

ФУНКЦИЈЕ ВИШЕ ПРОМЕНЉИВИХ

Задаток: Наћи а) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$ б) $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x + y}{x^2 - xy + y^2}$

в) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2)^{x^2 y^2}$

Решавање:

а) $0 \leq \left| \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \right| = \left| x \frac{x^2}{x^2 + y^2} + y \frac{y^2}{x^2 + y^2} \right| \leq \left| x \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right| + \left| y \frac{y^2}{x^2 + y^2} \right|$
 $= |x| \underbrace{\left(\frac{x^2}{x^2 + y^2} \right)}_{< 1} + |y| \underbrace{\left(\frac{y^2}{x^2 + y^2} \right)}_{< 1} \leq |x| + |y| \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 0, y \rightarrow 0)$

б) Како је $\underbrace{x^2 - xy + y^2}_{> xy} \geq xy \quad ((x-y)^2 \geq 0)$
 $0 \leq \left| \frac{x + y}{x^2 - xy + y^2} \right| \leq \left| \frac{x + y}{xy} \right| = \left| \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right| \leq \frac{1}{|y|} + \frac{1}{|x|} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty)$

в) $x^2 y^2 \leq \frac{1}{4} (x^2 + y^2)^2$, за $0 < x^2 + y^2 < 1 \Rightarrow$
 $1 \geq (x^2 + y^2)^{x^2 y^2} \geq (x^2 + y^2)^{\frac{1}{4} (x^2 + y^2)^2} \rightarrow 1$

Јер је
 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \underbrace{(x^2 + y^2)}_t^{\frac{1}{4} (x^2 + y^2)^2} = \lim_{t \rightarrow 0+} t^{\frac{1}{4} t^2} = \lim_{t \rightarrow 0+} e^{\frac{1}{4} t^2 \ln t} = 1$

11

3442: Pokazati da je funkcija

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & , x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & , x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

neprekidna u tacki $(0, 0)$ sa svakom pravom koja prolazi kroz tu tacku, ali da nije neprekidna u $(0, 0)$

Primer:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \neq kx}} \frac{kx^3}{x^4 + k^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^3}{x^2(x^2 + k^2)} = \frac{0}{k^2} = 0$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x = ky}} \frac{k^2 y^3}{k^4 y^4 + y^2} = 0$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = x^2}} \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2} \neq f(0, 0)$$

ЗАДА3: Показати да је функција

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

непреставна по променљивим x и y (при фиксној вредности друге променљиве) или да није непреставна као функција друге променљиве у тачки $(0, 0)$.

Решење:

Ако је $y=0$, онда је $f(x, 0) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$
та је функција $f(x, y)$ непреставна по променљивој x у свакој тачки $(x, 0)$.

За $y \neq 0$, функција $f(x, y)$ је непреставна у $(0, y)$

јер је $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2xy}{x^2+y^2} = 0 = f(0, y)$

Друге ствари да је $f(x, y)$ непреставна по променљивој x и y тачки $(0, 0)$.

Како је $f(x, y) = f(y, x)$, за променљиву y се доказ

аналоган.

Пашто је $f(x, x) = 1, f(x, -x) = -1$

по $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ не постоји, тј. функција

$f(x, y)$ је преставна у $(0, 0)$

Зад. 4. ¹¹ Исследовать дифференцируемость функции
 $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ в точке $(0, 0)$.

Решение: $f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1$

аналогично $f'_y(0, 0) = 1$

$$f(x, y) - f(0, 0) = \sqrt[3]{x^3 + y^3} = x + y + (\sqrt[3]{x^3 + y^3} - x - y)$$

$$= f'_x(0, 0) \cdot x + f'_y(0, 0) \cdot y + \alpha(x, y) \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\left[\alpha(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - (f'_x(0, 0) \cdot x + f'_y(0, 0) \cdot y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right]$$

$$\alpha(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt[3]{x^3 + y^3} - x - y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = x}} \frac{\sqrt[3]{2x^3} - 2x}{\sqrt{2x^2}} = \frac{\sqrt[3]{2} - 2}{\sqrt{2}} \neq 0$$

или $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = x}} \frac{\sqrt[3]{2} \cdot x - 2x}{\sqrt{2} \cdot x} = \frac{\sqrt[3]{2} - 2}{\sqrt{2}} \neq 0$

та функция не дифференцируема

Зад 5: Испитати диференцируемость функции

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases} \text{ на } \mathbb{R}^2.$$

Решение:

Ако је $(x, y) \neq (0, 0)$ функција $f(x, y)$ је диференцируема у (x, y) јер имамо f'_x и f'_y непрекидни у (x, y) .

