ИНТЕГРАЛНИ РАЧУН

НЕОДРЕЂЕНИ ИНТЕГРАЛ

Деф 1: Неодређени интеграл функције $f(x)$ дефинисане на интервалу (a,b) дефинишемо

$$\int f(x)dx = F(x) + c \quad (c \text{ – константа}, \ x\in(a,b)),$$

функцију $F(x)$ зовемо примитивна функција функције $f(x)$.

Особине:

- Линеарност

Ако функције f и g имају примитивне функције на интервалу (a,b) тада за $x\in(a,b)$ важи

$$\int(\alpha f(x)+\beta g(x))dx = \alpha\int f(x)dx + \beta\int g(x)dx + c \quad (\alpha,\beta\in\mathbb{R})$$

- Свака функција која је непрекидна на (a,b) има на том интервалу примитивну функцију.
- Примитивна функција и неодређени интеграл на датом интервалу (a,b) су непрекидне и диференцијабилне функције на (a,b).

Примјер 1: Израчунати $\int(x^6-4x^3+2)dx$.

$$\int(x^6-4x^3+2)dx = \int x^6dx - 4\int x^3dx + 2\int dx = \frac{x^7}{7} - 4\cdot\frac{x^4}{4} + 2x + c$$

$$= \frac{x^7}{7} - x^4 + 2x + c$$

Примјер 2: Израчунати $\int(2x^2+1)^3dx$

$$\int(8x^6+3\cdot4x^4+3\cdot2x^2+1)dx = 8\int x^6dx + 12\int x^4dx + 6\int x^2dx + \int dx$$

$$= 8\frac{x^7}{7} + 12\frac{x^5}{5} + 6\frac{x^3}{3} + x + c = 8\frac{x^7}{7} + 12\frac{x^5}{5} + 2x^3 + x + c$$

ПРИМЈЕР 3: ИЗРАЧУНАТИ $\int \frac{(x+1)(x^2-3)}{x^3}dx$

$$\int \frac{x^3-3x+x^2-3}{x^3}dx = \int\left(1-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^3}\right)dx$$

$$= x-3\cdot\frac{x^{-1}}{-1}+\ln|x|-3\frac{x^{-2}}{-2}+C = x+\frac{3}{x}+\ln|x|+\frac{3}{2x^2}+C$$

ПРИМЈЕР 4: ИЗРАЧУНАТИ $\int \frac{(x-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{\sqrt[3]{x}}dx$

$$\int \frac{\cancel{x}+x\sqrt{x}-\sqrt{x}-\cancel{x}}{\sqrt[3]{x}}dx = \int\left(x^{\frac{3}{2}-\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}\right)dx = \int\left(x^{\frac{7}{6}}-x^{\frac{1}{6}}\right)dx$$

$$= \frac{x^{\frac{7}{6}+1}}{\frac{7}{6}+1}-\frac{x^{\frac{1}{6}+1}}{\frac{1}{6}+1}+C = \frac{x^{\frac{13}{6}}}{\frac{13}{6}}-\frac{x^{\frac{7}{6}}}{\frac{7}{6}}+C = \frac{6}{13}x^{\frac{13}{6}}-\frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}}+C$$

ПРИМЈЕР **5**: Наћи $\int f(x)dx$ за $x\in(-\infty,+\infty)$, ако је функција f дефинисана на сљедећи начин

$$f(x)=\begin{cases}2x, & x<0\\ 3x^2, & x\geq 0\end{cases}.$$

РЈЕШЕЊЕ:

$$F(x)=\int f(x)dx=\begin{cases}x^2+C_1, & x<0\\ x^3+C_2, & x\geq 0\end{cases},$$

а како функција $F(x)$ треба да буде непрекидна у свакој тачки, она мора да вриједи $F(0-)=F(0+)$ и добијамо $0+C_1=0+C_2$ тј. $C_1=C_2$

и можемо писати $C_1=C_2=C$ и тиме смо добили да је

$$F(x)=\begin{cases}x^2+C, & x<0\\ x^3+C, & x\geq 0\end{cases}$$

ПРИМЈЕР 6: Дата је функција $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0\\ \cos x-1, & x\geq 0\end{cases}$.

Испитати да ли постоји неодређени интеграл дате функције на R и ако постоји наћи га.

РЈЕШЕЊЕ:

Дата функција има примитивну функцију на R јер је непрекидна у свакој тачки $x\in R$.

$F_1(x)=-\cos x+C_1 \quad (x<0)$

$F_2(x)=\sin x-x+C_2 \quad (x\geq 0)$.

Из услова непрекидности функције у нули слиједи $F_1(0)=F_2(0)$ тј. $-1+C_1=C_2$.

Тиме смо добили

$$F(x)=\begin{cases}-\cos x+C_1, & x<0\\ \sin x-\cancel{x}-1+C_1, & x\geq 0\end{cases}$$

односно $$F(x)=\begin{cases}-\cos x+C\\ \sin x-x+C\end{cases}$$

ПРИМЈЕР 7: Да ли функција f дефинисана на сљедећи начин $f(x)=\begin{cases}2x, & x\leq 1\\ 3x^2, & x\geq 1\end{cases}$ има примитивну функцију на R?

РЈЕШЕЊЕ: $f(x)$ је непрекидна на интервалима $(-\infty,1)$ и $(1,+\infty)$ и на тим интервалима има примитивне функције.

$F_1(x)=x^2+C_1$, $\quad F_2(x)=x^3+C_2$

Претпоставимо да постоји примитивна функција F дате функције на $(-\infty, +\infty)$, тада важи
$F(x) = F_1(x)$ $\quad x<1$ $\quad$ и $\quad F(x) = F_2(x)$ $\quad (x>1)$, а
како $F(x)$ мора бити непрекидна функција у тачки $x=1$, закључујемо да мора да вриједи
$F_1(1) = F_2(1)$.

$1 + C_1 = 1 + C_2 \Rightarrow C_1 = C_2$ одакле је C, па смо добили

$$F(x) = \begin{cases} x^2 + C, & x<1 \\ x^3 + C, & x \geq 1 \end{cases}$$

Међутим овако дефинисана функција нема извод у тачки $x=1$, јер је у тој тачки
$F'_-(1) = 2$, $\quad F'_+(1) = 3$.
Тиме смо показали да функција $f(x)$ нема примитивну функцију на $(-\infty, +\infty)$

