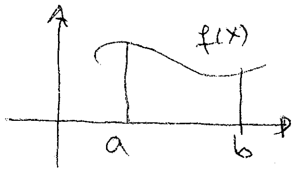
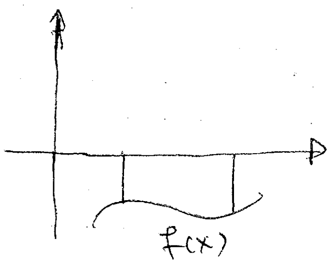
ИЗРАЧУНАВАЊЕ ПОВРШИНЕ ЛИКОВА У РАВНИ

1° ПОВРШИНА ЛИКА У ПРАВОУГЛИМ КООРДИНАТАМА

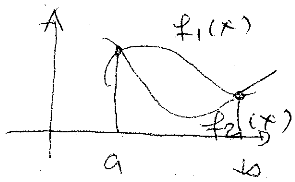
$y = f(x)$; $f(x) > 0$



$$P = \int_a^b f(x)\,dx$$



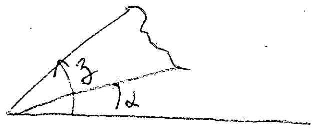
$f(x) < 0$, $P = -\int_a^b f(x)\,dx = \left| \int_a^b f(x)\,dx \right|$



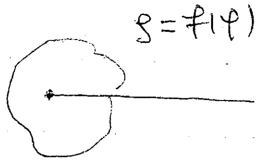
$$P = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]\,dx$$

2° ПОВРШИНА ЛИКА У ПОЛАРНИМ КООРДИНАТАМА

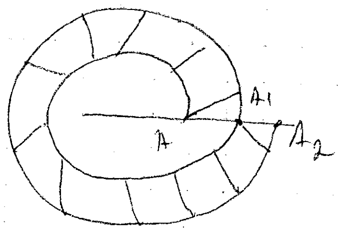
$\rho = f(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$ - није веће од 2π



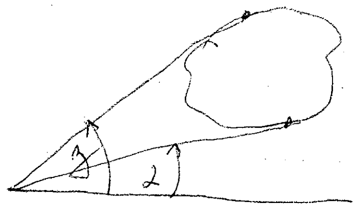
$$P = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta [f(\varphi)]^2\,d\varphi$$



$$P = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [f(\varphi)]^2\,d\varphi$$



$$P = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [f_2^2(\varphi) - f_1^2(\varphi)]\,d\varphi$$



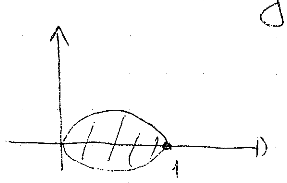
$$P = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta [f_2^2(\varphi) - f_1^2(\varphi)]\,d\varphi$$

ЗАД 1 (10.7.2007.) Израчунати површину фигуре ограничене кривом $y^2 = x^3 - x^4$.

Решење:

$y^2 = x^3(1-x)$, д.п. $x(1-x) \geq 0$

$y = \pm\sqrt{x^3(1-x)}$ $\quad x \in [0,1]$



$$P = 2\int_0^1 \sqrt{x^3 - x^4}\, dx = 2\int_0^1 x\sqrt{x(1-x)}\, dx$$

$= \left| \begin{array}{l} \text{смена} \\ x = \sin^2 t \\ dx = 2\sin t \cos t\, dt \end{array} \quad \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 1 \\ \hline t & 0 & \frac{\pi}{2} \end{array} \right|$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \sqrt{\sin^2 t\,(1-\sin^2 t)} \cdot 2\sin t \cos t\, dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos^2 t\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t \cdot \sin^2 t\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t\,(1-\cos 2t)\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t\, dt - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t \cos 2t\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4t}{2}\, dt - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\, \frac{\sin^3 2t}{3}\Big|_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{4}\left(t\Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{4}\sin 4t\Big|_0^{\pi/2} \right) = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \boxed{\frac{\pi}{8}}$$

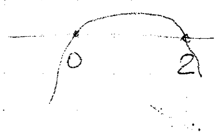
ЗАД2: (14.04.2008.)

Израчунати површину ограничену кривом $y^2=\frac{x^3}{2-x}$

и њеном асимптотом $x=2$.