Испитајмо диференцируемост у тачки $(0, 0)$

$$f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} \quad \frac{0}{0} \quad \text{н.т. } (0)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \left(\begin{array}{l} \frac{1}{x} = t \\ x \rightarrow 0, t \rightarrow \infty \end{array} \right)$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} t \cdot e^{-t^2} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^{t^2}} \stackrel{\text{н.т.}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2te^{t^2}} = 0$$

Аналогно $f'_y(0, 0) = 0$

$$\Delta(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} e^{-\frac{1}{s^2}} = 0$$

$$x = s \cos \varphi \quad s \rightarrow 0$$

$$y = s \sin \varphi$$

зато $f(x, y)$ је диференцируема у $(0, 0)$

а самим тим и $\mathbb{R}^2$

Задание: Дана функция

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

а) Показать, что существуют изломы функции $f(x, y)$ в точке $(0, 0)$ (т.е. что существуют произвольной степени бесконечности в точке).

б) Показать, что $f(x, y)$ дифференцируема в $(0, 0)$.

Решение:

$$а) f'_x(x, y) = 2x \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x}{x^2 + y^2} \cos \frac{1}{x^2 + y^2}$$

$$f'_y(x, y) = 2y \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2y}{x^2 + y^2} \cos \frac{1}{x^2 + y^2}$$

$$(x, y) \neq (0, 0)$$

~~$$f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} f'_x$$~~

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left(2x \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x}{x^2 + y^2} \cos \frac{1}{x^2 + y^2} \right)$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left(\underbrace{2x \sin \frac{1}{x^2 + y^2}}_0 - \underbrace{\frac{2x}{x^2 + y^2} \cos \frac{1}{x^2 + y^2}}_{\text{не определен}} \right) = \text{не определен}$$

о.опр.

аналогно за $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f'_x(x, y)$

дифференцируемость

$$f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x^2}}{x} = 0$$

о.о.з.н.е.л.

аналогно $f'_y(0, 0) = 0$

$$f'_x(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{(x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = kx}} \frac{x^2(1+k^2) \sin \frac{1}{x^2(1+k^2)}}{x \sqrt{1+k^2}} = 0$$

та је дифференцируема

неограниченост

узмимо $\cos \frac{1}{x_n^2 + y_n^2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{x_n^2 + y_n^2} = 2n\pi$

а то је кор. за $x_n = y_n = \frac{1}{2\sqrt{n\pi}}, n \in \mathbb{N}$

и $x_n \rightarrow 0, y_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$

$f'_x(x_n, y_n) = -2\sqrt{n\pi} \rightarrow -\infty \quad (n \rightarrow \infty)$

та је f'_x неограничено у $(0, 0)$

3447: дама је функција

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Покажи да је ова непрекидна и има одређене парцијалне изводе у тачки $(0, 0)$, али да није диференцијабилна у $(0, 0)$.

Решење: за $(x, y) \neq (0, 0)$ је непрекидна

$$\text{за } (0, 0) \quad 0 \leq \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{2}} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 0, y \rightarrow 0)$$

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{2}|xy| \leq \sqrt{|xy|} \sqrt{x^2+y^2} \quad |^2 \\ 2xy \leq xy(x^2+y^2) \end{array} \right] \quad 0 \leq \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2}} \right| = \left| \frac{y}{x} \right| \rightarrow 0 \quad y \rightarrow 0$$

$$f'_x(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x^2 y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}, \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

$$f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = 0$$

$$f'_y(0, 0) = 0$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=kx}} \frac{x^2 \cdot k}{x^2(1+k^2)} = \frac{k}{1+k^2} \neq 0$$

није диференцијабилна у $(0, 0)$

Задание: Если $f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Показать, что $f'_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0)$ и что они различны.