СМЈЕНА ПРОМЈЕНЉИВЕ

- СМЈЕНА $x=\varphi(t)$

Ако су функције f, φ и φ' непрекидне, тада је

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt + c$$

- СМЈЕНА $\varphi(x)=t$

Ако функција φ има инверзну функцију $\varphi^{-1}=\psi$ и ако су функције φ, ψ и ψ' непрекидне, тада је

$$\int f(\varphi(x))dx = \int f(t)\psi'(t)dt$$

- ЛИНЕАРНА СМЈЕНА

Ако је $\int f(x)dx = F(x)+c$, тада је

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+c \qquad (a\neq 0)$$

ПРИМЈЕР 1: ИЗРАЧУНАТИ $\int (2x-3)^{10}dx$

$$\left|\begin{array}{ll} \text{смјена:} & 2x-3=t \\ & 2dx=dt \\ & dx=\frac{1}{2}dt \end{array}\right| \quad \int (2x-3)^{10}dx = \int \frac{t^{10}}{2}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{11}}{11}+c$$

$$= \frac{(2x-3)^{11}}{22}+c$$

ПРИМЈЕР 2: ИЗРАЧУНАТИ $\int \sqrt[3]{2+3x}\,dx$

$$\left|\begin{array}{ll} \text{смјена:} & 2+3x=t \\ & dx=\frac{dt}{3} \end{array}\right| \quad \int \sqrt[3]{2+3x}\,dx = \frac{1}{3}\int \sqrt[3]{t}\,dt = \frac{1}{3}\,\frac{t^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}+c$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot t^{4/3}+c = \frac{1}{4}\sqrt[3]{(2+3x)^4}+c$$

ПРИМЈЕР 3: ИЗРАЧУНАТИ $\int \sin 2x\, dx$.

$$\left| \text{смјена: } \begin{array}{l} 2x = t \\ dx = \frac{dt}{2} \end{array} \right| \quad I = \frac{1}{2}\int \sin t\, dt = \frac{1}{2}(-\cos t) + C = \frac{-\cos 2x}{2} + C$$

ПРИМЈЕР 4: ИЗРАЧУНАТИ $\int \frac{dx}{1-x^2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x}, \qquad 1 = A + Ax + B - Bx$$

$$\left.\begin{array}{l} A - B = 0 \\ A + B = 1 \end{array}\right\} + \Rightarrow 2A = 1, \quad \boxed{A = \frac{1}{2}}, \quad \boxed{B = \frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\int \frac{dx}{1-x} + \int \frac{dx}{1+x}\right) = \frac{1}{2}\left(-\ln|1-x| + \ln|1+x|\right) + C$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C}$$

ПРИМЈЕР 5: ИЗРАЧУНАТИ $\int \frac{dx}{2-3x^2}$.

$$I = \int \frac{dx}{2\left(1 - \frac{3}{2}x^2\right)} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1 - \left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{\frac{3}{2}}\, x = t \\ dx = \sqrt{\frac{2}{3}}\, dt \end{array} \right| = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}} \int \frac{dt}{1-t^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C = \frac{1}{4}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{3}{2}}x}{1-\sqrt{\frac{3}{2}}x}\right| + C$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}x}{\sqrt{2}-\sqrt{3}x}\right| + C = \underbrace{\frac{\sqrt{6}}{12}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}x}{\sqrt{2}-\sqrt{3}x}\right| + C}$$

ПРИМЈЕР 6: ИЗРАЧУНАТИ $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}}$.

користићемо
$$\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C, \quad x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)}$$

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}x^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2 - 1}} \quad \left| \begin{array}{l} \sqrt{\frac{3}{2}}\, x = t \\ dx = \sqrt{\frac{2}{3}}\, dt \end{array} \right|$$

$$I=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|t+\sqrt{t^2-1}\right|+c$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\sqrt{\frac{3}{2}}x+\sqrt{\frac{3}{2}x^2-1}\right|+c=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x+\frac{\sqrt{3x^2-2}}{\sqrt{2}}\right|+c$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\frac{|\sqrt{3}x+\sqrt{3x^2-2}|}{\sqrt{2}}+c=\frac{\sqrt{3}}{3}\ln|\sqrt{3}x+\sqrt{3x^2-2}|\underbrace{-\frac{\sqrt{3}}{3}\ln\sqrt{2}+c}_{c}$$

тј. $I=\frac{\sqrt{3}}{3}\ln|\sqrt{3}x+\sqrt{3x^2-2}|+c$

ПРИМЈЕР 6: ИЗРАЧУНАТИ $\int\frac{dx}{\sin^2(3x+4)}$.

$$\boxed{\int\frac{dx}{\sin^2x}=-\operatorname{ctg}x+c}\qquad x\in(k\pi,(k+1)\pi)\quad k\in\mathbb{Z}$$

смјена: $3x+4=t$, $3dx=dt$, $dx=\frac{dt}{3}$

$$I=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{\sin^2t}=-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}t+c$$

$$=\boxed{-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}(3x+4)+c}$$

ПРИМЈЕР 7: ИЗРАЧУНАТИ $\int\frac{2x+3}{x^4+6x^3+19x^2+30x+26}dx$

РЈЕШЕЊЕ:

$$(x^2+3x+5)^2+1=\underbrace{x^4+6x^3+19x^2+30x+25}+1$$

смјена: $x^2+3x+5=t$, $(2x+3)dx=dt$

$$I=\int\frac{dt}{t^2+1}=\operatorname{arctg}t+c=\underbrace{\operatorname{arctg}(x^2+3x+5)+c}$$

ДОМАЋА ЗАДАЋА:

1. $\int \frac{2x+1}{x^2+x}\,dx$ 2. $\int \frac{3x^2\,dx}{x^6+1}$ 3. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}}\,dx$

4. $\int tg\,x\,dx$ 5. $\int \frac{arctg\,x}{1+x^2}\,dx$

6. $\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}\,dx$

ТРАНСФОРМАЦИЈА ПОДИНТЕГРАЛНЕ ФУНКЦИЈЕ

ЗАД1: ИЗРАЧУНАТИ $\int \frac{dx}{1+\cos x}$

РЈЕШЕЊЕ:

$$1+\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$$

$$\int \frac{dx}{1+\cos x} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}} = \left| \begin{array}{l} \frac{x}{2}=t \\ dx = 2\,dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{\cos^2 t} = tg\,t + c$$

$$= tg\,\frac{x}{2} + c$$

ЗАД2: ИЗРАЧУНАТИ $\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}}\,dx$

РЈЕШЕЊЕ:

смјена: $1-x=t \Rightarrow x = 1-t, \quad dx = -dt$

$$I = \int \frac{(1-t)^2(-dt)}{t^{100}} = -\int \frac{1-2t+t^2}{t^{100}}\,dt = -\int t^{-100}dt + 2\int t^{-99}dt$$

$$-\int t^{-98}dt = -\frac{t^{-99}}{-99} + 2\,\frac{t^{-98}}{-98} - \frac{t^{-97}}{-97} + c$$

$$= \frac{1}{99}\cdot\frac{1}{(1-x)^{99}} - \frac{1}{49}\cdot\frac{1}{(1-x)^{98}} + \frac{1}{97}\cdot\frac{1}{(1-x)^{97}} + c$$

ЗАД 3: ИЗРАЧУНАТИ $\int \frac{x^2-1}{x^4+1}\,dx$.