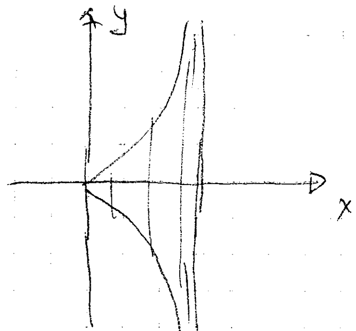
Рјешење:

$y=\pm\sqrt{\frac{x^3}{2-x}}$, Д.П. $\frac{x^3}{2-x}\geq 0$



$x\in[0,2)$

$$\lim_{x\to 2_-}\left(\pm\sqrt{\frac{x^3}{2-x}}\right)=\pm\infty$$



$$P=2\int_0^2\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{2-x}}\,dx=$$

смјена:

$x=2\sin^2 t$

$dx=4\sin t\cos t\,dt$

x	0	2
t	0	$\frac{\pi}{2}$

$$P=16\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2 t\cdot\cancel{\sqrt{2}}\cdot\sin t\cdot\sin t\cdot\cancel{\cos t}\,dt}{\cancel{\sqrt{2}}\cdot\cancel{\cos t}}=16\int_0^{\pi/2}\sin^4 t\,dt$$

$$=16\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2dt=4\int_0^{\pi/2}(1-2\cos 2t+\cos^2 2t)\,dt$$

$$=4\left[\int_0^{\pi/2}dt-2\int_0^{\pi/2}\cos 2t\,dt+\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 4t}{2}\,dt\right]$$

$$=4\left[\frac{\pi}{2}-2\cdot\frac{1}{2}\underbrace{\cancel{\sin 2t\Big|_0^{\pi/2}}}_{0}+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{4}\underbrace{\cancel{\sin 4t\Big|_0^{\pi/2}}}_{0}\right)\right]$$

$$=4\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\boxed{3\pi}$$

Зад 3: Израчунати површину лика ограниченог кривом $y = xe^{-x^2}$ и њеном асимптотом.

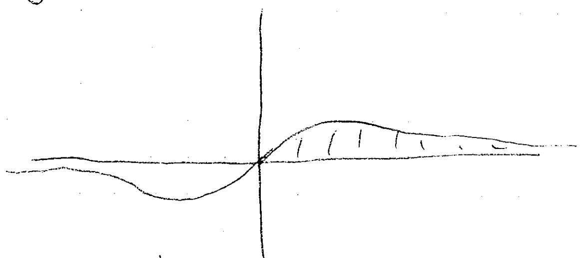
Решење:

- Д.П. $\forall x \in \mathbb{R}$
- нуле $x=0$, $y=0$
- непарна
- знак: $x>0$, $f(x)>0$, $x<0$ $f(x)<0$

Х.А. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} xe^{-x^2} = 0$, $y=0$

$$y' = e^{-x^2} + xe^{-x^2}(-2x) = e^{-x^2}(1-2x^2)$$

$$y'=0, \quad 2x^2=1, \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$



$$P = -\int_{-\infty}^{0} + \int_{0}^{+\infty} = 2\int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx$$

$$P = 2\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx = 2\lim_{a\to+\infty}\int_0^a xe^{-x^2}dx = \left| \begin{array}{l} \text{смена:} \\ x^2=t, \quad 2x\,dx=dt \\ \begin{array}{c|c|c} x & 0 & a \\ \hline t & 0 & a^2 \end{array} \end{array} \right|$$

$$= \lim_{a\to+\infty}\int_0^{a^2} e^{-t}dt = \lim_{a\to+\infty}\left(-e^{-t}\right)\Big|_0^{a^2}$$

$$= \lim_{a\to+\infty}\left(-e^{-a^2}+1\right) = -e^{-\infty}+1 = \boxed{1}$$

ЗАД 4: Наћи површину лика ограниченог параболама $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{2}$ и правом $y = 2x$.

РЈЕШЕЊЕ:

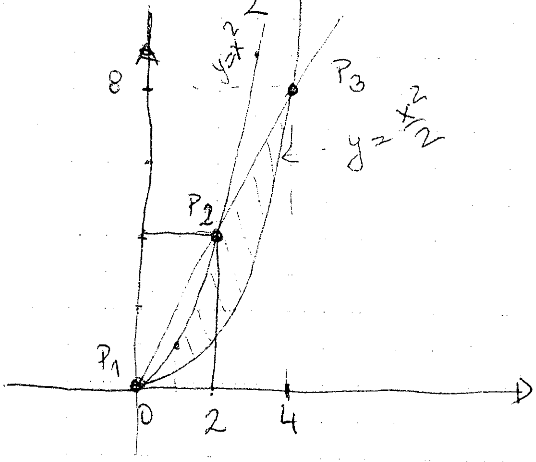
- пресјек праве $y = 2x$ и параболе $y = x^2$

$$2x = x^2 \Rightarrow x(2-x) = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 2$$
$$y_1 = 0, \quad y_2 = 4$$