Решение:

$$f'_x(x, y) = y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{4x^2 y^3}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$f'_y(x, y) = x \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - \frac{4x^3 y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = 0, \quad f'_y(0, 0) = 0$$

$$f''_{xy}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f'_x(0, y) - f'_x(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y^3}{y^2} = -1$$

$$f''_{yx}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'_y(x, 0) - f'_y(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^2} = 1$$

$$\text{Зн } (x, y) \neq (0, 0)$$

$$f'_{xy}(x, y) = f'_{yx}(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \left(1 + \frac{8x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right)$$

Значит f''_{xy} и f''_{yx} не совпадают в $(0, 0)$.

349: Παιχνίδι με $f'_{xy}(0,0)$ στο f'

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Παρατήρηση: $f'_x(x,y) = \frac{2y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} , (x,y) \neq (0,0)$

$$f'_x(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = 0$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} f'_{xy}(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f'_x(y,0) - f'_x(0,0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{2y^3}{y^4}}{y}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2}{y^2} \quad \text{η δε συνάρτηση}$$

δεν έχει οριζόντιο $f''_{xy}(0,0)$.

ГРАНИЧНА ВРИЈЕДНОСТ ФУНКЦИЈЕ ДВУХ ПРОМЕНЛИВЕ

ПР1: Доказати да постоје узајамне граничне вриједности и да су једнаке, а да не постоји двојна гранична вриједност функције $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$

РЕШЕЊЕ:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2+y^2} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 \cdot y}{0+y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2+y^2} \right) = 0$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{\rho \rightarrow 0 \\ x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi}} \frac{\rho^2 \cos \varphi \sin \varphi}{\rho^2} = \cos \varphi \sin \varphi, \text{ где}$$

двојни лимес не постоји.

ПР2: Нека је $f(x,y) = x \cdot \sin \frac{1}{y}$. Доказати да постоје граничне вриједности $\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x,y) \right)$ и

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x,y)$, а да не постоји $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x,y)$.

РЕШЕЊЕ:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{y} \right) = 0$$

$$0 \leq \left| x \sin \frac{1}{y} \right| \leq |x| \cdot 1 = |x| \quad \left(\begin{matrix} x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \end{matrix} \right)$$

$$\text{тј.} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} x \cdot \sin \frac{1}{y} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} x \cdot \underbrace{\sin \frac{1}{y}}_{\text{не постоји}} \right) = \text{не постоји}$$

ПР 3: Нека је $f(x, y) = (x^2 + y^2)$ или $\frac{1}{xy}$.

Доказати да постоји гвојена гранична вредност,
а да узастопне не постоје.

РЕШЕЊЕ:

$$0 < |f(x, y)| = |(x^2 + y^2) \text{ или } \frac{1}{xy}| \leq |x^2 + y^2| \cdot 1 \quad \left(\begin{matrix} x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \end{matrix} \right)$$

тј. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} (x^2 + y^2) \text{ или } \frac{1}{xy} \right) = \text{не постоји}$$

не постоји

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \text{не постоји}$$

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ ДВУХ ПРОМЕННЫХ

ПР1:

Исследовать непрерывность функции

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Решение:

$$0 < |f(x, y)| = \left| \frac{xy^2}{x^2+y^2} \right| \leq \left| \frac{xy^2}{2xy} \right| = \left| \frac{y}{2} \right| \rightarrow 0 \quad \left(\begin{matrix} x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \end{matrix} \right)$$

на основу $x^2+y^2 \geq 2xy$

функция не непрерывна в $(0, 0)$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0 \neq 1 = f(0, 0)$$

ПР2:

Исследовать непрерывность функции

$$f(x, y) = (x+y) \sin \frac{1}{x} \cdot \sin \frac{1}{y-1}$$

Решение:

Д.п. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \text{ и } y \neq 1\}$

$$y-1=x, \quad x \rightarrow 0, \quad y \rightarrow 1$$

не подходит

$$\lim_{\substack{y \rightarrow 1 \\ x \rightarrow 0}} f(x, y) = \lim_{\substack{x=y-1 \\ y \rightarrow 1}} (y-1+y) \sin \frac{1}{y-1} \cdot \sin \frac{1}{y-1} = \lim_{\substack{x=y-1 \\ y \rightarrow 1}} (2y-1) \left(\sin \frac{1}{y-1} \right)^2$$

т.е. не существует предела в $(0, 1)$ т.е. функция не непрерывна.