РЈЕШЕЊЕ:

$$\int \frac{x^2-1}{x^4+1}\,dx = \int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\,dx = \left| \begin{array}{l} \text{смјена:} \\ x+\frac{1}{x} = t \\ \left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx = dt \\ \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = t^2 \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2} = t^2-2 \end{array} \right|$$

$$= \int \frac{dt}{t^2-2} = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{1-\left(\frac{t}{\sqrt2}\right)^2} = -\frac{1}{2}\cdot\sqrt2\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\frac{t}{\sqrt2}}{1-\frac{t}{\sqrt2}}\right| + c$$

$$= \frac{\sqrt2}{4}\ln\left|\frac{\sqrt2-t}{\sqrt2+t}\right| + c = \frac{\sqrt2}{4}\ln\left|\frac{\sqrt2-x-\frac{1}{x}}{\sqrt2+x+\frac{1}{x}}\right| + c$$

$$= \boxed{\frac{\sqrt2}{4}\ln\left|\frac{x^2-\sqrt2 x+1}{x^2+\sqrt2 x+1}\right| + c}$$

ЗАД 4: ИЗРАЧУНАТИ $\int \frac{dx}{x^2-x+2}$.

РЈЕШЕЊЕ:

$$I = \int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+2} = \int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}} = \frac{4}{7}\int \frac{dx}{\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt7}{2}}\right)^2+1}$$

$$= \frac{4}{7}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{2x-1}{\sqrt7}\right)^2} \quad \left| \text{смјена: } \frac{2x-1}{\sqrt7} = t, \quad dx = \frac{\sqrt7}{2}dt \right|$$

$$= \frac{4}{7}\cdot\frac{\sqrt7}{2}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{2\sqrt7}{7}\operatorname{arctg} t + c = \boxed{\frac{2\sqrt7}{7}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt7} + c}$$

ЗАД5: ИЗРАЧУНАТИ $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$.

РЈЕШЕЊЕ:

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{2-(x+1)^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2}} \left| \begin{array}{l} \frac{x+1}{\sqrt{2}} = t \\ dx = \sqrt{2}\,dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C$$

$$\boxed{= \arcsin \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C}$$

ПАРЦИЈАЛНА ИНТЕГРАЦИЈА

Ако су u и v диференцијабилне функције промјенљиве x на (a,b) тада на том интервалу вриједи

$$\int u(x)\,dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)\,du(x) + c$$

ЗАД1: ИЗРАЧУНАТИ $\int \ln x\,dx$.

РЈЕШЕЊЕ:

$$I = \left|\begin{array}{ll} u = \ln x, & dv = dx \\ du = \frac{dx}{x}, & v(x) = x \end{array}\right| = x\cdot\ln x - \int x\cdot\frac{dx}{x}$$

$$= x\cdot\ln x - \int dx = \underline{x\ln x - x + C}$$

ЗАД2: ИЗРАЧУНАТИ $\int x^2 \sin 2x\,dx$.

РЈЕШЕЊЕ:

$$\left|\begin{array}{ll} u = x^2, & dv = \sin 2x\,dx \\ du = 2x\,dx, & v = \int \sin 2x\,dx \\ & v = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{array}\right|$$

$$I = -\frac{x^2}{2}\cos 2x + \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\int x\cdot\cos 2x\,dx \quad \left|\begin{array}{ll} u = x, & dv = \cos 2x\,dx \\ du = dx, & v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{array}\right|$$

$$= -\frac{x^2}{2}\cos 2x + \frac{x}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x\,dx$$

$$= -\frac{x^2}{2}\cos 2x + \frac{x}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(-\cos 2x) + C$$

$$= \underline{\frac{1-2x^2}{4}\cos 2x + \frac{x}{2}\sin 2x + C}$$

ЗАД 3: ИЗРАЧУНАТИ $\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx$

РЈЕШЕЊЕ: $\left| \begin{array}{ll} u = \arcsin x & , dv = \int x^{-2} dx \\ du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} & v = -\frac{1}{x} \end{array} \right|$

$$= -\frac{\arcsin x}{x} + \underbrace{\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}}_{I_1}$$

$$I_1 = \left| \begin{array}{ll} 1-x^2 = t^2 & , x^2 = 1-t^2 \\ -\cancel{2}x dx = \cancel{2}t dt & \\ dx = \frac{t dt}{-x} & \end{array} \right| = -\int \frac{\frac{\cancel{t} dt}{x}}{x \cdot \cancel{t}} = -\int \frac{dt}{1-t^2}$$

$$= -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} \right|$$

$$I = -\frac{\arcsin x}{x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} \right| + c$$

ЗАД 4: ИЗРАЧУНАТИ $\int \sqrt{1-x^2}\, dx$.

РЈЕШЕЊЕ: $I = \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$$= \arcsin x - \underbrace{\int \frac{x \cdot x dx}{\sqrt{1-x^2}}}_{I_1}$$

$$\left| \begin{array}{l} u = x \\ dv = \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow v = \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ 1-x^2 = t^2 \\ -2x dx = 2t dt \\ v = -\int \frac{\cancel{t} dt}{\cancel{t}} = -t = -\sqrt{1-x^2} \end{array} \right|$$

$$= \arcsin x + x \cdot \sqrt{1-x^2} - \underbrace{\int \sqrt{1-x^2} dx}_{I} + c$$

$$2I = \arcsin x + x\sqrt{1-x^2}$$

$$\boxed{I = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + C}$$

<- A3 (M.3.)

ЗАД 5: ИЗРАЧУНАТИ $\int \frac{x e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx$

РЈЕШЕЊЕ:

$$I = \int \frac{x e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)(1+x^2)^{1/2}}\,dx \quad \left| \begin{array}{l} \text{смјена: } \operatorname{arctg} x = t \\ x = \operatorname{tg} t \\ \hline \frac{dx}{1+x^2} = dt \end{array} \right|$$

$$= \int \frac{\operatorname{tg} t \cdot e^t}{(1+\operatorname{tg}^2 t)^{1/2}}\,dt = \int \frac{\frac{\sin t}{\cos t}\cdot e^t}{\left(\frac{1}{\cos^2 t}\right)^{1/2}}\,dt = \underbrace{\int \sin t\, e^t\,dt}_{I_1}$$

$$I_1 = \left| \begin{array}{ll} u = e^t & , dv = \sin t\,dt \\ du = e^t\,dt & v = -\cos t \end{array} \right|$$

$$= -e^t \cos t + \int \cos t \cdot e^t\,dt = -e^t \cos t + \sin t \cdot e^t - \underbrace{\int \sin t \cdot e^t\,dt}_{I_1}$$

$$2I_1 = e^t(\sin t - \cos t)$$

$$I_1 = \frac{e^t}{2}(\sin t - \cos t) + c = \frac{e^t}{2}\cdot \cos t(\operatorname{tg} t - 1) + c$$

$$= \frac{e^t}{2}\cdot \frac{\operatorname{tg} t - 1}{\frac{1}{\cos t}} + c = \frac{e^t}{2}\cdot \frac{\operatorname{tg} t - 1}{\sqrt{\frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\cos^2 t}}} + c$$

$$= \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{2}\cdot \frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}} + c$$

ЗАДАК: (И.З. 16.04.2009.)