$P_1(0,0)$, $P_2(2,4)$

- пресјек праве $y = 2x$ и параболе $y = \frac{x^2}{2}$

$$2x = \frac{x^2}{2} \Rightarrow 4x = x^2 \Rightarrow x(4-x) = 0$$
$$x_1 = 0, \quad x_2 = 4 \qquad P_3(4,8)$$
$$y_1 = 0, \quad y_2 = 8$$



$$P = P_1 - P_2 = \int_0^4 \left(2x - \frac{x^2}{2}\right)dx - \int_0^2 (2x - x^2)\,dx =$$

$$= x^2\Big|_0^4 - \frac{x^3}{6}\Big|_0^4 - \left(x^2\Big|_0^2 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^2\right) = 16 - \frac{1}{6}\cdot 64 - \left(4 - \frac{8}{3}\right)$$

$$= 12 - \frac{32}{3} + \frac{8}{3} = 12 - \frac{24}{3} = \frac{12}{3} = \boxed{4}$$

ЗАД 5: Одредити површину лика ограниченог кривом $y^2=2x+1$ и правом $y=2x-1$

РЕШЕЊЕ:

пресек праве и криве:

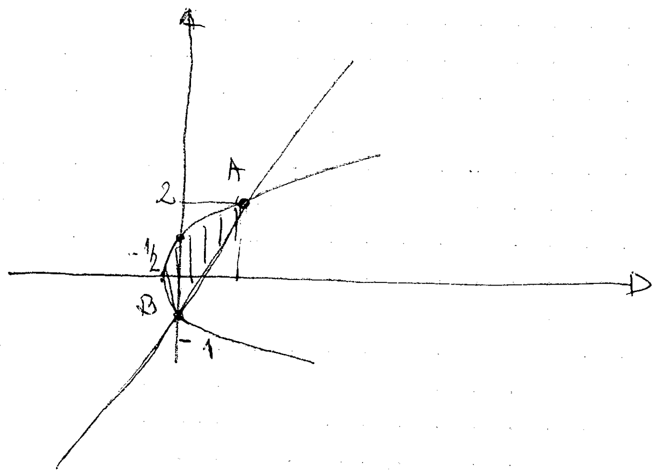
$$\frac{y^2-1}{2}=x, \qquad \frac{y+1}{2}=x$$

$$\frac{y^2-1}{\cancel{2}}=\frac{y+1}{\cancel{2}} \Rightarrow y^2-y-2=0 \qquad (y-2)(y+1)=0$$

$$y_1=2, \quad y_2=-1$$

$$x_1=\frac{3}{2}, \quad x_2=0$$

$A\left(\frac{3}{2}, 2\right)$, $B(0,-1)$



$$P=\int_{-1}^{2}\left[\frac{1}{2}(y+1)-\frac{1}{2}(y^2-1)\right]dy=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{y^2}{2}+y\right)\Big|_{-1}^{2}-\left(\frac{y^3}{3}-y\right)\Big|_{-1}^{2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[2+2-\left(\frac{1}{2}-1\right)-\left(\frac{8}{3}-2\right)+\left(-\frac{1}{3}+1\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(4-\cancel{\frac{2}{3}}+\cancel{\frac{2}{3}}+\frac{1}{2}\right)=\boxed{\frac{9}{4}}$$

4.3.

ЗАД 7: У пресјечним тачкама праве $y = x+1$ и параболе $y = x^2 - 4x + 5$ повучене су тангенте на параболу. Одредити површину лика ограниченог параболом и тангентама.