ПАРЦИАЛНИ ИЗВОДИ

ПР1: Докажати да функција $z = \frac{e^{xy}}{e^x + e^y}$ задовољава
једначину $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = z(x+y-1)$.

РЕШЕЊЕ:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{e^{xy}(ye^x + ye^y - e^x)}{(e^x + e^y)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{e^{xy}(xe^x + xe^y - e^y)}{(e^x + e^y)^2}$$

$$\text{ш)} \quad \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{e^{xy}}{e^x + e^y} \cdot \frac{(e^x + e^y)(y+x-1)}{e^x + e^y} = z(x+y-1)$$

ПР2:

Наћи прве и друге парцијалне изводе функције
 $u = \arcsin \frac{x}{y}$.

РЕШЕЊЕ:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{y^2}}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{\sqrt{y^2 - x^2}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{y^2}}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = \frac{-x}{y\sqrt{y^2 - x^2}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} =$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} =$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} =$$

ЗАДАЧА: (14.07.2010.)

Испитати да ли је функција

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)(\ln(x^2+y^2)-1) & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

непрекидна и диференцијабилна у $(0,0)$.

Решение:

$$x = \rho \cos \varphi$$

$$y = \rho \sin \varphi$$

$$\left. \begin{matrix} x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \rho \rightarrow 0$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2 (\ln \rho^2 - 1)}{0 - (-\infty)} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{2 \ln \rho - 1}{\frac{1}{\rho^2}} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{\rho}}{-\frac{2}{\rho^3}} =$$

$$= -\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^2 = 0, \text{ значи } f \text{ је функција непрекидна у } (0,0).$$

$$f'_x(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 (\ln x^2 - 1) - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln x - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

аналогно се добије $f'_y(0,0) = 0$

$$w(h,k) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} \frac{(h^2+k^2)(\ln(h^2+k^2)-1) - 0 - 0 \cdot h - 0 \cdot k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$w(h,k) = \lim_{\substack{\rho \rightarrow 0 \\ h = \rho \cos \varphi \\ k = \rho \sin \varphi}} \frac{\rho^2 (\ln \rho^2 - 1)}{\rho} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{2 \ln \rho - 1}{\frac{1}{\rho}} = 0$$

$$w(k,h) = \lim_{\substack{k \rightarrow 0 \\ h \rightarrow 0}} \frac{f(k,h) - f(0,0) - k f'_x(0,0) - h f'_y(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

ИЗ. ИЧ. 2010.)

Испитати да ли је функција

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)(\ln(x^2+y^2)-1), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

непреривна и диференцијабилна у $(0,0)$.

Решение:

$$\begin{aligned} x &= s \cos \varphi \\ y &= s \sin \varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \end{aligned} \quad \left\{ \quad s \rightarrow 0 \right.$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s^2 \cdot (\ln s^2 - 1) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 \ln s^2 - s^2}{1} = \frac{0 \cdot (-\infty)}{1}$$

$$\frac{2 \ln s - 1}{\frac{1}{s^2}} \quad \text{1. п.}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{s}}{-\frac{2}{s^3}} = - \lim_{s \rightarrow 0} s^2 = 0$$

Да је функција непреривна у $(0,0)$

$$f'_x(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(\ln x^2 - 1) - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln x - 1}{\frac{1}{x}} \quad \text{1. п.}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

аналогно

$$f'_y(0,0)$$

$$w(h,k) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} \frac{(h^2+k^2)(\ln(h^2+k^2)-1) - 0 - 0 \cdot 4 - 0 \cdot 6}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$w(h, k) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0+ \\ k = sh}} \frac{h^2(1+s^2)(\ln h^2(1+s^2) - 1)}{h \sqrt{1+s^2}}$$

$$= \lim_{\substack{h \rightarrow 0+ \\ k = sh}} \sqrt{1+s^2} \frac{\ln h^2(1+s^2) - 1}{\frac{1}{h}} = \sqrt{1+s^2} \lim_{\substack{h \rightarrow 0+ \\ k = sh}} \frac{\frac{2h(1+s^2)}{h^2(1+s^2)}}{-\frac{1}{h^2}} = 0$$

Значи g је функција диференцијабилна

у (0,0).

и.з. (16.04.2009.)