ИЗРАЧУНАТИ $\int x^3 \ln(1+x^3)\,dx$

РЕШЕЊЕ:

$$I = \left| \begin{array}{ll} u = \ln(1+x^3) & , \quad dv = x^3 dx \\ du = \dfrac{3x^2 dx}{1+x^3} & , \quad v = \dfrac{x^4}{4} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{x^4}{4}\ln(1+x^3) - \frac{3}{4}\int \frac{x^6}{1+x^3}\,dx = \frac{x^4}{4}\ln(1+x^3) - \frac{3}{4}\int\left(x^3 - 1 + \frac{1}{x^3+1}\right)dx$$

$$= \frac{x^4}{4}\ln(1+x^3) - \frac{3}{4}\Bigg(\frac{x^4}{4} - x + \underbrace{\int\frac{dx}{x^3+1}}_{I_1}\Bigg)$$

$$I_1 = \left| \begin{array}{l} \dfrac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{Bx+C}{x^2-x+1} \\ 1 = A(x^2-x+1) + Bx^2 + Cx + Bx + C \\ \left.\begin{array}{l} A+B=0 \\ -A+B+C=0 \\ A+C=1 \end{array}\right\} - \quad \left.\begin{array}{l} -2A+B=-1 \\ A+B=0 \end{array}\right. /\cdot(-1) \Big\} + \Rightarrow 3A=1 \quad \boxed{A=\frac{1}{3}} \\ \boxed{B=-\frac{1}{3}} \qquad C = 1-A = 1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{array} \right|$$

$$I_1 = \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1} + \int\frac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}\,dx = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\underbrace{\int\frac{2(x-2)}{x^2-x+1}\,dx}_{I_2}$$

$$I_2 = \int\frac{2x-4}{x^2-x+1}\,dx = \int\frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx - 3\int\frac{dx}{x^2-x+1}$$

$$I_2 = \ln(x^2-x+1) - 3\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \ln(x^2-x+1) - 4\int\frac{dx}{1+\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$= \ln(x^2-x+1) - 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$$

$$I = \frac{x^4}{4}\ln(1+x^3) - \frac{3x^4}{16} + \frac{3x}{4} - \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\left(\ln(x^2-x+1) - 2\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

$$I = \frac{x^4}{4}\ln(1+x^3) - \frac{3x^4}{16} + \frac{3x}{4} - \frac{1}{4}\ln|x+1| + \frac{1}{8}\ln(x^2-x+1) + \frac{3\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$$

ЗАД 7: ИЗРАЧУНАТИ $\int \frac{dx}{x^4+1}$.

РЈЕШЕЊЕ: $I = \frac{1}{2}\int \frac{1+x^2+1-x^2}{1+x^4}\,dx = \frac{1}{2}\Big[\underbrace{\int \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int \frac{1-x^2}{1+x^4}\,dx}_{I_2}\Big]$

$$I_1 = \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\,dx = \left| \begin{matrix} x-\frac{1}{x} = t & x^2+\frac{1}{x^2} = t^2+2 \\ \left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx = dt & \end{matrix} \right|$$

$$= \int \frac{dt}{t^2+2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} \cancel{+c}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{\sqrt{2}\,x} \cancel{+c}$$

$$I = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{\sqrt{2}\,x} - \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right|\right) + C$$

$$= \boxed{I = \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x} - \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left|\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right| + C}$$

ЗАД 1: ИЗРАЧУНАТИ $\int \frac{x^4+1}{x^6+1}dx$

РЈЕШЕЊЕ: $\int \frac{x^4-x^2+1\ +x^2}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}dx = \int\frac{dx}{x^2+1} + \int\frac{x^2dx}{x^6+1}$

$= \operatorname{arctg}x + \underbrace{\int\frac{x^2dx}{(x^3)^2+1}}_{I_1}$

$I_1 = \left| \begin{matrix} x^3=t \\ 3x^2dx=dt \end{matrix} \right| = \frac{1}{3}\int\frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}x^3$

$$\boxed{I = \operatorname{arctg}x + \frac{1}{3}\operatorname{arctg}x^3 + C}$$

ЗАД 2: ~~3~~ ИЗРАЧУНАТИ $\int x\operatorname{arctg}x \cdot \ln(1+x^2)dx$

РЈЕШЕЊЕ: $u=\ln(1+x^2)$, $du=\frac{2x\,dx}{1+x^2}$

$dv = x\operatorname{arctg}x\,dx$, $v=\int x\operatorname{arctg}x\,dx \left| \begin{matrix} u=\operatorname{arctg}x \\ du=\frac{dx}{1+x^2} \\ v=\frac{x^2}{2} \end{matrix} \right|$

$= \frac{x^2\operatorname{arctg}x}{2} - \frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}dx = \frac{x^2\operatorname{arctg}x}{2} - \frac{1}{2}\int\frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx$

$= \frac{x^2\operatorname{arctg}x}{2} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}x = \frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg}x - \frac{x}{2}$

$I = \left(\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg}x - \frac{x}{2}\right)\cdot\ln(1+x^2) - \int\left(\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg}x - \frac{x}{2}\right)\cdot\frac{2x\,dx}{1+x^2}$

$= \left(\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg}x - \frac{x}{2}\right)\ln(1+x^2) - \int x\operatorname{arctg}x\,dx + \int\frac{x^2dx}{1+x^2}$

$$I = \left(\frac{x^2+1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} \right) \ln(1+x^2) - \frac{x^2+1}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{x}{2}$$

$$+ x - \operatorname{arctg} x + c$$

$$I = \left(\frac{x^2+1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} \right) \ln(1+x^2) - \frac{x^2+3}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{3x}{2} + c$$

ЗАД 3: ИЗРАЧУНАТИ $\displaystyle\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\, dx$

РЈЕШЕЊЕ: $\displaystyle v = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}} = \left| \begin{matrix} x = \sin t \\ dx = \cos t\, dt \end{matrix} \right| = \int \frac{\cos t\, dt}{\sqrt{(1-\sin^2 t)^3}}$

$$= \int \frac{\cos t\, dt}{\cos^3 t} = \operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$u = \arcsin x, \quad du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$I = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x - \int \frac{x\,dx}{1-x^2}$$

$$= \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \ln|x^2-1| + c$$

ЗАД. 4: ИЗРАЧУНАТИ $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$

РЕШЕЊА:

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx = \int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \quad \left|\begin{array}{c} x=\cos t \\ dx=-\sin t\,dt \end{array}\right|$$

$$= \int \frac{(1-\cos t)(-\cancel{\sin t})}{\cancel{\sin t}}\,dt = \int(\cos t-1)\,dt = \sin t - t$$

$$= \sqrt{1-x^2} - \arccos x + c$$

ИНТЕГРАЦИЈА ИРАЦИОНАЛНИХ ФУНКЦИЈА

1) Ако је подинтегрална функција облика
$R(x^{\frac{p_1}{q_1}}, \dots, x^{\frac{p_k}{q_k}})$, $p_i, q_i \in \mathbb{Z}$ $i=1,\dots,k$
R - рационална функција

<u>смјена</u>: $\boxed{x^{\frac{1}{q}} = t}$, $q = NZS(q_1, \dots, q_k)$

<u>ПР1:</u> ИЗРАЧУНАТИ $\displaystyle\int \frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$

