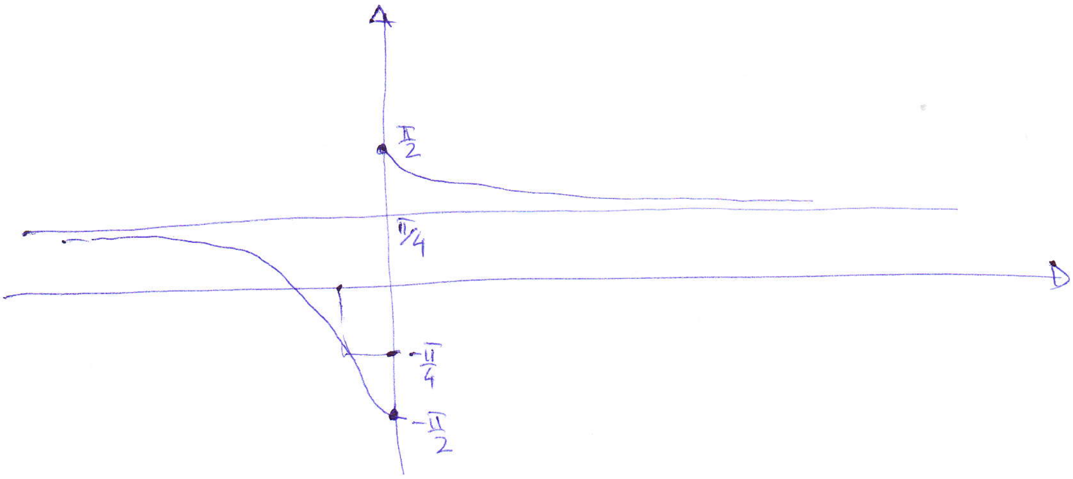
7° превојне тачке; конвексност и конкавност

$$f''(x) = \frac{4x+2}{(2x^2+2x+1)^2} = \frac{2(2x+1)}{(2x^2+2x+1)^2}$$

$f''(x)=0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$ $\quad$ $\left(-\frac{1}{2}, f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$ превојна тачка

$f''(x)>0$ за $x > -\frac{1}{2}$ $\cup$ $\quad$ $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$

$f''(x)<0$ за $x < -\frac{1}{2}$ $\cap$



Зад2: Испитати и графички представити функцију
$f(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$

Рјешење:

1° Д.П. $\quad x+\sqrt{x^2+1} > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2+1} > -x$, за $x \geq 0$ неједнакост је тачна

за $x<0 \Rightarrow \sqrt{x^2+1} > -x \;|^2$
$x^2+1 > x^2 \Rightarrow 1>0$

Дакле $f(x)$ дефинисано $\forall x \in R$.

2° нуле функције

$f(x)=0 \Rightarrow \ln(x+\sqrt{x^2+1}) = 0 \Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+1} = 1 \Rightarrow$

$\sqrt{x^2+1} = 1-x \;|^2$ за $1-x \geq 0$

$\cancel{x^2}+\cancel{1} = \cancel{1}-2x+\cancel{x^2}$

$x=0$ $\quad$ $(0,0)$ нула функције

3° парност

$f(-x) = \ln(-x+\sqrt{x^2+1})$, није ни парна ни непарна

4° знак

$f(x) > 0$,

$\ln(x+\sqrt{x^2+1}) > 0 \Rightarrow x+\sqrt{x^2+1} > 1 \Rightarrow \sqrt{x^2+1} > 1-x$

а) $1-x<0$ $(x>1)$ неједнакост је тачна

б) $1-x>0$, $(x<1)$ $\cancel{x^2}+\cancel{1} > \cancel{1}-2x+\cancel{x^2} \Rightarrow 0>-2x$

тачно за $x\in(0,1)$

<u>па је $f(x)>0$ за $x\in(0,+\infty)$</u>

$f(x)<0 \Rightarrow x+\sqrt{x^2+1}<1$

$\sqrt{x^2+1}<1-x$, за $1-x<0$ $(1<x)$ немогуће

за $x<1$, $x^2+1<1-2x+x^2$

$0<-2x$ и је тачно за <u>$x<0$</u>

значи $f(x)<0$ за $x\in(-\infty,0)$

5° асимптоте

В.А. нема

Х.А.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \ln\overset{+\infty}{(x+\sqrt{x^2+1})} = +\infty$ нема Х.А.

К.А.

