РИКАТИЕВА ЈЕДНАЧИНА

$$y' + p(x)y = q(x) + r(x)y^2 \quad , \ q(x), r(x) \neq 0$$

СМЈЕНА: $y = y_1 + \frac{1}{z}$, $z = z(x)$, y_1 - ПАРТИКУЛАРНО РЈЕШЕЊЕ

ЗАД: НАЋИ ОПШТИ ИНТЕГРАЛ ЈЕДНАЧИНЕ

$$y'(1-\sin x\cos x) + y^2\cos x - y + \sin x = 0$$

АКО ЈЕ ЊЕН ПАРТИКУЛАРНИ ИНТЕГРАЛ $y_1 = \cos x$.

РЈЕШЕЊЕ:

СМЈЕНА: $y = \cos x + \frac{1}{z}$

$$y' = -\sin x - \frac{z'}{z^2}$$

$$\left(-\sin x - \frac{z'}{z^2}\right)(1-\sin x\cos x) + \left(\cos x + \frac{1}{z}\right)^2 \cdot \cos x - \cos x - \frac{1}{z} + \sin x = 0$$

$$\cancel{-\sin x} + \sin^2 x\cos x - \frac{z'}{z^2} + \sin x\cos x\,\frac{z'}{z^2} + \left(\cos^2 x + \frac{2\cos x}{z} + \frac{1}{z^2}\right)\cos x$$

$$-\cos x - \frac{1}{z} + \cancel{\sin x} = 0$$

$$\cancel{(1-\cos^2 x)}\cdot\cos x - \frac{z'}{z^2} + \sin x\cos x\cdot\frac{z'}{z^2} + \cancel{\cos^3 x} + \frac{2\cos^2 x}{z} + \frac{\cos x}{z^2} \cancel{-\cos x}$$

$$-\frac{1}{z} = 0$$

$$-\frac{z'}{z^2} + \sin x\cos x\cdot\frac{z'}{z^2} + \frac{2\cos^2 x}{z} + \frac{\cos x}{z^2} - \frac{1}{z} = 0 \quad / \cdot(-z^2)$$

$$z'(1-\sin x\cos x) + z(1-2\cos^2 x) - \cos x = 0$$

$$z' + \frac{1-2\cos^2 x}{1-\sin x\cos x}\cdot z = \frac{\cos x}{1-\sin x\cos x}$$

ЛИНЕАРНА ДИФ. ЈЕД.

$$z(x) = e^{-\int \frac{1-2\cos^2 x}{1-\sin x\cos x}dx}\left(C + \int \frac{\cos x}{1-\sin x \cos x} e^{\int \frac{1-2\cos^2 x}{1-\sin x\cos x}dx} dx\right)$$

$$\left[\int \frac{1-2\cos^2 x}{1-\sin x\cos x}dx = -2\int \frac{\cos 2x}{2-\sin 2x}dx = \left|\begin{matrix}\sin 2x = t\\ 2\cos 2x\,dx = dt\end{matrix}\right| = -\int \frac{dt}{2-t}\right.$$

$$\left. = \ln|2-t| = \ln|2-\sin 2x|\right]$$

$$z(x) = e^{-\ln(2-\sin 2x)}\left(C + \int \frac{\cos x}{1-\sin x\cos x} e^{\ln(2-\sin 2x)} dx\right)$$

$$= \frac{1}{2-\sin 2x}\left(C + \int \frac{\cos x}{1-\sin x\cos x}\cdot(2-\sin 2x)\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{2-\sin 2x}\left(C + 2\int \cos x\,dx\right) = \frac{C}{2-\sin 2x} + \frac{2\sin x}{2-\sin 2x}$$

$$z(x) = \frac{C + 2\sin x}{2-\sin 2x}$$

$$y(x) = \cos x + \frac{2-\sin 2x}{C+2\sin x} = \frac{2 + C\cdot\cos x}{C + 2\sin x}$$

ЗАД: Дата је диф. једначина

$$y' - \frac{1}{1-x^3}y^2 + \frac{x^2}{1-x^3}y + \frac{2x}{1-x^3} = 0 .$$

Одредити константу a тако да функција $y = ax^2$ буде партикуларни интеграл дате диференцијалне једначине, а затим наћи општи интеграл.

Рјешење:

$$y' = 2ax$$

$$2ax - \frac{a^2x^4}{1-x^3} + \frac{ax^4}{1-x^3} + \frac{2x}{1-x^3} = 0 \quad / \cdot (1-x^3)$$

$$2ax(1-x^3) - a^2x^4 + ax^4 + 2x = 0$$

$$-x^4(a^2+a) + 2(a+1)x = 0$$

$$-a(a+1)x^4 + 2(a+1)x = 0$$, а то ће бити једнако нули за $a = -1$

$$y_p = -x^2$$

Диференцијална једначина је Рикатијева па уводимо смјену $y = -x^2 + \frac{1}{z}$.

$$y' = -2x - \frac{z'}{z^2}$$

$$-2x - \frac{z'}{z^2} - \frac{1}{1-x^3}\left(-x^2 + \frac{1}{z}\right)^2 + \frac{x^2}{1-x^3}\left(-x^2 + \frac{1}{z}\right) + \frac{2x}{1-x^3} = 0$$

$$-2x - \frac{z'}{z^2} - \frac{1}{1-x^3}\left(x^4 - \frac{2x^2}{z} + \frac{1}{z^2}\right) - \frac{x^4}{1-x^3} + \frac{x^2}{1-x^3}\cdot\frac{1}{z} + \frac{2x}{1-x^3} = 0 \quad / \cdot z^2(1-x^3)$$

$$-2x(1-x^3)\cdot z^2 - z'(1-x^3) - x^4z^2 + 2x^2z - 1 - x^4z^2 + x^2z + 2xz^2 = 0$$

$$-\cancel{2xz^2} + \cancel{2x^4z^2} - z'(1-x^3) - \cancel{x^4z^2} + 2x^2z - 1 - \cancel{x^4z^2} + x^2z + \cancel{2xz^2} = 0$$

$$-z'(1-x^3) + 3x^2z - 1 = 0$$

$$z' - \frac{3x^2}{1-x^3}\, z = -\frac{1}{1-x^3}$$ лин. диф. јед.