<u>РЈЕШЕЊЕ:</u>

$$NZS(2,3)=6 \Rightarrow x^{\frac{1}{6}} = t \Rightarrow x = t^6$$
$$dx = 6t^5 dt$$

$$I = \int \frac{6t^5 dt}{t^6(1+2t^3+t^2)} = 6\int \frac{dt}{t(2t^3+t^2+1)} = \left| \begin{array}{l} 2t^3+t^2+1 = 0, \text{ за } t=-1 \\ 2t^3+t^2+1 = (t+1)(2t^2-t+1) \end{array} \right|$$

$$\frac{1}{t(t+1)(2t^2-t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} + \frac{Ct+D}{2t^2-t+1}$$

$$1 = A(2t^3+t^2+1) + Bt(2t^2-t+1) + (Ct+D)(t^2+t)$$
$$1 = A(2t^3+t^2+1) + B(2t^3-t^2+t) + Ct^3 + Ct^2 + Dt^2 + Dt$$

$2A+2B+C=0 \Rightarrow 2B+C=-2$

$A-B+C+D=0 \Rightarrow -B+C+D=-1$, $B+D=0$ $\Big\}-$ $\Rightarrow -2B+C=-1$, $2B+C=-2$ $\Big\}+$

$B+D=0$

$\boxed{A=1}$

$2C=-3 \Rightarrow \boxed{C=-\frac{3}{2}}$

$2B = -2-C = -2+\frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{B=-\frac{1}{4}}$

$\boxed{D=\frac{1}{4}}$

$$I = 6\left[\int\frac{dt}{t} - \frac{1}{4}\int\frac{dt}{t+1} + \int\frac{-\frac{3}{2}t+\frac{1}{4}}{2t^2-t+1}dt\right]$$

$$I = 6\ln|t| - \frac{3}{2}\ln|t+1| - 6\cdot\frac{1}{4}\underbrace{\int\frac{6t-1}{2t^2-t+1}\,dt}_{I_1}$$

$$I_1 = \int\frac{6t-1}{2t^2-t+1}\,dt = \frac{6}{4}\int\frac{4t-\frac{2}{3}}{2t^2-t+1}\,dt = \frac{3}{2}\int\frac{4t-1+1-\frac{2}{3}}{2t^2-t+1}\,dt$$

$$= \frac{3}{2}\int\frac{4t-1}{2t^2-t+1}\,dt + \frac{1}{2}\int\frac{dt}{2t^2-t+1} = \frac{3}{2}\ln(2t^2-t+1) + \frac{1}{4}\underbrace{\int\frac{dt}{t^2-\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}}}_{I_2}$$

$$I_2 = \int\frac{dt}{\left(t-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16}+\frac{1}{2}} = \int\frac{dt}{\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{16}} = \frac{16}{7}\int\frac{dt}{1+\left(\frac{4t-1}{\sqrt{7}}\right)^2}$$

$$= \frac{\cancel{16}^{\,4}}{7}\cdot\frac{\sqrt{7}}{\cancel{4}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{4t-1}{\sqrt{7}}$$

$$I = 6\ln|t| - \frac{3}{2}\ln|t+1| - \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\ln(2t^2-t+1) + \frac{1}{\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{4}\sqrt{7}}{7}\,\mathrm{arctg}\,\frac{4t-1}{\sqrt{7}}\right) + C$$

$$I = 6\ln\sqrt[6]{x} - \frac{3}{2}\ln(\sqrt[6]{x}+1) - \frac{9}{4}\ln(2\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}+1) - \frac{3\sqrt{7}}{14}\,\mathrm{arctg}\,\frac{4\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{7}} + C$$

$$I = \ln|x| - \ln(\sqrt[6]{x}+1)^{3/2} - \ln(2\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}+1)^{9/4} - \frac{3\sqrt{7}}{14}\,\mathrm{arctg}\,\frac{4\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{7}} + C$$

$$I = \ln\frac{|x|}{(\sqrt[6]{x}+1)^{3/2}(2\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}+1)^{9/4}} - \frac{3\sqrt{7}}{14}\,\mathrm{arctg}\,\frac{4\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{7}} + C$$

2) Ако је подинтегрална функција облика $f(x) = R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$

ОЈЛЕРОВЕ СМЈЕНЕ:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x + t \quad , \quad a>0$$
$$= xt \pm \sqrt{c} \quad , \quad c>0$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = t(x-x_1) \quad , \quad x_1, x_2 \in R$$

ПР 1: ИЗРАЧУНАТИ $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$.

РЈЕШЕЊЕ:

$$\sqrt{x^2+x+1} = x+t \quad /^2$$
$$\cancel{x^2}+x+1 = \cancel{x^2}+2xt+t^2$$
$$x(1-2t) = t^2-1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{t^2-1}{1-2t}}$$

$$dx = \frac{2t(1-2t)+2(t^2-1)}{(1-2t)^2}dt \Rightarrow dx = \frac{-2t^2+2t-2}{(1-2t)^2}dt$$

$$I = -2\int \frac{\frac{t^2-t+1}{(1-2t)^2}}{\frac{t^2-1}{1-2t}\cdot\left(\frac{t^2-1}{1-2t}+t\right)}dt = -2\int \frac{t^2-t+1}{(t^2-1)(-t^2+t-1)}dt$$

$$I = 2\int \frac{dt}{t^2-1} dt = 2\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C$$

$$\boxed{I = \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+x+1}-x-1}{\sqrt{x^2+x+1}-x+1}\right| + C}$$

ПР 2: ИЗРАЧУНАТИ $\int \sqrt{x^2-1}\,dx$

РЈЕШЕЊЕ: $\sqrt{(x-1)(x+1)} = (x-1)\,t \;/^2$

$\cancel{(x-1)}(x+1) = (x-1)^{\cancel{2}}t^2 \Rightarrow x - xt^2 = -t^2 - 1$

$$\boxed{x = \frac{t^2+1}{t^2-1}}$$

$$dx = \frac{2t(t^2-1) - 2t(t^2+1)}{(t^2-1)^2}\,dt$$

$$dx = \frac{-4t\,dt}{(t^2-1)^2}$$

$$I = \int\left(\frac{t^2+1}{t^2-1} - 1\right)\cdot t \cdot \frac{-4t}{(t^2-1)^2}\,dt = -8\int\frac{t^2}{(t^2-1)^3}\,dt$$

$$\frac{t^2}{(t^2-1)^3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t-1} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{(t-1)^2} - \frac{1}{(t-1)^3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(t+1)^2}$$

$$+ \frac{1}{(t+1)^3}$$

...

$$I = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + c$$

II НАЧИН: $\int\sqrt{x^2-1}\,dx = \left|\begin{array}{l} x = \operatorname{ch} t \\ dx = \operatorname{sh} t\,dt \end{array}\right| = \int \operatorname{sh}^2 t\,dt$

$$= \frac{1}{2}\int(\operatorname{ch} 2t - 1)\,dt = \frac{1}{2}(\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t - t)$$

$$= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-1} - \operatorname{arcch} x\right) + c$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + c$$