$k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{x} \overset{\text{Л.П.}}{=} \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}}{1} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{\cancel{\sqrt{x^2+1}+x}}{\sqrt{x^2+1}}}{\cancel{x+\sqrt{x^2+1}}} = 0$

Нема косу асимптоту.

6° екстреми и монотоност

$f'(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$f'(x) \neq 0$, нема екстрема

$f'(x) > 0$ па је $f(x) \nearrow \quad \forall x \in R$

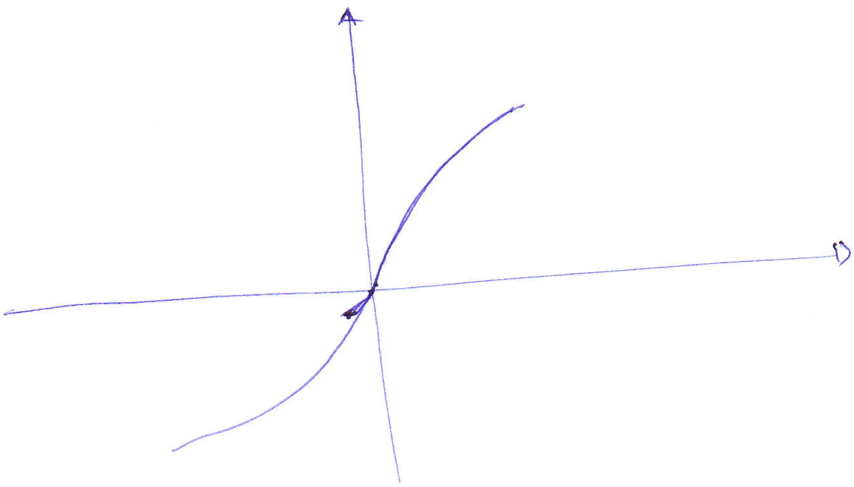
7° превојне тачке; конвексности и конкавности

$$f''(x) = \frac{-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = -\frac{x}{(x^2+1)^{3/2}}$$

$f''(x) = 0 \iff x = 0$ $\qquad (0,0)$ превојне тачке

$f''(x) > 0$ за $x < 0$ $\quad \cup$

$f''(x) < 0$ за $x > 0$ $\quad \cap$



ЗАД 3: Испитати и графички представити функцију

$$f(x) = x + 2 - \sqrt{x^2+x-2}.$$

Решење:

1° Д.П. $x^2+x-2 \geq 0$, $(x+2)(x-1) \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$

2° нуле функције

$f(x) = 0 \iff$ $x+2 = \sqrt{x^2+x-2} \;\Big|^2 \quad (x \geq -2)$

$x^2+4x+4 = x^2+x-2$

$3x = -6$

$\boxed{x = -2}$ $\qquad (-2,0)$ нула функције

3° парност

$f(-x) = -x+2-\sqrt{x^2-x-2}$, није ни парна ни непарна

4° знак

$f(x)>0 \iff x+2-\sqrt{x^2+x-2}>0$

$x+2>\sqrt{x^2+x-2} \quad /^2 \qquad x>-2$

$x^2+4x+4>x^2+x-2$

$\underline{x>-2}$

тј. $f(x)>0$ за $x\in[1,+\infty)$

$\underline{f(x)<0}$, $x+2<\sqrt{x^2+x-2}$, $\underline{x<-2}$

5° асимптоте

в.а. нема

к.а.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+2-\sqrt{x^2+x+2}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+2-|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}}{x}$$

$$k_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2-x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\Big(1+\underbrace{\frac{2}{x}}_{0}-\underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}}_{1}\Big)=0$$

нема косу.

$$m_1=\lim_{x\to+\infty}\left(x+2-\sqrt{x^2+x-2}\right)\cdot\frac{x+2+\sqrt{x^2+x-2}}{-\,''\,-}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}+4x+4-\cancel{x^2}-x+2}{x+2+\sqrt{x^2+x-2}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+6}{x+2+\sqrt{x^2+x-2}}=\frac{3}{2}$$

$y=\frac{3}{2}$ је хоризонтална асимптота за $x\to+\infty$

$$k_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+2+x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\Big(1+\underbrace{\frac{2}{x}}_{0}+\underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}}_{1}\Big)=2$$

$$n_2 = \lim_{x\to-\infty}\left(x+2+x\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}-2x\right) = 2+\lim_{x\to-\infty}\left(x\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}-x\right)$$

$$=2+\lim_{x\to-\infty} x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}-1\right) = 2+\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}-1}{\frac{1}{x}}$$

$$=2+\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{2}\cancel{\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)^{-1/2}}^{1}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right)}{-\frac{1}{x^2}}1 = 2+\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