$$z(x) = e^{\int \frac{3x^2}{1-x^3}dx}\left(c - \int \frac{1}{1-x^3}\cdot e^{-\int \frac{3x^2}{1-x^3}dx}\, dx\right)$$

$$z(x) = e^{-\ln|1-x^3|}\left(c - \int \frac{1}{1-x^3}\, e^{\ln|1-x^3|}\, dx\right)$$

$$z(x) = \frac{1}{1-x^3}\left(c - \int dx\right) = \frac{c-x}{1-x^3}$$

$$y = -x^2 + \frac{1-x^3}{c-x} = \frac{1-cx^2}{c-x}$$

ТОТАЛНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛ

$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow \exists u(x,y)$ ТАКВО ДА ЈЕ $du = Pdx + Qdy$

$\frac{\partial u}{\partial x} = P \Rightarrow u = \int Pdx + \varphi(y)$, А ИЗ $\frac{\partial u}{\partial y} = Q$ НАЛАЗИМО $\varphi(y)$

ИЛИ

$u = \int Qdy + \varphi(x)$, А ИЗ $\frac{\partial u}{\partial x} = P$ НАЛАЗИМО $\varphi(x)$

ЗАД: НАЋИ ОПШТИ ИНТЕГРАЛ ЈЕДНАЧИНЕ

$(y^2 e^{xy^2} + 4x^3)dx + (2xy e^{xy^2} - 3y^2)dy = 0$

РЈЕШЕЊЕ:

$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y e^{xy^2} + y^2 e^{xy^2} \cdot 2xy = 2y e^{xy^2} + 2xy^3 e^{xy^2}$

$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2y e^{xy^2} + 2xy e^{xy^2} \cdot y^2 = 2y e^{xy^2} + 2xy^3 e^{xy^2}$

ЗНАЧИ $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

$u(x,y) = \int (e^{xy^2} y^2 + 4x^3)dx + \varphi(y) = e^{xy^2} + x^4 + \varphi(y)$

$\frac{\partial u}{\partial y} = 2xy e^{xy^2} + \varphi'(y)$

$2xy e^{xy^2} + \varphi'(y) = 2xy e^{xy^2} - 3y^2 \Rightarrow \varphi(y) = -3\int y^2 dy + c$

$\varphi(y) = -y^3 + c$

ОПШТЕ РЈЕШЕЊЕ: $e^{xy^2} + x^4 - y^3 = c$

ЗАД: НАЋИ ОПШТИ ИНТЕГРАЛ ЈЕДНАЧИНЕ

$$(xy^2-y^3)\,dx+(1-xy^2)\,dy=0$$

РЈЕШЕЊЕ:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2xy-3y^2, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=-y^2$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}$$

ТРАЖИМО ИНТЕГРАЦИОНИ ФАКТОР (МНОЖИТЕЉ) λ

$$\frac{\frac{d\lambda}{dx}}{\lambda}=\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} \qquad (\lambda=\lambda(x))$$

или

$$\frac{\frac{d\lambda}{dy}}{\lambda}=\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{P} \qquad (\lambda=\lambda(y))$$

$$\frac{\frac{d\lambda}{dy}}{\lambda}=\frac{-y^2-2xy+3y^2}{xy^2-y^3}=\frac{-2}{y} \Rightarrow \frac{d\lambda}{\lambda}=-\frac{2}{y}\,dy$$

$$\ln|\lambda|=-2\ln|y|$$

$$\boxed{\lambda=\frac{1}{y^2}}$$

$$\frac{1}{y^2}(xy^2-y^3)\,dx+\frac{1}{y^2}(1-xy^2)\,dy=0$$

$$(x-y)\,dx+\left(\frac{1}{y^2}-x\right)dy=0 \qquad \frac{\partial P}{\partial y}=-1, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=-1$$

$$u(x,y)=\int(x-y)\,dx+\varphi(y)=\frac{x^2}{2}-xy+\varphi(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=Q \Rightarrow -x+\varphi'(y)=\frac{1}{y^2}-x \Rightarrow \varphi'(y)=\frac{1}{y^2}$$

$$\varphi(y)=\int\frac{dy}{y^2}=-\frac{1}{y}+C$$

ОПШТЕ РЈЕШЕЊЕ: $\boxed{\frac{x^2}{2}-xy-\frac{1}{y}=C}$

ЗАД! ПОКАЗАТИ ДА ЈЕДНАЧИНА

$(x-y)dx + (x+y)dy = 0$ ИМА ИНТЕГРАЦИОНИ ФАКТОР

ОБЛИКА $\lambda = \lambda(x^2+y^2)$ И НАЋИ ЊЕН ОПШТИ ИНТЕГРАЛ.

РЕШЕЊЕ:

$$\underbrace{\lambda(x^2+y^2)(x-y)}_{P}dx + \underbrace{\lambda(x^2+y^2)(x+y)}_{Q}dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\lambda'(x^2+y^2)\cdot 2y(x-y) + \lambda(x^2+y^2)(-1) = \lambda'(x^2+y^2)\cdot 2x\cdot(x+y) + \lambda(x^2+y^2)\cdot 1$$

$$\lambda'(x^2+y^2)(2\cancel{xy} - 2y^2 - 2x^2 - 2\cancel{xy}) = 2\lambda(x^2+y^2)$$

$$-2(x^2+y^2)\cdot\lambda'(x^2+y^2) = 2\lambda(x^2+y^2)$$

$$-\frac{d\lambda(x^2+y^2)}{d(x^2+y^2)} = \frac{\lambda(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \Rightarrow -\frac{d\lambda(x^2+y^2)}{\lambda(x^2+y^2)} = \frac{d(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \Big/ \int$$