3) ИНТЕГРАЛ БИНОМНОГ ДИФЕРЕНЦИЈАЛА

$$\int x^m (a+bx^n)^p \, dx \quad ; m, n, p \in \mathbb{Q}$$

$$m = \frac{m_1}{m_2}, \quad n = \frac{n_1}{n_2}, \quad p = \frac{p_1}{p_2}$$

а) ако је $p \in \mathbb{Z}$, смјена: $x = t^k$, $k = NZS(m_2, n_2)$

б) ако је $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$, смјена: $a + bx^n = t^{p_2}$

в) ако је $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$; смјена: $ax^{-n} + b = t^{p_2}$

тј. $\boxed{a + bx^n = x^n t^{p_2}}$

Пр3: (М.3.) Израчунати $\int \frac{\sqrt[3]{(2x^3+1)^2}}{x^6} \, dx$

Рјешење: $\int x^{-6} (1+2x^3)^{\frac{2}{3}} \, dx$

$m = -6, \quad n = 3, \quad p = \frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$

$\frac{m+1}{n} = \frac{-6+1}{3} = -\frac{5}{3} \notin \mathbb{Z}$

$\frac{m+1}{n} + p = -\frac{5}{3} + \frac{2}{3} = -1 \in \mathbb{Z}$

Смјена: $\boxed{1 + 2x^3 = x^3 t^3} \Rightarrow t = \left(\frac{1+2x^3}{x^3}\right)^{1/3}$

$2x^3 - x^3 t^3 = -1 \Rightarrow x^3(2 - t^3) = -1 \Rightarrow \boxed{x^3 = \frac{1}{t^3 - 2}}$

$$1 + 2x^3 = x^3 t^3 \quad /'$$
$$6x^2 dx = 3x^2 t^3 dx + 3x^3 t^2 dt \quad /:3$$
$$(2x^2 - x^2 t^3) dx = x^3 t^2 dt$$
$$(2 - t^3) dx = x t^2 \Rightarrow dx = \frac{x t^2}{2 - t^3} dt$$

$$I=\int\left(\frac{1}{t^3-2}\right)^{-2}(x^3t^3)^{2/3}\cdot\frac{x\,t^2}{2-t^3}\,dt$$

$$=\int(t^3-2)^2\,\frac{x^3t^4}{\cancel{2-t^3}}\,dt=\int(2-t^3)\cdot\frac{1}{t^3-2}\cdot t^4\,dt$$

$$=-\int t^4\,dt=-\frac{1}{5}\,t^5+c=-\frac{1}{5}\cdot\frac{\sqrt[3]{(1+2x^3)^5}}{x^5}+c$$

ПР 4: $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2(x+\sqrt{1+x^2})}$

РЈЕШЕЊЕ: СМЈЕНА: $x=\frac{1}{t}$, $t=\frac{1}{x}\Rightarrow dt=-\frac{dx}{x^2}$

$$I=-\int\frac{dt}{\frac{1}{t}+\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}=-\int\frac{t\,dt}{1+\sqrt{1+t^2}}\quad\left|\begin{array}{l}1+t^2=u^2\\ \cancel{2}t\,dt=\cancel{2}u\,du\end{array}\right|$$

$$=-\int\frac{u\,du}{1+u}=-\int\frac{u+1-1}{1+u}\,du=-\int du+\int\frac{du}{1+u}$$

$$=-u+\ln|1+u|+c=-\sqrt{1+t^2}+\ln\left|1+\sqrt{1+t^2}\right|+c$$

$$=-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\ln\left|1+\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right|+c=$$

$$=\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x}\right|-\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}+c$$

ИНТЕГРАЦИЈА ТРИГОНОМЕТРИЈСКИХ ФУНКЦИЈА

ИНТЕГРАЛИ ОБЛИКА

(1) $\int R(\sin x, \cos x)dx$ се могу рјешавати сведеним смјенама:

1) Сваки интеграл облика (1) се може смјеном $\boxed{tg\frac{x}{2}=t}$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$

$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

свести на рационалну функцију

ПР1: $\int\frac{dx}{\cos x}=\left|\begin{matrix} tg\frac{x}{2}=t, & \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx=\frac{2dt}{1+t^2} & \end{matrix}\right|$

$$=2\int\frac{dt}{1-t^2}=\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+c=\ln\left|\frac{1+tg\frac{x}{2}}{1-tg\frac{x}{2}}\right|+c$$

$$=\ln\left|\frac{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}\right|+c=\ln\left|\frac{(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2})^2}{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}\right|+c$$

$$=\ln\frac{1+\sin x}{|\cos x|}+c$$

ПР2: ИЗРАЧУНАТИ $\int\frac{\cos x}{1+\cos x}dx$

Рјешење: I начин смјена $tg\frac{x}{2}=t$

II НАЧИН

$$I=\int\frac{\cos x}{1+\cos x}dx=\int\frac{\cos x(1-\cos x)}{1-\cos^2 x}dx=\int\frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x}-\int\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}dx$$

$$\left|\begin{matrix}\sin x=t\\ \cos x dx=dt\end{matrix}\right|=\int\frac{dt}{t^2}-\int\frac{dx}{\sin^2 x}+\int dx=-\frac{1}{\sin x}+ctg x+x+c$$

2) Ако је $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ користимо смјену:

$$\boxed{\cos x = \sqrt{1-t^2}}, \quad dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\cos^2 x = 1-t^2$$

$$t^2 = 1-\cos^2 x$$

$$\boxed{t = \sin x} \Rightarrow dt = \cos x\,dx$$

ПР1: ИЗРАЧУНАТИ $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x \cdot \sin^2 x}$

$$R(\sin x, -\cos x) = \frac{1}{\sin^2 x \cdot (-\cos x)} = -R(\sin x, \cos x)$$

$$I = \int \frac{\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}}{t^2\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{dt}{t^2(1-t^2)} = \int \frac{t^2-t^2+1}{t^2(1-t^2)}dt$$

$$= \int \frac{dt}{1-t^2} + \int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| - \frac{1}{t} + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| - \frac{1}{\sin x} + C$$

ПР2: А3. ИЗРАЧУНАТИ $\displaystyle\int \frac{2\sin x - \cos x}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x}dx$

РЈЕШЕЊЕ:

$$I = 2\underbrace{\int \frac{\sin x\,dx}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x}}_{I_1} - \underbrace{\int \frac{\cos x\,dx}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x}}_{I_2}$$

$$I_1 = \left|\begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x\,dx = dt \end{array}\right| = -2\int \frac{dt}{3(1-t^2)+4t^2} = -2\int \frac{dt}{3+t^2}$$

$$I_1 = -\frac{2}{3}\int \frac{dt}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{t}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\cos x}{\sqrt{3}}$$

$$I_2 = \int \frac{\cos x\,dx}{3\sin^2 x + 4 - 4\sin^2 x} = \int \frac{\cos x\,dx}{4-\sin^2 x} \quad \left|\begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x\,dx = dt \end{array}\right|$$

$$= \int \frac{dt}{4-t^2} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+t}{2-t}\right| = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\sin x}{2-\sin x}\right|$$

$$\underbrace{I = -\frac{2\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\cos x}{\sqrt{3}} - \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\sin x}{2-\sin x}\right| + C}$$