функција $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ је дефинисана са
 $f(0,0)=0$ и $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$, ако је $(x,y) \neq (0,0)$

а) Показати да је функција f непрекидна
у тачки $(0,0)$ и да у тој тачки има
оде парцијалне изводе.

б) Испитати диференцијабилност функције
 f у тачки $(0,0)$.

Решење:
 $0 \leq |f(x,y)| = \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| \leq \left| \frac{x^2 y}{2xy} \right| \leq \frac{|x|}{2} \rightarrow 0, \quad \begin{matrix} x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \end{matrix}$

тј. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ та је непрекидна

$$f'_x(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{0}{x^2} - 0}{x} = 0$$

аналогно $f'_y(0,0) = 0$

в) $w(h,k) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} \frac{\frac{h^2 k}{h^2 + k^2} - 0 - 0 \cdot h - 0 \cdot k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} \frac{h^2 k}{(h^2 + k^2)^{3/2}}$

$= \lim_{\substack{h \rightarrow 0+ \\ k=sh}} \frac{h^3 \cdot s}{h^3 \sqrt{1+s^2}} = \frac{s}{\sqrt{1+s^2}}$, значи f
није
диференцијабилна

и.з. (14.04.2008.)

Дана је функција $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Показати да је она у доolini тачке $(0,0)$ непрекидна и да има ограничено парцијалне изводе, али да није диференцијабилна у тачки $(0,0)$.

Решање:

Непрекидност;

$$0 \leq \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2}} \right| = |y| \rightarrow 0 \quad \begin{pmatrix} x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \end{pmatrix}$$

Он је $f(x,y)$ непрекидна у $(0,0)$

~~$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$~~

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y\sqrt{x^2+y^2} - xy \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{y\sqrt{x^2+y^2} - \frac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x^2y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} = \frac{y(x^2+y^2) - x^2y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$$

$$0 \leq \left| \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x^2y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \right| = \left| \frac{y(x^2+y^2) - x^2y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \right| = \left| \frac{y^3}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \right|$$

$$\leq \left| \frac{y^3}{y^3} \right| = 1$$

- 5 -

аналогно

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{xy^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$$

дифференцируемость

$$w(h, k) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} \frac{f(h, k) - f(0, 0) - (f'_x(0, 0) \cdot h + f'_y(0, 0) \cdot k)}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

$$f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0, \quad f'_y(0, 0) = 0$$

$$w(h, k) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} \frac{\frac{hk}{\sqrt{h^2 + k^2}}}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} \frac{hk}{h^2 + k^2} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k = sh}} \frac{sh^2}{h^2 + s^2 h^2}$$

$$= \frac{s}{1 + s^2} \neq 0$$

~~она не дифференцируема~~

она не дифференцируема

(и-з. 10.7.2007)

функција $f(x, y)$ је дефинисана са

$$f(0, 0) = 0 \text{ и } f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \text{ ако је } (x, y) \neq (0, 0)$$

Показати да функција f има у тачки $(0, 0)$ два различита парцијална извода због грубог реда, и да су они различити.

Решение: $f(x, y) = \frac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2}$

$$f'_x(x, y) = \frac{(3x^2 y - y^3)(x^2 + y^2) - (x^3 y - x y^3) \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$= \frac{3x^4 y + 3x^2 y^3 - x^2 y^3 - y^5 - 2x^4 y + 2x^2 y^3}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$f'_x(x, y) = \frac{y(x^4 - y^4) + 4x^2 y^3}{(x^2 + y^2)^2} = y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{4x^2 y^3}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$f'_y(x, y) = \frac{(x^3 - 3xy^2)(x^2 + y^2) - (x^3 y - x y^3) \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$f'_y(x, y) = \frac{x^5 + x^3 y^2 - 3x^3 y^2 - 3xy^4 - 2x^3 y^2 + 2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^5 - 4x^3 y^2 - xy^4}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$f'_y(x, y) = x \frac{x^4 - y^4}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{4x^3 y^2}{(x^2 + y^2)^2} = x \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - \frac{4x^3 y^2}{x^2 + y^2}$$

$$f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = 0$$

- 4 -

$$f'_y(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y} = 0$$

$$f''_{xy}(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f'_x(0,y) - f'_x(0,0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{-y^3}{y^2} - 0}{y} = -1$$

$$f''_{yx}(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'_y(x,0) - f'_y(0,0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{x^2} - 0}{x} = 1$$