РЈЕШЕЊЕ:

– пресјек праве и параболе

$$x+1 = x^2 - 4x + 5$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \;;\; (x-1)(x-4) \;;\; x_1 = 1,\ x_2 = 4 \;;\; y_1 = 2,\ y_2 = 5$$

$A(1,2)$, $B(4,5)$

– једначина тангенте на криву у датој тачки

$$\boxed{y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)}$$

$A(1,2)$, $f'(x) = 2x - 4$, $f'(1) = 2 - 4 = -2$

мин. $(2,1)$

$$y - 2 = -2(x-1) \Rightarrow \boxed{y = -2x + 4} \ t_1$$

$B(4,5)$, $f'(4) = 2\cdot 4 - 4 = 4$

$$y - 5 = 4(x-4) \Rightarrow \boxed{y = 4x - 11} \ t_2$$

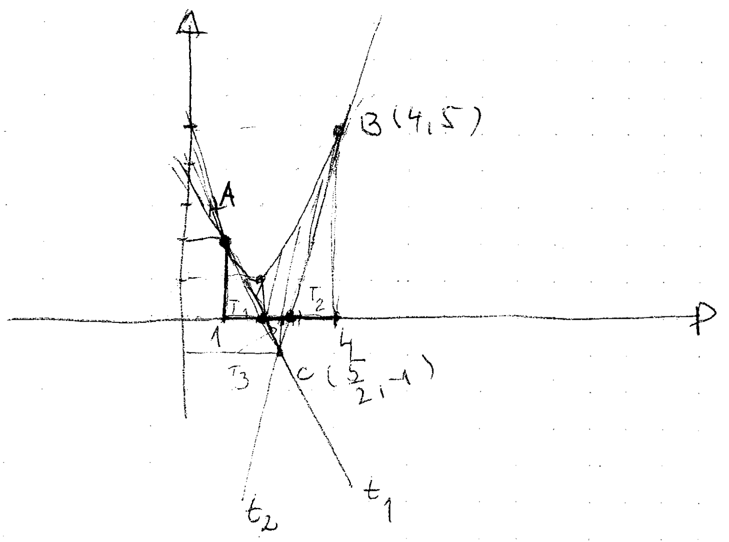
– пресјечна тачка тангенти

$$-2x + 4 = 4x - 11$$

$$-6x = -15, \quad \boxed{x = \frac{5}{2}} \qquad y = -\cancel{2}\cdot\frac{5}{\cancel{2}} + 4 = -1$$

$$\boxed{y = -1}$$

$C\left(\frac{5}{2}, -1\right)$



$$P = \int_1^4 f(x)\,dx - P_{T_1} - P_{T_2} + P_{T_3}$$

$$P_{T_1} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1, \qquad P_{T_2} = \frac{\frac{5}{4} \cdot 5}{2} = \frac{25}{8}$$

$$P_{T_3} = \frac{\frac{3}{2} \cdot 1}{2} = \frac{3}{4}$$

$$\int_1^4 (x^2-4x+5)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 5x\right)\Big|_1^4 = \frac{64}{3} - 32 + 20 - \left(\frac{1}{3} - 2 + 5\right)$$

$$= \frac{64}{3} - 12 - \frac{10}{3} = \frac{54}{3} - 12 = 18 - 12 = 6$$

$$P = 6 - 1 - \frac{25}{8} + \frac{3}{4} = 5 - \frac{25}{8} + \frac{3}{4} = \frac{40 - 25 + 6}{8} = \frac{46-25}{8} = \boxed{\frac{21}{8}}$$

4.3.

ЗАД 8: Израчунати површину лика омеђеног са кривом $(x^2+y^2)^2 = 2a^2xy$.

РЈЕШЕЊЕ: лијева страна ≥ 0 мора бити и $x \cdot y > 0$ (I и III кв.)

прелазимо на поларни координатни систем

$x = \rho\cos\varphi \qquad \varphi \in [0, 2\pi]$

$y = \rho\sin\varphi \qquad \rho \in [0, +\infty)$

$\rho^4 = 2a^2 \cancel{\rho^2} \sin\varphi\cos\varphi$

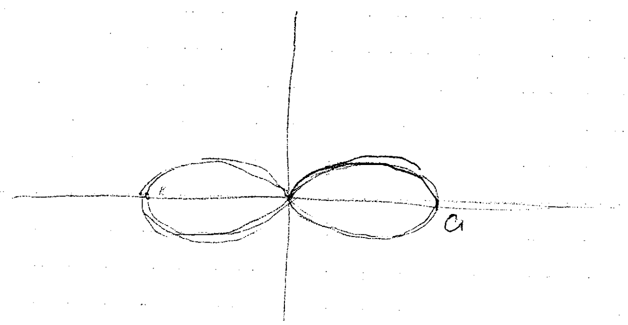
$\rho^2 = 2a^2 \sin\varphi\cos\varphi$

$\rho = \sqrt{2a^2\sin\varphi\cos\varphi} = \sqrt{a^2\sin 2\varphi}$, $\sin 2\varphi > 0$