$$-\ln\lambda(x^2+y^2) = \ln(x^2+y^2) \Rightarrow \lambda(x^2+y^2) = \frac{1}{x^2+y^2}$$

$$\frac{x-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x+y}{x^2+y^2}dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-x^2-2xy+y^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{-x^2-2xy+y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$u(x,y) = \int\frac{x-y}{x^2+y^2}dx + \varphi(y) = \underbrace{\int\frac{x\,dx}{x^2+y^2}}_{I_1} - y\underbrace{\int\frac{dx}{x^2+y^2}}_{I_2} + \varphi(y)$$

$$I_1 = \left|\begin{matrix} x^2+y^2 = t \\ x\,dx = \frac{dt}{2}\end{matrix}\right| = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$$

$$I_2 = \frac{1}{y^2}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1} = \left| \begin{matrix} \frac{x}{y} = t \\ \frac{dx}{y} = dt \end{matrix} \right| = \frac{1}{y}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{y}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{y}$$

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) - \mathrm{arctg}\,\frac{x}{y} + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2y}{x^2+y^2} - \frac{-\frac{x}{y}}{\frac{x^2}{y^2}+1} + \varphi'(y)$$

$$\frac{y}{x^2+y^2} + \frac{x}{x^2+y^2} + \varphi'(y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}$$

$$\varphi'(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi(y) = c$$

ОПШТЕ РЕШЕЊЕ: $\underline{\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) - \overset{??}{}\mathrm{arctg}\,\frac{x}{y} = c}$

ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ВИШЕГ РЕДА

ПР1:

$$y''' - y'' + y' - y = 0$$

СМЈЕНА $y = e^{\lambda x}$, $y' = \lambda e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$, $y''' = \lambda^3 e^{\lambda x}$

КАРАКТЕРИСТИЧНА ЈЕДНАЧИНА

$$\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 + 1) = 0, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = \pm i$$

$$y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + C_3 e^{\lambda_3 x} = C_1 e^x + C_2 e^{ix} + C_3 e^{-ix}$$

$$\underline{y = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x}$$

ПР2: $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

КАРАКТЕРИСТИЧНА ЈЕДНАЧИНА $r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = 0$

$$(r-1)^3 = 1$$

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 x^2 e^x = e^x (C_1 + C_2 x + C_3 x^2)$$

ПР3: $y^{IV} + 2y'' + y = 0$

КАРАКТЕРИСТИЧНА ЈЕДНАЧИНА $r^4 + 2r^2 + 1 = 0$

$$(r^2 + 1)^2 = 0$$

$$r_{1,2} = \pm i, \quad r_{3,4} = \pm i$$

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x(C_3 \cos x + C_4 \sin x)$$

ЗАД1: МЕТОДОМ НЕОДРЕЂЕНИХ КОЕФИЦИЈЕНАТА РИЈЕШИТИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНУ ЈЕДНАЧИНУ

$$y'' + y' + y = x^2 + 3x + 5 \quad (1)$$

РЈЕШЕЊЕ:

КАРАКТЕРИСТИЧНА ЈЕДНАЧИНА $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$y_H = e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

ОПШТЕ РЈЕШЕЊЕ ЈЕ $y_{o.p} = y_H + y_p$

ПАРТИКУЛАРНО РЈЕШЕЊЕ y_p ТРАЖИМО У ОБЛИКУ

$$y_p = Ax^2 + Bx + C$$

$$y_p' = 2Ax + B \quad , \quad y_p'' = 2A$$

УВРСТИМО У ЈЕДНАЧИНУ (1)

$$2A + 2Ax + B + Ax^2 + Bx + C = x^2 + 3x + 5$$

$A = 1$

$2A + B = 3$

$2A + B + C = 5$

$A = 1$

$B = 1$

$C = 2$

$$y_p = x^2 + x + 2$$

$$y_{o.p.} = e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + x^2 + x + 2$$

ЗАД2: МЕТОДОМ НЕОДРЕЂЕНИХ КОЕФИЦИЈЕНАТА РИЈЕШИТИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНУ ЈЕДНАЧИНУ

$$y''' - y'' = x+7$$

РЈЕШЕЊЕ:

КАРАКТЕРИСТИЧНА ЈЕДНАЧИНА $\lambda^3 - \lambda^2 = 0$

$\lambda^2(\lambda-1) = 0$

$\lambda_{1,2} = 0, \quad \lambda_3 = 1$

$$y_H = C_1 + C_2 x + C_3 e^x$$

$y_p = x^2 (Ax+B)$; ЈЕР ЈЕ $\lambda=0$ ДВОСТРУКИ КОРЈЕН КАРАКТЕРИСТИЧНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

$y_p = Ax^3 + Bx^2$

$y_p' = 3Ax^2 + 2Bx$, $y_p'' = 6Ax + 2B$, $y_p''' = 6A$

$6A - 6Ax - 2B = x+7$

$-6A = \cancel{1}$, $A = -\frac{1}{6}$

$6A - 2B = 7$, $-1-2B = 7$, $B = -4$

$$y_p = -\frac{x^3}{6} - 4x^2$$

$$y_{o.p} = C_1 + C_2 \cancel{x} + C_3 e^x - \frac{x^3}{6} - 4x^2$$

ЗАД 3: Ријешити диф. једначину

$$y''' - 4y' = xe^{2x} + \sin x + x$$

РЈЕШЕЊЕ:

$$\lambda^3 - 4\lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda^2 - 4) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = \pm 2$$

$$y_H = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x}$$

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3}$$

$$y_{p_1} = x(Ax+B)e^{2x} = (Ax^2 + Bx)e^{2x}$$

јер је 2 корјен карактеристичне једначине вишеструкости 1.