3) Ако је $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ можемо користити смјену

$$\boxed{\cos x = t} \quad \sin x = \sqrt{1-t^2}, \quad dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$-\sin x\,dx = dt$$

Прим: Израчунати $\displaystyle\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}$

Рјешење:

$$R(-\sin x, \cos x) = \frac{1}{(2+\cos x)(-\sin x)} = -R(\sin x, \cos x)$$

$$I = \int \frac{-\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}}{(2+t)\sqrt{1-t^2}} = -\int \frac{dt}{(2+t)(1-t^2)}$$

$$\frac{1}{(2+t)(1-t)(1+t)} = \frac{A}{2+t} + \frac{B}{1-t} + \frac{C}{1+t}$$

$$1 = A(1-t^2) + B(2+t)(1+t) + C(2+t)(1-t)$$

$$1 = A(1-t^2) + B(2+3t+t^2) + C(2-t-t^2)$$

$$\left.\begin{aligned} -A+B-C&=0\\ 3B-C&=0\\ A+2B+2C&=1 \end{aligned}\right\} + \qquad \left.\begin{aligned} 3B+C&=1\\ 3B-C&=0 \end{aligned}\right\} + \Rightarrow 6B=1 \qquad \boxed{B=\frac{1}{6}}$$

$$C=3B \Rightarrow \boxed{C=\frac{1}{2}}$$

$$A=B-C=\frac{1}{6}-\frac{1}{2}=\frac{-2}{6}=-\frac{1}{3}, \quad \boxed{A=-\frac{1}{3}}$$

$$I=-\left[-\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t+2}+\frac{1}{6}\int\frac{dt}{1-t}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{1+t}\right]$$

$$I=\frac{1}{3}\ln|t+2|+\frac{1}{6}\ln|1-t|-\frac{1}{2}\ln|1+t|+C$$

$$I=\frac{1}{6}\left(2\ln|t+2|+\ln|1-t|-3\ln|1+t|\right)+C$$

$$I=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{(t+2)^2(1-t)}{(1+t)^3}\right|+C=\frac{1}{6}\ln\frac{(2+\cos x)^2(1-\cos x)}{(1+\cos x)^3}+C$$

4) Ако je $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$ можемо користити смјену

$\boxed{\mathrm{tg}\,x=t}$ $\quad dx=\frac{dt}{1+t^2}$, $\sin x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$

<u>ПР1</u>: Израчунати $\int\frac{\sin x\,dx}{\sin x+2\cos x}$

<u>Рјешење</u>: $R(-\sin x,-\cos x)=\frac{-\sin x}{-\sin x-2\cos x}=R(\sin x,\cos x)$

$$I=\int\frac{\cancel{\sin x}\,dx}{\cancel{\sin x}(1+2\,\mathrm{ctg}\,x)}=\int\frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1+\frac{2}{t}}=\int\frac{t\,dt}{(1+t^2)(t+2)}$$

$$\frac{t}{(1+t^2)(t+2)} = \frac{A}{t+2} + \frac{Bt+C}{1+t^2}$$

$$t = A(1+t^2) + Bt^2 + Ct + 2Bt + 2C$$

$$\left.\begin{array}{l} A+B=0 \\ C+2B=1 \\ A+2C=0 \end{array}\right\} - \Rightarrow \left.\begin{array}{l} B-2C=0 \\ C+2B=1 \quad /\cdot 2 \end{array}\right\} + \Rightarrow 5B=2 \quad \boxed{B=\frac{2}{5}}$$

$$A=-B, \quad \boxed{A=-\frac{2}{5}} \qquad 2C=-A, \quad \boxed{C=\frac{1}{5}}$$

$$I = -\frac{2}{5}\int\frac{dt}{t+2} + \int\frac{\frac{2}{5}t+\frac{1}{5}}{1+t^2}dt = -\frac{2}{5}\ln|t+2| + \frac{2}{5}\int\frac{t\,dt}{1+t^2} + \frac{1}{5}\int\frac{dt}{1+t^2}$$

$$I = -\frac{2}{5}\ln|t+2| + \frac{1}{5}\ln(1+t^2) + \frac{1}{5}\operatorname{arctg} t + c$$

$$I = \frac{1}{5}\ln\frac{(1+t^2)}{(t+2)^2} + \frac{1}{5}\operatorname{arctg} t + c$$

$$I = \frac{1}{5}\ln\frac{(1+tg^2x)}{(tgx+2)^2} + \frac{1}{5}\operatorname{arctg}(tgx) + c$$

$$I = \frac{1}{5}\ln\frac{1}{(\sin x+2\cos x)^2} + \frac{x}{5} + c$$

$$I = \frac{x}{5} - \frac{2}{5}\ln|\sin x+2\cos x| + c$$

ПР2: Израчунати $\int \frac{\cos x\, dx}{\sin^3 x - \cos^3 x}$

Рјешење: $\int \frac{\cancel{\cos x}\, dx}{\cos^{\cancel{3}} x\,(tg^3 x - 1)} = \left| \begin{array}{l} tg\, x = t \\ \frac{dx}{\cos^2 x} = dt \end{array} \right|$

$$= \int \frac{dt}{t^3 - 1}$$

$$\frac{1}{(t-1)(t^2+t+1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{Bt+C}{t^2+t+1}$$

$$1 = A(t^2+t+1) + Bt^2 + Ct - Bt - C$$

$$\left.\begin{array}{l} A + B = 0 \\ A + C - B = 0 \\ A - C = 1 \end{array}\right\} + \qquad \left.\begin{array}{l} 2A + C = 0 \\ A - C = 1 \end{array}\right\} + \qquad \begin{array}{l} 3A = 1 \\ \boxed{A = \frac{1}{3}} \end{array}$$

$$\boxed{C = A - 1 = -\frac{2}{3}}, \quad \boxed{B = -\frac{1}{3}}$$

$$I = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t-1} - \frac{1}{3}\int \frac{t+2}{t^2+t+1}\, dt = \frac{1}{3}\ln|t-1| - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\int \frac{2t+4}{t^2+t+1}\, dt$$

$$= \frac{1}{3}\ln|t-1| - \frac{1}{6}\int \frac{2t+1}{t^2+t+1}\, dt - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+t+1}$$

$$= \frac{1}{3}\ln|t-1| - \frac{1}{6}\ln(t^2+t+1) - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$$

$$= \frac{1}{6}\ln\frac{(t-1)^2}{t^2+t+1} - \frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\, arctg\, \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C$$

$$= \frac{1}{6}\ln\frac{(tg x - 1)^2}{tg^2 x + tg x + 1} - \frac{2\sqrt{3}}{3}\, arctg\, \frac{2 tg x + 1}{\sqrt{3}} + C$$

$$= \frac{1}{6}\ln\frac{(\sin x - \cos x)^2}{1 + \sin x \cos x} - \frac{2\sqrt{3}}{3}\, arctg\, \frac{2 tg x + 1}{\sqrt{3}} + C$$

$$= \frac{1}{6}\ln\frac{1 - 2\sin x\cos x}{1 + \sin x\cos x} - \frac{2\sqrt{3}}{3}\, arctg\, \frac{2 tg x + 1}{\sqrt{3}} + C$$

$$I = \frac{1}{6} \ln \frac{1-\sin 2x}{1+\sin x \cos x} - 2\frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{2\sin x+\cos x}{\sqrt{3}\cos x} + C$$