$\varphi \in \underbrace{[0, \tfrac{\pi}{2}]}_{I} \cup \underbrace{[\pi, \tfrac{3\pi}{2}]}_{III}$

$$P = 2 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \rho^2 \, d\varphi = \int_0^{\pi/2} a^2 \sin 2\varphi \, d\varphi = a^2\left(-\frac{\cos 2\varphi}{2}\right)\Big|_0^{\pi/2}$$

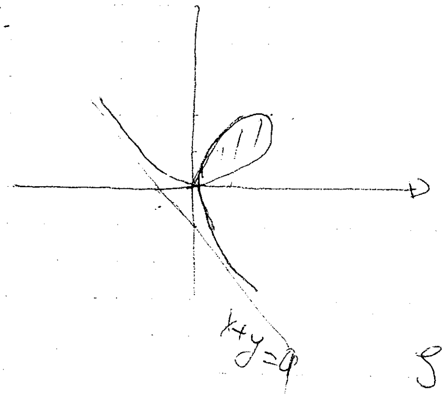
$$P = \frac{a^2}{2}(1+1) = \underline{a^2}$$



Бернулијева лемниската

Зад 9: Израчунати површину лика ограниченог са $x^3+y^3=3axy$ (Декартов лист)

Решење:



$x, y > 0$

$x = \rho\cos\varphi$

$y = \rho\sin\varphi$

$$\rho^{\cancel{3}}(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi) = 3a\cancel{\rho^2}\sin\varphi\cos\varphi$$

$$\rho = \frac{3a\sin\varphi\cos\varphi}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}$$

$$P = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\rho^2\,d\varphi = \frac{9a^2}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)^2}\,d\varphi = \frac{9a^2}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{(\cos^3\varphi)^2(1+\operatorname{tg}^3\varphi)^2}\,d\varphi$$

$$= \frac{9a^2}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2\varphi}{\cos^4\varphi\,(1+\operatorname{tg}^3\varphi)^2}\,d\varphi = \frac{9a^2}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{(1+\operatorname{tg}^3\varphi)^2}\,\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}$$

$$\left|\begin{array}{l} \operatorname{tg}\varphi = t \\ \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} \end{array}\quad \begin{array}{c|c|c} \varphi & 0 & \pi/2 \\ \hline t & 0 & +\infty \end{array}\right| = \frac{9a^2}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^3)^2}\,dt = \dots$$

$$= \frac{9a^2}{2}\cdot\left(-\frac{1}{3(1+t^3)}\right)\Bigg|_0^{+\infty} = \frac{3a^2}{2}$$

ИЗРАЧУНАВАЊЕ ДУЖИНЕ ЛУКА КРИВЕ ЛИНИЈЕ У РАВНИ (РЕКТИФИКАЦИЈА РАВНИ)

ПР 1: Одредити дужину лука криве

$$C=\left\{(x,y):\ x=\frac{t^6}{6}\ \wedge\ y=2-\frac{t^4}{4},\ 0\le t\le \sqrt[4]{8}\right\}$$

РЈЕШЕЊЕ:

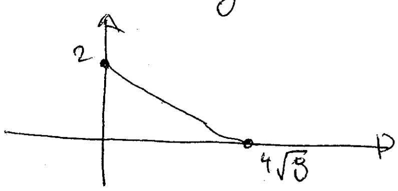
$$s=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt \qquad t\in(t_1,t_2)$$

[Ако је лук C гладак тј. ако су $\dot{x}(t)$ и $\dot{y}(t)$ непрекидне функције (и $\dot{x}^2+\dot{y}^2>0$) онда је $\frac{ds}{dt}=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}$ или $ds^2=dx^2+dy^2$]

$$y'(x)=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{-t^3}{t^5}=-\frac{1}{t^2}<0$$ па је $y(x)$ стално опадајућа

$y'(x)\to-\infty$

$y=0$ за $t=\sqrt[4]{8}$, $\quad y(0)=2$



$$s=\int_0^{\sqrt[4]{8}}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt=\int_0^{\sqrt[4]{8}}t^3\sqrt{t^4+1}\,dt=\left|\begin{array}{c|c|c} \multicolumn{3}{c}{t^4+1=u^2} \\ \multicolumn{3}{c}{4t^3dt=2u\,du} \\ t & 0 & \sqrt[4]{8} \\ \hline u & 1 & 3 \end{array}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^3 u^2du=\frac{1}{6}u^3\Big|_1^3=\frac{1}{6}(27-1)=\frac{13}{3}$$

ПР2: Израчунати дужину лука криве $y = x^{3/2}$ од њене тачке A апсцисе 0, до њене тачке B апсцисе 1.