$y_{p_2} = C \cdot \cos x$ (јер $\lambda = \pm i$ није корјен карактеристичне једначине а у једначини фигуришу y' и y''')

$y_{p_3} = (Dx + E) \cdot x \Rightarrow x = 0$ је једноструки карактеристични корјен

$$= Dx^2 + Ex$$

$$y_{p_1}' = (2Ax + B)e^{2x} + 2(Ax^2 + Bx)e^{2x} = e^{2x}(2Ax^2 + 2Ax + 2Bx + B)$$

$$y_{p_1}'' = 2e^{2x}(2Ax^2 + 2Ax + 2Bx + B) + e^{2x}(4Ax + 2A + 2B)$$

$$= e^{2x}(4Ax^2 + 8Ax + 4Bx + 4B + 2A)$$

$$y_{p_1}''' = 2e^{2x}(4Ax^2 + 8Ax + 4Bx + 4B + 2A) + e^{2x}(8Ax + 8A + 4B)$$

$$= e^{2x}(8Ax^2 + 24Ax + 8Bx + 12B + 12A)$$

$$\cancel{8Ax^2}+24Ax+8Bx+12B+12A-\cancel{8Ax^2}-8Ax-\cancel{8Bx}-4B=x$$

$16A=1$, $\boxed{A=\frac{1}{16}}$ $\quad 12B+12A-4B=0 \Rightarrow \boxed{B=-\frac{3}{32}}$

$$y_{p_1}=x\left(\frac{1}{16}x-\frac{3}{32}\right)e^{2x}$$

$y_{p_2}'=-C\sin x$, $y_{p_2}''=-C\cos x$, $y_{p_2}'''=C\sin x$

$C\sin x+4C\sin x=\sin x \Rightarrow 5C=1 \Rightarrow C=\frac{1}{5}$

$$y_{p_2}=\frac{1}{5}\cos x$$

$y_{p_3}'=2Dx+E$, $y_{p_3}''=2D$, $y_{p_3}'''=0$

$-8Dx-4E=x \Rightarrow -8D=1 \Rightarrow D=-\frac{1}{8}$, $E=0$

$$y_{p_3}=-\frac{1}{8}x^2$$

ОПШТЕ РЕШЕЊЕ: $\quad y=y_H+y_{p_1}+y_{p_2}+y_{p_3}$

$$y=C_1+C_2e^{2x}+C_3e^{-2x}+\left(\frac{1}{16}x^2-\frac{3}{32}x\right)e^{2x}+\frac{1}{5}\cos x-\frac{1}{8}x^2$$

И.З. РИЈЕШИТИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНУ ЈЕДНАЧИНУ

$y''' + y' = tg\,x$ И НАЋИ ОНО ПАРТИКУЛАРНО РЈЕШЕЊЕ

ЗА КОЈЕ ЈЕ

$y(0) = 1, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = 3$

РЈЕШЕЊЕ:

$\lambda^3 + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \lambda(\lambda^2+1) = 0, \quad \lambda_1 = 0,$

$\lambda_{2,3} = \pm i$

$y_H = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x$

МЕТОДА ВАРИЈАЦИЈЕ КОНСТАНТИ

$y_H = C_1(x) + C_2(x) \cdot \cos x + C_3(x) \sin x$

$C_1'(x) + C_2'(x) \cdot \cos x + C_3'(x) \sin x = 0$

$-C_2'(x) \sin x + C_3'(x) \cos x = 0 \qquad / \cdot \sin x$

$-C_2'(x) \cos x - C_3'(x) \sin x = tg\,x \qquad / \cdot \cos x$

$C_1'(x) + C_2'(x) \cos x + C_3'(x) \sin x = 0$

$\left.\begin{array}{l} -C_2'(x) \sin^2 x + C_3'(x) \sin x \cos x = 0 \\ -C_2'(x) \cos^2 x - C_3'(x) \sin x \cos x = \sin x \end{array}\right\} +$

$C_1'(x) + C_2'(x) \cdot \cos x + C_3'(x) \sin x = 0$

$-C_2'(x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = \sin x \Rightarrow C_2'(x) = -\sin x$

$C_2(x) = -\int \sin x\,dx + C_2 = \cos x + C_2$

$\boxed{C_2(x) = \cos x + C_2}$

$$\sin^2 x + C_3'(x)\cdot \cos x = 0 \Rightarrow \boxed{C_3'(x) = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}}$$

$$C_3(x) = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos x}\,dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x\,dx = dt \\ dx = \frac{dt}{\cos x} \end{array} \right| = -\int \frac{t^2\,dt}{\cos^2 x}$$

$$= -\int \frac{t^2\,dt}{1-t^2} = \int dt + \int \frac{dt}{t^2-1} = \sin x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right| + C_3$$

$$\boxed{C_3(x) = \sin x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right| + C_3}$$

$$C_1'(x) - \sin x\cos x - \frac{\sin^2 x}{\cos x}\cdot \sin x = 0$$

$$C_1'(x) = \sin x\cos x + \frac{\sin^3 x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$C_1(x) = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x| + C_1$$

$$y_{o.p.} = -\ln|\cos x| + C_1 + (\cos x + C_2)\cdot\cos x + \left(\sin x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right| + C_3\right)\sin x$$

$$\boxed{y_{o.p} = -\ln|\cos x| + C_1 + C_2\cdot\cos x + 1 + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right|\cdot \sin x + C_3\sin x}$$

$$y(0) = C_1 + C_2 + 1 \Rightarrow C_1 + C_2 + 1 = 1$$

$$y'_{o.R} = \frac{\sin x}{\cos x} - C_2\sin x + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin x + 1}{\sin x - 1}\cdot\left(\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right)'\cdot \sin x$$

$$+ \frac{\cos x}{2}\cdot \ln\left|\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right| + C_3\cos x$$

$$y'_{O.R} = \frac{\sin x}{\cos x} - C_2 \sin x + \frac{1}{2}\cdot\frac{\cancel{\sin x+1}}{\sin x-1}\cdot\frac{\cos x(\sin x+1)-\cos x(\sin x-1)}{(\sin x+1)^{\cancel{2}}}\cdot\sin x$$