коса асимптота је $y = 2x+\frac{5}{2}$ за $x\to-\infty$

6° екстреми и монотоност

$$f'(x) = 1-\frac{1}{2}(x^2+x-2)^{-1/2}(2x+1)$$

$$f'(x)=0 \Leftarrow \frac{2x+1}{2(x^2+x-2)^{1/2}} = 1 \Rightarrow 2x+1 = 2\sqrt{x^2+x-2}\ /^2 \quad x>-\frac{1}{2}$$

$(\text{ну}: x>1)$

$$\cancel{4x^2}+\cancel{4x}+1 = \cancel{4x^2}+\cancel{4x}-8$$

$$1=-8 \quad ⊥$$

нема екстрема

7° превојне тачке,

$$f''(x) = \frac{1}{4}(x^2+x-2)^{-3/2}(2x+1)-\frac{1}{\cancel{2}}(x^2+x-2)^{-1/2}\cdot\cancel{2} = \frac{1}{4}(x^2+x-2)^{-3/2}(2x+1)-(x^2+x-2)^{-1/2}$$

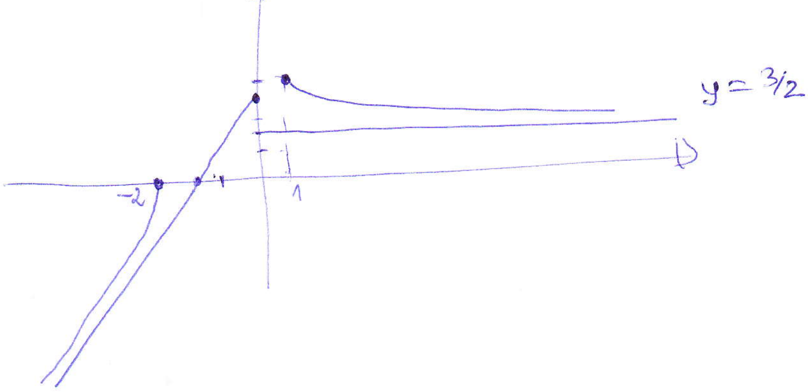
$$f''(x) = \frac{1}{4}(x^2+x-2)^{-3/2}\left(2x+1-4(x^2+x-2)\right) = \frac{1}{4}(x^2+x-2)^{-3/2}(-4x^2-2x+9)$$

$$f''(x)=0 \Leftarrow -4x^2-2x+9=0, \quad x_{1,2} = \frac{2\pm\sqrt{4+16\cdot 9}}{-8} = \frac{2\pm2\sqrt{37}}{-8}$$

$$x_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{37}}{-4}$$

$f(1)=3$

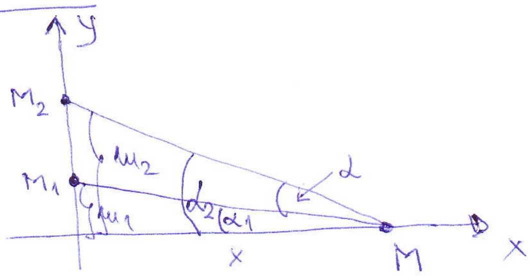
$f(-2)=0$



ПРИМЈЕНА ИЗВОДА

1. Дате су тачке $M_1(0,m_1)$ и $M_2(0,m_2)$, $m_1 \neq m_2$, на позитивном дијелу Oy осе. Одредити тачку M на Ox оси из које се дуж M_1M_2 види под највећим углом.