РЈЕШЕЊЕ:

$$y = f(x) \qquad s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx \quad , \ x \in [a, b]$$

$A(0,0)$, $B(1,1)$

$y = \sqrt{x^3}$, Д.П. $x \geq 0$, $f'(x) = \frac{3}{2} x^{1/2}$

$$s = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4} x}\, dx = \left| \begin{array}{l} 1 + \frac{9}{4} x = t^2 \\ dx = \frac{4}{9} 2t\,dt \end{array} \right.$$

x	0	1
t	1	$\frac{\sqrt{13}}{2}$

$$= \frac{8}{9} \int_1^{\sqrt{13}/2} t^2\, dt = \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{3} t^3 \Big|_1^{\frac{\sqrt{13}}{2}} = \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{13\sqrt{13}}{8} - 1 \right)$$

$$= \boxed{\frac{1}{27} (13\sqrt{13} - 8)}$$

ПР3: Одредити дужину лука криве $x = \frac{1}{4} y^2 - \frac{1}{2} \ln y$ $\quad (1 \leq y \leq e)$

РЈЕШЕЊЕ:

$$s = \int_c^d \sqrt{1 + (x'(y))^2}\, dy \quad , \ y \in [c, d]$$

$$s = \int_1^e \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(y^2 - 2 + \frac{1}{y^2}\right)}\, dy = \frac{1}{2} \int_1^e \left(y + \frac{1}{y}\right) dy$$

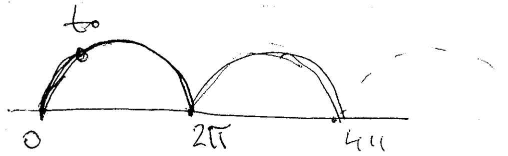
$$= \frac{1}{2} \left[\frac{y^2}{2} + \ln y \right]_1^e = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{1}{4} (e^2 + 1)$$

Испитни задатак:

На првом луку циклоиде $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$

наћи тачку која га дели у односу 1:5.

Решење:



$$\dot{x}=a(1-\cos t)$$
$$\dot{y}=a\sin t$$

$$s=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt \qquad S_1 : S_2 = 1:5$$
$$S_2 = 5S_1$$

$$S_2 = 5\int_0^{t_0}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt = 5a\int_0^{t_0}\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}\,dt$$

$$= 5a\int_0^{t_0}\sqrt{2-2\cos t}\,dt = 5a\int_0^{t_0}\sqrt{2\cdot 2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt$$

$$=10a\int_0^{t_0}\sin\frac{t}{2}\,dt = 20a\left(-\cos\frac{t}{2}\right)\Big|_0^{t_0} = \underline{20a\left(1-\cos\frac{t_0}{2}\right)}$$

$$S_2=\int_{t_0}^{2\pi}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt = 2a\int_{t_0}^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt = \underline{4a\left(1+\cos\frac{t_0}{2}\right)}$$

$$\cancel{20}a\left(1-\cos\frac{t_0}{2}\right)=\cancel{4a}\left(1+\cos\frac{t_0}{2}\right)$$

$$5-5\cos\frac{t_0}{2}=1+\cos\frac{t_0}{2}$$

$$\cos\frac{t_0}{2}=\frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{t_0=2\arccos\frac{2}{3}}$$

ИЗРАЧУНАВАЊЕ ПОВРШИНЕ РОТАЦИОНИХ ПОВРШИ (КОМПЛАНАЦИЈА ОБРТНИХ ПОВРШИ)

$y = f(x)$

$$P_x = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx$$

$$P_y = 2\pi \int_c^d |x| \sqrt{1+x'^2}\, dy \quad , \quad x(y) = f^{-1}(x)$$

ПР1: Израчунати површину насталу ротацијом лука криве $y = \sin x$ око x-осе између тачака $x=0$ и $x=\pi$.