$$+ \frac{1}{2}\cos x\cdot\ln\left|\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right| + C_3\cos x$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x} - C_2\sin x + \frac{1}{\cancel{2}}\,\frac{\cancel{2}\sin x\cos x}{\underbrace{\sin^2 x-1}_{-\cos^2 x}} + \frac{1}{2}\cos x\cdot\ln\left|\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right| + C_3\cos x$$

$$y'(0) = C_3 \Rightarrow \boxed{C_3 = 2}$$

$$y'_{O.R} = \cancel{\frac{\sin x}{\cos x}} - C_2\sin x - \cancel{\frac{\sin x}{\cos x}} + \frac{1}{2}\cos x\cdot\ln\left|\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right| + C_3\cos x$$

$$y''_{O.R} = -C_2\cos x - C_3\sin x - \frac{1}{2}\sin x\cdot\ln\left|\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right|$$

$$+ \frac{1}{\cancel{2}}\cos x\cdot\frac{\cancel{\sin x+1}}{\sin x-1}\cdot\frac{\cancel{2}\cos x}{(\sin x+1)^{\cancel{2}}}$$

$$= -C_2\cos x - C_3\sin x - \frac{1}{2}\sin x\cdot\ln\left|\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right| + \frac{\cos^2 x}{-\cos^2 x}$$

$$y''(0) = -C_2 - 1 \Rightarrow \underline{-C_2 - 1 = 3} \Rightarrow \boxed{C_2 = -4}$$

$$C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow \boxed{C_1 = 4}$$

ПА ЈЕ ПАРТИКУЛАРНО РЈЕШЕЊЕ

$$y_p = -\ln|\cos x| + 4 - 4\cos x + 1 + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right|\cdot\sin x + 2\sin x$$

$$= -\ln|\cos x| - 4\cos x + 2\sin x + \frac{\sin x}{2}\cdot\ln\left|\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right| + 5$$

ЗАД: НАЂИ ОПШТЕ РЈЕШЕЊЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

$$y'' + 5y' + 6y = \frac{1}{1+e^{2x}}$$

РЈЕШЕЊЕ:

КАРАКТЕРИСТИЧНА ЈЕДНАЧИНА

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$$
$$\lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = -2$$

$$y_H = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-2x}$$

МЕТОДА ВАРИЈАЦИЈЕ КОНСТАНТИ

$$y_H = C_1(x) e^{-3x} + C_2(x) e^{-2x}$$

$$C_1'(x) e^{-3x} + C_2'(x) e^{-2x} = 0$$
$$-3C_1'(x) e^{-3x} - 2C_2'(x) e^{-2x} = \frac{1}{1+e^{2x}}$$

$$D = \begin{vmatrix} e^{-3x} & e^{-2x} \\ -3e^{-3x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = e^{-5x}, \quad D_{C_1'(x)} = \begin{vmatrix} 0 & e^{-2x} \\ \frac{1}{1+e^{2x}} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = \frac{-e^{-2x}}{1+e^{2x}}$$

$$D_{C_2'(x)} = \begin{vmatrix} e^{-3x} & 0 \\ -3e^{-3x} & \frac{1}{1+e^{2x}} \end{vmatrix} = \frac{e^{-3x}}{1+e^{2x}}$$

$$C_1'(x) = \frac{-\frac{e^{-2x}}{1+e^{2x}}}{e^{-5x}} = -\frac{e^{3x}}{1+e^{2x}}$$

$$C_2'(x) = \frac{\frac{e^{-3x}}{1+e^{2x}}}{e^{-5x}} = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$$

$$C_1(x) = -\int \frac{e^{3x}\,dx}{1+e^{2x}} = \left| \begin{matrix} e^x = t \\ e^x dx = dt \end{matrix} \right| = -\int \frac{t^2 dt}{1+t^2} = -t + \operatorname{arctg} t + C_1$$

$$\boxed{C_1(x) = -e^x + \operatorname{arctg} e^x + C_1}$$

$$C_2(x) = \int \frac{e^{2x}\,dx}{1+e^{2x}} = \frac{1}{2}\ln(1+e^{2x}) + C_2$$

$$\boxed{y = (-e^x + \operatorname{arctg} e^x + C_1) e^{-3x} + \left[\frac{1}{2}\ln(1+e^{2x}) + C_2\right] \cdot e^{-2x}}$$

И.3. НАЂИ ОНУ ИНТЕГРАЛНУ КРИВУ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ $y' = \cos x(\sin x - y)$ КОЈА ПРОЛАЗИ КРОЗ КООРДИНАТНИ ПОЧЕТАК.

РЈЕШЕЊЕ:

$$y' = \cos x \sin x - \cos x\, y$$

$$y' + \cos x \cdot y = \cos x \cdot \sin x \qquad \text{- лин. диф. јед.}$$

$$y(x) = e^{-\int \cos x dx}\left(c + \int \cos x \sin x\, e^{\int \cos x dx} dx\right)$$

$$y(x) = e^{-\sin x}\left(c + \underbrace{\int \cos x \sin x \cdot e^{\sin x} dx}_{I}\right)$$

$$I = \left| \begin{matrix} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{matrix} \right| = \int t e^t dt = \left| \begin{matrix} u = t & dv = e^t dt \\ du = dt & v = e^t \end{matrix} \right|$$

$$= te^t - \int e^t dt = te^t - e^t = \sin x \cdot e^{\sin x} - e^{\sin x}$$

$$y(x) = e^{-\sin x}\left(c + \sin x \cdot e^{\sin x} - e^{\sin x}\right)$$

$$\boxed{y(x) = c \cdot e^{-\sin x} + \sin x - 1}$$

ПРОЛАЗИ КРОЗ КООРДИНАТНИ ПОЧЕТАК, $x = 0$, $y = 0$

$$c - 1 = 0 \Rightarrow c = 1$$

$$\boxed{y = e^{-\sin x} + \sin x - 1}$$

ОЈЛЕРОВА ДИФ. ЈЕДНАЧИНА

ЗАД: НАЋИ ОПШТЕ РЈЕШЕЊЕ ОЈЛЕРОВЕ ЈЕДНАЧИНЕ

$$x^2 y'' + 3xy' + y = 0$$

РЈЕШЕЊЕ:

СМЈЕНА $|x| = e^t$, $x \neq 0$

$$t = \ln|x|$$

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = y'_t \cdot \frac{1}{x}$$

$$y''_x = \frac{d\left(y'_t \cdot \frac{1}{x}\right)}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = y''_t \cdot \frac{1}{x^2} - y'_t \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}\left(y''_t - y'_t\right)$$

КАДА ТО УВРСТИМО У ЈЕДНАЧИНУ ДОБИЈАМО

$$y''_t - y'_t + 3y'_t + y = 0$$

$$y''_t + 2y'_t + y = 0$$

КАРАКТЕРИСТИЧНА ЈЕДНАЧИНА ЈЕ $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$

$$\lambda_{1,2} = -1$$

$y_H = e^{-t}(C_1 + C_2 t)$, ВРАЋАЊЕМ СМЈЕНЕ ДОБИЈАМО

$$y = \frac{1}{|x|}\left(C_1 + C_2 \ln|x|\right) \quad , x \neq 0$$

ЗАД: НАЋИ ОПШТЕ РЈЕШЕЊЕ ДИФ. ЈЕДНАЧИНЕ

$$(1+x)^2 y'' + (1+x)y' + y = 4\cos \ln|1+x|$$

РЈЕШЕЊЕ:

ТО ЈЕ ОЈЛЕРОВА ДИФ. ЈЕД. ПА УВОДИМО СМЈЕНУ

$$|1+x| = e^t \quad , \quad t = \ln|1+x|$$

$$y'_x = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = y'_t \cdot \frac{1}{1+x}$$

$$y''_x = y''_t \cdot \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{(1+x)^2} y'_t$$

$$y''_t - y'_t + y'_t + y = 4\cos t$$

$$y''_t + y = 4\cos t \quad (*)$$

$$\lambda^2 + 1 = 0 \implies \lambda_{1,2} = \pm i$$

$$y_H = C_1 \cos t + C_2 \sin t \quad , \quad y_{O.R} = y_H + y_P$$

$$y_P = t(A\cos t + B\sin t) = At\cos t + Bt\sin t$$

$$y_P' = A\cos t - At\sin t + B\sin t + Bt\cos t$$

$$y_P'' = -A\sin t - A\sin t - At\cos t + B\cos t + B\cos t - Bt\sin t$$

$$= -2A\sin t - At\cos t + 2B\cos t - Bt\sin t$$

УВРСТИМО У ЈЕДНАЧИНУ (*)

$$\underline{-2A}\sin t - \cancel{At\cos t} + \underline{2B}\cos t - \cancel{Bt\sin t} + \cancel{At\cos t} + \cancel{Bt\sin t} = \underline{4}\cos t$$

$$-2A = 0 \quad , \quad A = 0$$

$$2B = 4 \quad , \quad B = 2$$

$$y_P = 2t\sin t \quad , \quad y_{O.R} = C_1\cos t + C_2 \sin t + 2t\sin t$$

$$\boxed{y_{O.R} = C_1 \cos(\ln|1+x|) + C_2 \sin(\ln|1+x|) + 2\ln|1+x| \cdot \sin(\ln|1+x|)}$$

ЗАДАТАК: Одредити опште рјешење диференцијалне једначине

$y'' + 2xy' + (x^2+1)y = 0$, ако је познато да она има

партикуларно рјешење облика $y_1 = e^{ax^2}$ (a – константа)

РЈЕШЕЊЕ:

$y_1' = 2ax\, e^{ax^2}$, $y_1'' = 2a\, e^{ax^2} + 4a^2x^2 e^{ax^2}$

$(2a + 4a^2x^2)e^{ax^2} + 2x \cdot 2ax\, e^{ax^2} + (x^2+1)e^{ax^2} = 0 \quad /: e^{ax^2}$

$2a + 4a^2x^2 + 4ax^2 + x^2 + 1 = 0$

$(4a^2 + 4a + 1)x^2 + 2a + 1 = 0$

$(2a+1)^2x^2 + 2a + 1 = 0 \Rightarrow 2a+1 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$

$$\boxed{y_1 = e^{-\frac{x^2}{2}}}$$

смјена: $\boxed{y = y_1 \cdot z} = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot z$, $z = z(x)$

$y' = -x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} z + e^{-\frac{x^2}{2}} z' = (-xz + z')e^{-\frac{x^2}{2}}$

$y'' = (-z - xz' + z'')e^{-\frac{x^2}{2}} + (-xz + z')(-x)\, e^{-\frac{x^2}{2}}$

$y'' = (-z - xz' + z'' + x^2z - xz')e^{-\frac{x^2}{2}}$

$y'' = (z'' - 2xz - z + x^2z)e^{-\frac{x^2}{2}}$

$(z'' - 2xz' - z + x^2z)e^{-\frac{x^2}{2}} + 2x(-xz + z')e^{-\frac{x^2}{2}} + (x^2+1)e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot z = 0 \quad /: e^{-\frac{x^2}{2}}$

$z'' \cancel{-2xz'} \cancel{-z} \cancel{+x^2z} \cancel{-2x^2z} \cancel{+2xz'} \cancel{+x^2z} \cancel{+z} = 0$

$z'' = 0 \Rightarrow z' = C_1 \Rightarrow z = C_1x + C_2$

$$\boxed{y = (C_1x + C_2)e^{-\frac{x^2}{2}}}$$

<u>ЗАД 2:</u> НАЋИ ОПШТЕ РЈЕШЕЊЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ
$(x-x^2)y''+(2x^2-1)y'+(2-4x)y=0$ АКО СЕ ЗНА ДА ЈЕ
ПАРТИКУЛАРНО РЈЕШЕЊЕ ПОЛИНОМ ДРУГОГ СТЕПЕНА.