ХИПЕРБОЛИЧКЕ ФУНКЦИЈЕ

$\mathrm{ch}x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\mathrm{sh}x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\mathrm{th}x = \dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}$, $\mathrm{coth}x = \dfrac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}x}$

$\boxed{\mathrm{ch}^2x - \mathrm{sh}^2x = 1}$ $\quad \mathrm{ch}^2x = 1 + \mathrm{sh}^2x$, $\quad \mathrm{sh}^2x = \mathrm{ch}^2x - 1$ $\qquad \mathrm{ch}2x = \mathrm{ch}^2x + \mathrm{sh}^2x$

ИНВЕРЗНЕ ФУНКЦИЈЕ

$\mathrm{Arch}x = \ln(x \pm \sqrt{x^2-1}) \quad (x \geq 1)$

$\mathrm{Arsh}x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

$\mathrm{Arth}x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}, \quad |x| < 1$

$\mathrm{Arcth}x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x+1}{x-1}, \quad |x| > 1$

$\int \mathrm{sh}x\,dx = \mathrm{ch}x + C$

$\int \mathrm{ch}x\,dx = \mathrm{sh}x + C$

$\int \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2x}\,dx = \mathrm{th}x + C$

$\int \dfrac{1}{\mathrm{sh}^2x}\,dx = -\mathrm{coth}x + C$

ЗАД 1: ИЗРАЧУНАТИ $\int \sqrt{x^2-1}\,dx = \left| \begin{array}{l} x = \mathrm{ch}t \\ dx = \mathrm{sh}t\,dt \\ t = \mathrm{arch}x = \ln(x+\sqrt{x^2-1}) \end{array} \right| = \int \mathrm{sh}^2t\,dt$

$= \dfrac{1}{2}\int(\mathrm{ch}2t - 1)\,dt = \dfrac{1}{2}(\mathrm{sh}t\,\mathrm{ch}t - t)$

$= \dfrac{1}{2}(x\sqrt{x^2-1} - \mathrm{arch}x) + C$

$= \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2-1} - \dfrac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-1}) + C$

ЗАД 2: ИЗРАЧУНАТИ $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$ $(a>0)$

| смјена: $x = a\,ch\,t$, $dx = a\,sh\,t\,dt$ | $\Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int \frac{a\,sh\,t\,dt}{\sqrt{a^2ch^2t - a^2}}$

$$= \int \frac{\cancel{a}\,sh\,t}{\cancel{a}\sqrt{ch^2t-1}}\,dt = \int \frac{sh\,t}{sh\,t}\,dt = \int dt = t + C$$

$ch\,t = \frac{x}{a} \Rightarrow \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \frac{x}{a} \Rightarrow e^{2t} - 2\frac{x}{a}e^t + 1 = 0$

$$(e^t)_{1,2} = \frac{2\frac{x}{a} \pm \sqrt{4\frac{x^2}{a^2} - 4}}{2} = \frac{x}{a} \pm \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a} \qquad e^t > 0$$

па је $e^t = \frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a} = \frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}$

$$t = \ln\frac{(x+\sqrt{x^2-a^2})}{a} = \ln(x+\sqrt{x^2-a^2}) - \ln a$$

тиме смо добили

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln(x+\sqrt{x^2-a^2}) + C$$

МАТЕМАТИКА 2
(ИСПИТНИ ЗАДАЧИ)

Зад 1: (5.02.2011.)

Израчунати $\int x^4\sqrt{4-x^2}\,dx$.

Решение: $\left|\begin{array}{l}\text{смена: } x = 2\sin t \\ \qquad\quad dx = 2\cos t\,dt\end{array}\right|$ $\sin t = \frac{x}{2} \Rightarrow \boxed{t = \arcsin\frac{x}{2}}$

$$I = \int (2\sin t)^4\sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t\,dt = 2^5\int \sin^4 t\cdot 2\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\,dt$$

$$= 2^6\int \sin^4 t\cdot\cos^2 t\,dt = 64\int\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2\cdot\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt$$

$$= 64\int\frac{1-\cos 2t}{2}\cdot\frac{1-\cos^2 2t}{4}\,dt = 8\int(1-\cos^2 2t-\cos 2t+\cos^3 2t)\,dt$$

$$= 8\left[t-\frac{1}{2}\sin 2t-\int\frac{1+\cos 4t}{2}\,dt+\int\cos 2t\cdot\frac{1+\cos 4t}{2}\,dt\right]$$

$$= 8t-4\sin 2t-4\left(t+\frac{1}{4}\sin 4t\right)+4\int(\cos 2t+\underline{\cos 2t\cdot\cos 4t})\,dt$$

$$= 8t-4\sin 2t-4t-\sin 4t+\cancel{4}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\sin 2t+\frac{4}{2}\int(\cos 6t+\cos 2t)\,dt$$

$$= 4t-2\sin 2t-\sin 4t+4\int\cos 6t\,dt+4\int\cos 2t\,dt$$

$$= 4t-2\sin 2t-\sin 4t+4\cdot\frac{1}{6}\sin 6t+4\cdot\frac{1}{2}\sin 2t+c$$

$$= 4t-\cancel{2\sin 2t}-\sin 4t+\frac{2}{3}\sin 6t+\cancel{2\sin 2t}+c$$

$$= 4t-\sin 4t+\frac{2}{3}\sin 6t+c$$

$$= 4\cdot\arcsin\frac{x}{2}-4\sin\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)\cdot\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}\left(1-2\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)+$$

$$+\frac{2}{3}\cdot 2\sin\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)\left[3-4\left(\sin\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)\right)^2\right]+c$$

$$= 4\arcsin\frac{x}{2}-2x\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\left(1-2x^2\right)+\frac{4}{3}\cdot\frac{x}{2}\left[3-\cancel{4}\cdot\frac{x^2}{\cancel{4}}\right)+c$$

$$= 4\arcsin\frac{x}{2}-x\sqrt{4-x^2}\cdot(1-2x^2)+\frac{2x}{3}(3-x^2)+c$$

ЗАД 2: (30.09.2009.)

ИЗРАЧУНАТИ $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$

Решење:

смена: $1+x^2 = x^2t^2 \Rightarrow (1-t^2)x^2 = -1$

$$\boxed{x^2 = \frac{1}{t^2-1}}$$

$$2x\,dx = 2xt^2dx + 2x^2t\,dt \quad /:2$$

$$(x - xt^2)dx = x^2t\,dt$$

$$dx = \frac{xt}{1-t^2}dt$$

$$I = \int \frac{1}{(x^2t^2)^{3/2}} \cdot \frac{xt}{1-t^2}dt = \int \frac{dt}{x^2t^2(1-t^2)} = \int \frac{dt}{\frac{t^2}{t^2-1}\cdot(1-t^2)}$$

$$= -\int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{t} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$