

Питања и задаци за самостални рад

1. Напишите **интегралне** облике свих једначина које повезују векторе $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ међусобно и са изворима поља $\mathbf{J}$ и ρ код статичких, стационарних и квазистационарних поља.
2. Напишите **диференцијалне** облике свих једначина које повезују векторе поља $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ међусобно и са изворима поља $\mathbf{J}$ и густином наелектрисања ρ код статичких, стационарних и квазистационарних поља.
3. Напишите конститутивне једначине на основу којих дефинишемо векторе електричне индукције $\mathbf{D}$ и вектор јачине магнетског поља $\mathbf{H}$. Који облик имају ове једначине за хомогене изотропне средине?
4. Када је Максвел представио своју теорију о електрицитету и магнетизму Краљевском друштву у Лондону, а када је публикувао рад „A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field”
5. Са колико једначина је Максвел представио свој рад и која су два научника, независно један од другог, написали те једначине преко двије векторске и двије скаларне парцијалне диференцијалне једначине?
6. Ерстед је 1820. године открио да струје стварају магнетска поља којих година након тог открића су откривени Амперов, Фарадејев и Гаусов закон?
7. Прва Максвелова једначина (Амперов закон). (Интегрални и диференцијални облик за стационарна магнетска поља. Интегрални и диференцијални облик уопштеног Амперовог закона. Објаснити компоненте струје електричног помјераја.)
8. Шта се може закључити о изворима електричног поља из прве Максвелове једначине?
9. Друга Максвелова једначина (Фарадејев закон електромагнетске индукције. Опиши облик овог закона у интегралном облику. Интегрални и диференцијални облик закона за статичку или трансформаторску индукцију. Физикални смисао закона.)
10. Шта се може закључити о изворима магнетског поља из друге Максвелове једначине?
11. Објаснити у чему се састоји Максвелово уопштење Фарадејева закона?
12. Објаснити шта значи знак минус у Фарадејевом закону електромаг-

нетске индукције? (Чему се супроставља поље индуковане струје?)

13. *Шта се непосредно може закључити из прве и друге Максвелове једначине о електромагнетском пољу?*
14. *Трећа Максвелова једначина (Гаусов закон). (Облик Гаусова закона за вакуум. Од чега **не зависи** вриједност флукса електричног поља? Интегрални и диференцијални облик уопштеног Гаусова закона. Шта називамо електростатичким флуksom? Када ће електростатички флукс кроз затворену површину бити једнак нули?)*
15. *Објаснити у чему се састоји Максвелово уопштење Гаусова закона?*
16. *Четврта Максвелова једначина (Закон о конзервацији магнетског флукса). Како се називају поља која подлијежу очувању флукса? Интегрални и диференцијални облик закона. Зашто има смисла синтагма „флукс кроз контуру?“).*
17. *Потпун систем Максвелових једначина за непокретне средине са конститутивним једначинама?*
18. *Написати Максвелове једначине у интегралном облику за **споро промјенљива** поља у **вакууму**.*
19. *Написати Максвелове једначине у интегралном облику за **материјалне средине**.*
20. *Написати потпун систем Максвелових једначина и једначину континуитета у интегралном облику, у временском домену, за брзо промјенљиво електромагнетско поље, ако је у свакој тачки линеарне, хомогене и изотропне средине познат вектор густине побудних струја $\mathbf{J}_{iz}$.*
21. *Написати потпун систем Максвелових једначина и једначину континуитета у диференцијалном временском облику за временски промјенљиво електромагнетско поље ако је у свакој тачки средине познат вектор електричног поља $\mathbf{E}_{iz}$.*
22. *Написати Максвелове једначине и једначину континуитета за линеарну, хомогену и изотропну средину параметара ϵ , μ и σ у диференцијалном, временском облику. Како гласи рјешење ових једначина ако су познати извори поља, струје $\mathbf{J}$ и наелектрисања ρ , локализовани у домену V унутар затворене површи S ?*
23. *Једначина континуитета (општи облик и облик за стационарне струје)?*
24. *Ако трећу Максвелову једначину сматрамо независном једначином, шта*

је тада једначина континуитета?

25. Ако једначину континуитета сматрамо независном, јер изражава закон одржања наелектрисања а које двије једначине затварају систем општих једначина?
26. За случај промјенљивог електромагнетског поља из прве двије Максвелове једначине у диференцијалном облику и једначине континуитета извести трећу и четврту Максвелову једначину.
27. Да ли постоје временски промјенљива хомогена магнетска поља? Објаснити зашто?
28. Особине Максвелових једначина.
29. У слободном простору познат је вектор јачине магнетског поља $\mathbf{H} = H_m e^{j\omega t + \beta z} \hat{\mathbf{i}}$. Одредити јачину електричног поља $\mathbf{E}$.
- Одговор: $\mathbf{E} = E_y \hat{\mathbf{j}} = -\frac{\beta H_m}{\epsilon_0} e^{j\omega t + \beta z} \hat{\mathbf{j}}$.
30. Испитати изворност и вртложност поља вектора $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$.
31. Испитати изворност и вртложност поља вектора $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$.
32. Испитајте изворност поља вектора $\mathbf{H}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$?
33. Испитајте вртложност поља вектора $\mathbf{H}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$?
34. Испитати изворност и вртложност поља вектора $\mathbf{M}$ и $\mathbf{P}$.
35. Испитати изворност вектора густине струје проводности $\mathbf{J}$.
36. Из којег општег закона у промјенљивом електромагнетском пољу слиједи да не можемо независно једно од другог задавати струје и наелектрисања?
37. Зашто вриједи Хелмолцова теорема за поља вектора $\mathbf{H}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$?
38. Напишите (без извођења) граничне услове за општи случај за векторе поља $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{J}$, $\mathbf{P}$ и $\mathbf{M}$.
39. Закони преламања у електромагнетским пољима?
40. Средина 1 налази се у простору $x < 0$ са пермеабилношћу $\mu_{r1} = 3$, а средина 2 у простору $x > 0$ са пермеабилношћу $\mu_{r2} = 2$. Ако је познат