<u>РЈЕШЕЊЕ:</u>

$$y_p = ax^2+bx+c$$

$$y_p' = 2ax+b, \quad y_p'' = 2a$$

$$(x-x^2)\cdot 2a + (2x^2-1)(2ax+b) + (2-4x)(ax^2+bx+c) = 0$$

$$\cancel{2ax} - \cancel{2ax^2} + \cancel{4ax^3} + \underline{2bx^2} - \cancel{2ax} - b + \cancel{2ax^2} + 2bx + 2c - \cancel{4ax^3} - \underline{4bx^2} - 4cx = 0$$

$$-2bx^2+2bx-4cx+2c-b=0$$

$$-2bx^2+2x(b-2c)+2c-b=0$$

$\boxed{b=0}$, $\quad b-2c=0 \quad \wedge \quad 2c-b=0 \qquad \boxed{c=0}$ $\qquad a$ - произвољно

$y_p = ax^2$, $\quad$ узимамо $\underline{a=1}$

$$\underline{y_1 = x^2}$$

<u>I НАЧИН</u> $\qquad y = x^2\cdot z$

<u>II НАЧИН</u> кориштењем <u>ЛИУВИЛОВЕ ФОРМУЛЕ</u>

$$p(x)y''+q(x)y'+r(x)y=0$$

познато y_1, $\qquad \boxed{y_2 = y_1\cdot\int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int \frac{q(x)}{p(x)}dx} dx}$

$$y_{o.r.} = c_1y_1+c_2y_2$$

$$y_2 = x^2\int \frac{1}{x^4} e^{-\int \frac{2x^2-1}{x-x^2}dx} dx = x^2\int \frac{1}{x^4}\cdot e^{\int\left(2+\frac{2x-1}{x^2-x}\right)dx} dx$$

$$y_2 = x^2 \int \frac{1}{x^4} e^{2x + \ln|x^2 - x|} dx = x^2 \int \frac{1}{x^4} e^{2x} \cdot (x^2 - x) dx$$

$$y_2 = x^2 \int \frac{e^{2x}(x-1)}{x^3} dx = x^2 \left(\int \frac{e^{2x}}{x^2} dx - \int \frac{e^{2x}}{x^3} dx \right)$$

$$\left| \begin{array}{ll} u = e^{2x} & dv = \frac{dx}{x^3} \\ du = 2e^{2x} dx & v = -\frac{1}{2x^2} \end{array} \right| = x^2 \left(\cancel{\int \frac{e^{2x}}{x^2} dx} + \frac{e^{2x}}{2x^2} - \cancel{\int \frac{e^{2x}}{x^2} dx} \right)$$

$$y_2 = x^2 \cdot \frac{e^{2x}}{2x^2} = \frac{e^{2x}}{2}$$

<u>ОПШТЕ РЈЕШЕЊЕ:</u> $$\underline{y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 x^2 + C_2 \frac{e^{2x}}{2}}$$

ЗАД 3: Дата је диф. јед. $y''+y'-2y=(3-4x)e^x$.

а) Одредити опште рјешење

б) Наћи партикуларно рјешење за $y(0)=1$ и $y'(0)=3$.

Рјешење:

$y=e^{\lambda x}$

$$\lambda^2+\lambda-2=0 \Rightarrow \lambda_1=1,\ \lambda_2=-2$$

$$y_H = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

$$y_p = x(A+Bx)e^x = (Ax+Bx^2)e^x$$

$$y_p' = (A+2Bx)e^x + (Ax+Bx^2)e^x = (A+2Bx+Ax+Bx^2)e^x$$

$$y_p'' = (2B+A+2Bx)e^x + (A+2Bx+Ax+Bx^2)e^x$$

$$y_p'' = (2B+2A+4Bx+Ax+Bx^2)e^x$$

$$2B+2A+4Bx+\cancel{Ax}+\cancel{Bx^2}+A+2Bx+\cancel{Ax}+\cancel{Bx^2}-\cancel{2Ax}-\cancel{2Bx^2}=3-4x$$

$$2B+3A=3 \qquad -\frac{4}{3}+3A=3 \ /\cdot 3$$

$$6B=-4 \Rightarrow \boxed{B=-\frac{2}{3}} \qquad 9A=9+4 \Rightarrow \boxed{A=\frac{13}{9}}$$

$$y_p=\left(\frac{13}{9}x-\frac{2}{3}x^2\right)e^x$$

$$y_{o.p} = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + \left(\frac{13}{9}x-\frac{2}{3}x^2\right)e^x$$

б) $y(0)=1 \Rightarrow C_1+C_2=1 \quad (1)$

$$y'(x)=C_1e^x-2C_2e^{-2x}+\left(\frac{13}{9}-\frac{4}{3}x\right)e^x+\left(\frac{13}{9}x-\frac{2}{3}x^2\right)e^x$$

$$y'(0)=3 \Rightarrow C_1-2C_2+\frac{13}{9}=3 \Rightarrow \underline{C_1-2C_2=\frac{14}{9}} \quad (2)$$

Из (1) и (2) $\Rightarrow$ $\underline{C_1=\frac{32}{27},\ C_2=-\frac{5}{27}}$

$$y_p=\frac{32}{27}e^x+\frac{10}{27}e^{-2x}+\left(\frac{13}{9}x-\frac{2}{3}x^2\right)e^x$$

Зад4: Дата је диференцијална једначина

$$(e^x+1)y''-2y'-e^xy=0.$$

а) Показати да дата једначина има партикуларно решење облика $y_1=e^x+a$.