РЈЕШЕЊЕ:

$$P = 2\pi \int_0^{\pi} \sin x \sqrt{1+\cos^2 x}\, dx = \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x\, dx = dt \\ \begin{array}{c|c|c} x & 0 & \pi \\ \hline t & 1 & -1 \end{array} \end{array} \right|$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1+t^2}\, dt$$

$$\int \sqrt{1+t^2}\, dt = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{sh} u \\ dt = \operatorname{ch} u\, du \end{array} \right| = \int \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 u} \cdot \operatorname{ch} u\, du$$

$$= \int \sqrt{\operatorname{ch}^2 u}\, \operatorname{ch} u\, du = \int \operatorname{ch}^2 u\, du = \int \frac{\operatorname{ch} 2u + 1}{2}\, du$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\operatorname{sh} 2u + u\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}\operatorname{sh} u \cdot \operatorname{ch} u + \operatorname{arcsh} t\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(t\sqrt{1+t^2} + \ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)\right)$$

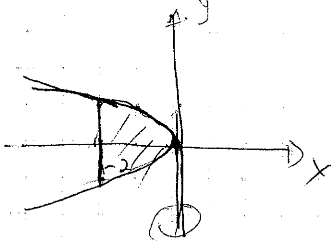
$$P = 2\pi \cdot \frac{1}{2}\left[\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2} - \ln(-1+\sqrt{2})\right]$$

$$P = \pi \cdot \left[2\sqrt{2} + \ln\frac{1+\sqrt{2}}{-1+\sqrt{2}}\right] = \pi\left[2\sqrt{2} + 2\ln(1+\sqrt{2})\right] =$$

$$\underline{P = 2\pi\left[\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})\right]}$$

ПР2: Израчунати површину обртне (ротационе) површи настале ротацијом криве $y^2=-2x$ $(-2\le x\le 0)$ око y-осе.

РЈЕШЕЊЕ:



$$x=-\frac{y^2}{2}$$

x	-2	0
y	± 2	0

$$x'_y=-y$$

$$P_y=2\pi\cdot 2\int_0^2\left|-\frac{y^2}{2}\right|\sqrt{1+y^2}\,dy=2\pi\int_0^2 y^2\sqrt{1+y^2}\,dy$$

$$=\dots=\frac{\pi}{4}\left[18\sqrt{5}-\ln(2+\sqrt{5})\right]$$

ИЗРАЧУНАВАЊЕ ЗАПРЕМИНЕ РОТАЦИОНИХ ТИЈЕЛА (КУБАТУРА ОБРТНИХ ТИЈЕЛА)

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx \quad \text{или} \quad V_y = 2\pi \int_a^b |x f(x)|\,dx$$
, ако $\overline{AB}$ не сијече y-осу

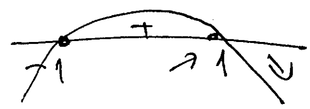
$$V_y = \pi \int_c^d g^2(y)\,dy \quad \text{или} \quad V_x = 2\pi \int_c^d |y g(y)|\,dy$$

ПР1: ИЗРАЧУНАТИ ЗАПРЕМИНУ ОБРТНОГ ТИЈЕЛА КОЈЕ НАСТАЈЕ ОБРТАЊЕМ ЛИКА ОГРАНИЧЕНОГ КРИВОМ $x = \frac{y}{1+y^2}$ (x – ИЗМЕЂУ АПСЦИСЕ СРЕДЊЕ ПРЕВОЈНЕ ТАЧКЕ И МАКСИМУМА) ОКО y-ОСЕ.

РЈЕШЕЊЕ:

$x(y)$ – непарна функција

$$x'(y) = \frac{1+y^2-2y^2}{(1+y^2)^2} = \frac{1-y^2}{(1+y^2)^2}$$



$$x' = 0 \Rightarrow 1-y^2 = 0 \Rightarrow y \pm 1$$

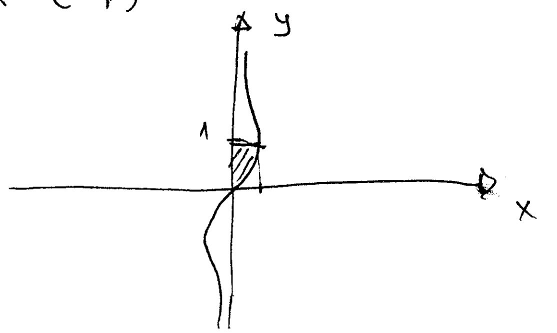
$$x''(y) = \frac{-2y(1+y^2)^{\cancel{2}} - (1-y^2)\cdot 2\cancel{(1+y^2)}\cdot 2y}{(1+y^2)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{2y^3-6y}{(1+y^2)^3}$$

$$x''(y) = 0 \Rightarrow 2y(y^2-3) = 0 \Rightarrow y_1 = 0, \quad y_{2,3} = \pm\sqrt{3}$$