Рјешење:



$$\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$$

$$tg\alpha_1 = \frac{m_1}{x} \Rightarrow \alpha_1 = arctg\frac{m_1}{x}$$

$$tg\alpha_2 = \frac{m_2}{x} \Rightarrow \alpha_2 = arctg\frac{m_2}{x}$$

$$tg\alpha = tg(\alpha_2-\alpha_1) \Rightarrow \alpha = arctg(tg(\alpha_2-\alpha_1)) = arctg\frac{m_2}{x} - arctg\frac{m_1}{x}$$

$$\alpha'_x = \frac{1}{1+\left(\frac{m_2}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{m_2}{x^2}\right) - \frac{1}{1+\left(\frac{m_1}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{m_1}{x^2}\right)$$

$$\alpha'_x = \frac{\cancel{x^2}}{x^2+(m_2)^2}\left(-\frac{m_2}{\cancel{x^2}}\right) + \frac{\cancel{x^2}}{x^2+(m_1)^2}\cdot\frac{m_1}{\cancel{x^2}} = \frac{-m_2x^2-m_2m_1^2+m_1x^2+m_1m_2^2}{(x^2+m_1^2)(x^2+m_2^2)}$$

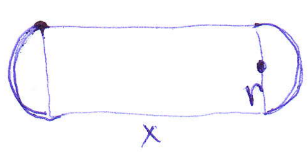
$$\alpha'_x = 0 \Rightarrow x^2(m_1-m_2) + m_1m_2(m_2-m_1) = 0$$

$$x^2\cancel{(m_1-m_2)} = m_1m_2\cancel{(m_1-m_2)}$$

$$\boxed{x = \sqrt{m_1m_2}}$$

2. Тениско игралиште датог обима $2S$ има облик правоугаоника који се са двије супротне стране завршава полукруговима. Одредити димензије игралишта тако да површина правоугаоног дијела буде максимална.

Рјешење:



$$O = 2S \quad , \quad P = x\cdot 2r$$

$$2S = 2r\pi + 2x \Rightarrow S = r\pi + x$$

$$\boxed{x = S - r\pi}$$

$$P = 2r(s - r\pi) = 2rs - 2r^2\pi$$

$$P'_r = 2s - 4r\pi = 0 \Rightarrow 2s = 4r\pi \Rightarrow \boxed{r = \frac{s}{2\pi}}$$

$$x = s - \frac{s}{2\pi}\cdot\pi = \frac{s}{2} \qquad \boxed{x = \frac{s}{2}}$$

$$P = 2\cdot\frac{s}{2\pi}\left(s - \frac{s}{2\pi}\cdot\pi\right) = \frac{s}{\pi}\cdot\frac{s}{2} = \frac{s^2}{2\pi}$$

3. У којој тачки криве $y=\sqrt{1+x^2}$ је њена тангента паралелна са правом $y=\frac{1}{2}x+1$.

Рјешење: Једначина тангенте на криву у тачки (x_0, y_0) је $y - y_0 = f'(x_0)(x-x_0)$

$$y' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad y'(x_0) = \frac{x_0}{\sqrt{1+x_0^2}}$$

Паралелно је са $y = \frac{1}{2}x+1 \Rightarrow \frac{x_0}{\sqrt{1+x_0^2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$$2x_0 = \sqrt{1+x_0^2} \;\Big/^2, \quad x_0 > 0$$

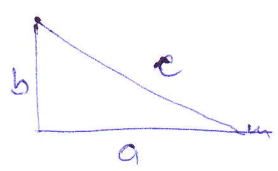
$$4x_0^2 = 1 + x_0^2 \Rightarrow 3x_0^2 = 1 \Rightarrow x_0^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow (x_0)_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}}, \quad f(x_0) = \sqrt{1+\frac{3}{9}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Тражена тачка је $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

4. Збир катета правоуглог троугла је p. Одредити катете тако да хипотенуза буде минимална.

Рјешење:



$$a+b=p$$
$$c^2 = a^2+b^2, \quad a = p-b$$

$$c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{(p-b)^2+b^2} = \sqrt{p^2-2pb+2b^2}$$

$$c'_b = \frac{-2p+4b}{2\sqrt{p^2-2pb+2b^2}} = \frac{-p+2b}{\sqrt{p^2-2pb+2b^2}}$$

$$c'_b = 0 \Rightarrow \boxed{b = \frac{p}{2}} \qquad \boxed{a = \frac{p}{2}}$$

$$c''(b) = \frac{2\sqrt{p^2-2pb+2b^2} - (2b-p)\cdot\frac{2b-p}{\sqrt{p^2-2pb+2b^2}}}{p^2-2pb+2b^2} = \frac{2(p^2-2pb+2b^2)-(2b-p)^2}{(p^2-2pb+2b^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{p^2}{(p^2-2pb+2b^2)^{3/2}}$$

$c''>0$, $a=\frac{p}{2}=b$ има мин.

$$\boxed{c = \frac{\sqrt{2}}{2}p}$$