б) Наћи опште решење дате једначине

Решење:

$$y_1'=e^x\ ,\quad y_1''=e^x$$

$$(e^x+1)\cdot e^x-2e^x-e^x(e^x+a)=0\ /:e^x$$

$$\cancel{e^x}+1-2-\cancel{e^x}-a=0\Rightarrow \boxed{a=-1}$$

$$\boxed{y_1=e^x-1}$$

На основу Лиувилове формуле

$$py''+qy'+r=0\ ,\quad y_1\ ,\quad y_2=y_1\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int\frac{q}{p}dx}dx$$

$$y_2=(e^x-1)\int\frac{1}{(e^x-1)^2}e^{\int\frac{2dx}{e^x+1}dx}dx=\cancel{(e^x-1)}\int\ \left|\begin{array}{l}e^x+1=t\\ e^xdx=dt\\ dx=\frac{dt}{e^x}=\frac{dt}{t-1}\end{array}\right|$$

$$\int\frac{dx}{e^x+1}=\int\frac{dt}{(t-1)t}=\int\frac{dt}{t-1}-\int\frac{dt}{t}=\ln|t-1|-\ln|t|$$

$$=\ln\left|\frac{t-1}{t}\right|=\ln\frac{e^x+1-1}{e^x+1}=\ln\frac{e^x}{e^x+1}$$

$$y_2=(e^x-1)\int\frac{1}{(e^x-1)^2}e^{2\ln\frac{e^x}{e^x+1}}dx=(e^x-1)\int\frac{1}{(e^x-1)^2}\cdot\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)^2dx$$

$$y_2=(e^x-1)\int\frac{e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2}dx=\left|\begin{array}{l}e^{2x}-1=t\\ 2e^{2x}dx=dt\end{array}\right|$$

$$y_2=(e^x-1)\cdot\left(-\frac{1}{2(e^{2x}-1)}\right)=\boxed{-\frac{1}{2(e^x+1)}}$$

$$\boxed{y_{\text{о.р.}}=C_1y_1+C_2y_2=C_1(e^x-1)-\frac{C_2}{2(e^x+1)}}$$

И.3. (25.04.2012) Ш

Наћи опште рјешење диференцијалне једначине

$$y'' - y = 4\sqrt{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}}$$

Рјешење: $r^2 - 1 = 0$, $r_{1,2} = \pm 1$

$$y_H = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} = C_1(x) e^{x} + C_2(x) e^{-x}$$

$$\left.\begin{aligned} &C_1'(x) e^{x} + C_2'(x) e^{-x} = 0 \\ &C_1'(x) e^{x} - C_2'(x) e^{-x} = 4\sqrt{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}} \end{aligned}\right\} +$$

$$2C_1'(x) e^{x} = 4\sqrt{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}} \Rightarrow \boxed{C_1'(x) = 2\sqrt{x}\, e^{-x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{-x}}{x\sqrt{x}}}$$

$$C_2'(x) e^{-x} = -C_1'(x) e^{x} \Rightarrow \underline{C_2'(x) = -C_1'(x) e^{2x}}$$

$$\boxed{C_2'(x) = -\left(2\sqrt{x}\, e^{x} + \frac{1}{2}\frac{e^{x}}{x\sqrt{x}}\right)}$$

$$C_1(x) = 2\underbrace{\int x^{1/2} e^{-x}\,dx}_{I_1} + \frac{1}{2}\underbrace{\int x^{-3/2} e^{-x}\,dx}_{I_2}$$

$$I_1 = \left| \begin{aligned} &u = x^{1/2} \\ &du = \tfrac{1}{2} x^{-1/2} dx \\ &v = -e^{-x} \end{aligned} \right| = -x^{1/2} e^{-x} + \frac{1}{2}\int x^{-1/2} e^{-x}\,dx = \left| \begin{aligned} &u = x^{-1/2} \\ &du = -\tfrac{1}{2} x^{-3/2} dx \\ &v = -e^{-x} \end{aligned} \right|$$

$$= -x^{1/2} e^{-x} + \frac{1}{2}\left(-x^{-1/2} e^{-x} - \frac{1}{2}\int x^{-3/2} e^{-x}\,dx\right)$$

$$C_1(x) = -2x^{1/2} e^{-x} - x^{-1/2} e^{-x} \cancel{- \frac{1}{2}\int x^{-3/2} e^{-x}\,dx + \frac{1}{2}\int x^{-3/2} e^{-x}\,dx}$$

$$C_1(x) = e^{-x}\left(-2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) + C_1$$

$$C_2(x) = -2\int x^{1/2} e^{x}\,dx - \frac{1}{2}\underbrace{\int x^{-3/2} e^{x}\,dx}_{I_2}$$

$$I_2 = \left| \begin{matrix} u = e^x, & du = e^x dx \\ v = \frac{x^{-1/2}}{-1/2} = -2x^{-1/2} & \end{matrix} \right| = -2e^x \cdot x^{-1/2} + 2\int e^x \cdot x^{-1/2} dx$$

$$= \left| \begin{matrix} u = e^x \\ v = 2x^{1/2} \end{matrix} \right| = -2e^x \cdot x^{-1/2} + 2(2e^x \cdot x^{1/2} - 2\int e^x \cdot x^{1/2} dx)$$

$$C_2(x) = -2\int x^{1/2} e^x dx - 1/2\left(-2e^x \cdot x^{-1/2} + 4e^x x^{1/2} - 4\int e^x \cdot x^{1/2} dx\right)$$

$$C_2(x) = \cancel{-2\int x^{1/2} e^x dx} + e^x \cdot x^{-1/2} - 2e^x \cdot x^{1/2} + \cancel{2\int e^x x^{1/2} dx} + C_2$$

$$\underline{C_2(x) = e^x \cdot x^{-1/2} - 2e^x \cdot x^{1/2} + C_2}$$

$$y_{o.p.} = -2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} + C_1 e^x + x^{-1/2} - 2x^{1/2} + C_2 e^{-x}$$

$$\boxed{y_{o.p.} = -4\sqrt{x} + C_1 e^x + C_2 e^{-x}}$$