$x''(-1) = 1 > 0$, $x(1) = \frac{1}{2}$

$x''(1) = -1 < 0$

$\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ ТАЧКА МАКСИМУМА



$$V_y = \pi \int_c^d x^2(y)\,dy$$

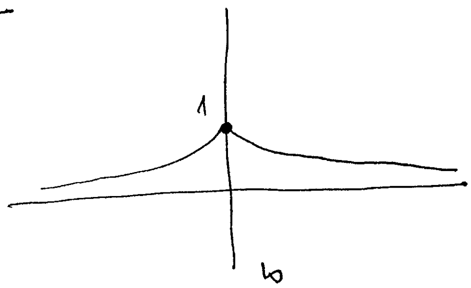
$$V_y = \pi \int_0^1 \frac{y^2}{(1+y^2)^2}\,dy = \dots = \frac{\pi}{8}(\pi - 2)$$

ПР2: Израчунати запремину обртног тијела које настаје обртањем лика ограниченог кривим датим са $y = e^{-|x|}$, $y = 0$

а) око x-осе

б) око y-осе

Рјешење:



а) $$V_x = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \pi \int_a^b f^2(x)\,dx = 2\pi \lim_{b \to +\infty} \int_0^b e^{-2x}\,dx$$

$$= 2\pi \lim_{b \to +\infty} \left[\frac{e^{-2x}}{-2} \right]_0^b = \pi$$

б) $$V_y = 2\pi \lim_{a \to +\infty} \int_0^a x\, f(x)\,dx = 2\pi \lim_{a \to +\infty} \int_0^a x\, e^{-x}\,dx$$

$$= \dots = 2\pi$$

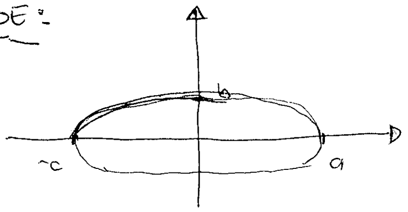
ПР3: ИЗРАЧУНАТИ ЗАПРЕМИНУ ТИЈЕЛА КОЈЕ ОПИСУЈЕ ЕЛИПСА

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ РОТАЦИЈОМ ОКО:

а) x - ОСЕ

б) y - ОСЕ

РЈЕШЕЊЕ:



$$\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2}$$

$$\boxed{y=\pm b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}$$

а) $$V_x=\pi\int_{-a}^{a} b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\pi\left[b^2x-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{a}=\pi b^2\left(a-\frac{a}{3}+a-\frac{a}{3}\right)$$

$$=\frac{4ab^2\pi}{3}$$

б) $$V_y=2\pi\int_0^a x\cdot b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx=2b\pi\int_0^a x\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx$$

$$\left|\begin{array}{l} 1-\frac{x^2}{a^2}=t^2 \\ -\frac{2x\,dx}{a^2}=2t\,dt \end{array}\right.$$

x	0	a
t	1	0

$x\,dx=-a^2t\,dt$

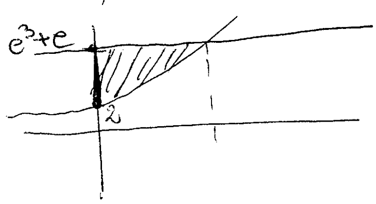
$$=-2b\pi\int_1^0 a^2t^2\,dt=-2b\pi\cdot a^2\frac{t^3}{3}\Big|_1^0$$

$$\boxed{=\frac{2}{3}\pi a^2 b}$$

ПР4: НАЋИ ЗАПРЕМИНУ ТИЈЕЛА КОЈЕ НАСТАЈЕ РОТАЦИЈОМ ДИЈЕЛА ПОВРШИ ОГРАНИЧЕНЕ КРИВОМ $y=e^{3x}+e^{x}$, ПРАВАМА $x=0$ И $y=e^3+e$ ОКО y-ОСЕ.

РЈЕШЕЊЕ: Д.П. $\forall x\in R$, $y'>0$ $\forall x\in R$, ПА ЈЕ $f(x)$ РАСТУЋА

$x=0$, $y=2$



$V_y=$