вектор $\mathbf{H}_1$ одредити вектор $\mathbf{H}_2$ у $x=+0$ и углове ових вектора према нормали на раздвојну површ. $\mathbf{H}_1 = (6 \cdot \hat{i} + 3 \cdot \hat{j} - 4 \cdot \hat{k})$ A/m.

Рјешење: $\mathbf{H}_2 = (9 \cdot \hat{i} + 3 \cdot \hat{j} - 4 \cdot \hat{k}) \frac{\text{A}}{\text{m}}.$

$$\alpha_1 = \arccos \frac{\mathbf{H}_1 \cdot \hat{n}}{H_1} = \arccos(-0,77) = 140,2^\circ,$$

$$\alpha_2 = \arccos \frac{\mathbf{H}_2 \cdot \hat{n}}{H_2} = \arccos(-0,87) = 150,9^\circ.$$

41. У тачки $(0,0,0)$ познати су вектори поља $\mathbf{B}_1 = (2 \cdot \hat{i} + 8 \cdot \hat{k})$ и $\mathbf{B}_2 = (20 \cdot \hat{i} + 15 \cdot \hat{j} + 12 \cdot \hat{k})$ Т. Ако је граница раздјела средина струјна фолија колика је густина струје у фолији, ако је средина 1 простор $z < 0$ са $\mu_{r1} = 2$, а средина 2 $z > 0$ са $\mu_{r2} = 5$.

Одговор: $\mathbf{J}_s = \frac{3}{\mu_0} (-\hat{i} + \hat{j}) \frac{\text{A}}{\text{m}}.$

42. Струјна фолија са струјом $\mathbf{J}_s = 9 \cdot \hat{j}$ A/m налази се у равни $z=0$ која је граница између средине 1 у дијелу простора $z < 0$, са $\mu_{r1} = 4$ и средине 2, $z > 0$, $\mu_{r2} = 3$. Ако је познат вектор у средини 2 ($z=+0$) $\mathbf{H}_2 = (12 \cdot \hat{i} + 8 \cdot \hat{k})$ A/m одредити вектор поља $\mathbf{H}_1$.

Одговор: $\mathbf{H}_1 = (3 \cdot \hat{i} + 6 \cdot \hat{k}) \frac{\text{A}}{\text{m}}.$

43. Испитати под којим условима скаларни и векторски потенцијал задовољавају Максвелове једначине. Шта називамо баждарењем потенцијала?
44. Објаснити Лоренцово баждарење потенцијала
45. Објасните Кулоново баждарење потенцијала.
46. Објаснити изразе за скаларни и векторски потенцијал у кашњењу (ретардирани потенцијали).
47. Известити о објаснити израз за Херцов поларизациони потенцијал.
48. Како се рачуна поље $\mathbf{E}$ преко Херцовог поларизационог потенцијала?
49. Која је основна идеја при увођењу Херцовог поларизационог потенцијала

Z ?

50. Коју функцију називамо простопериодичном скаларном функцијом?
51. Коју функцију називамо простопериодичном векторском функцијом?
52. Како рачунамо ефективну вриједност простопериодичне векторске функције?
53. Како се рачуна тренутни интензитет простопериодичне векторске функције?
54. Када је поље простопериодичног вектора **елиптички** поларизовано?
55. Када је поље простопериодичног вектора **кружно** поларизовано?
56. Када је поље простопериодичног вектора **линијски** поларизовано?
57. Напишите примјер простопериодичне скаларне функције и њеног комплексног представника.
58. Напишите примјер простопериодичне векторске функције и њеног комплексног представника.
59. Како се рачуна модул комплексног вектора?
60. Изразити простопериодичну векторску функцију преко реалног и имагинарног дијела њеног комплексног представника.
61. Обајснити како се Максвелове једначине из временске диференцијалне форме преводе у комплексну диференцијалну форму?
62. Комплексни представник простопериодичног вектора $\mathbf{A}(t)$ кружне учестаности ω дат је изразом: $\underline{\mathbf{A}} = 3 \cdot \hat{\mathbf{i}} + j 2 \cdot \hat{\mathbf{j}}$. Нацртати како се вектор мијења у функцији времена. Колики су максимални и минимални интензитети датог вектора?
- Одговор: $|\mathbf{A}(t)| = \sqrt{18 - 10 \sin^2 \omega t}$. $A_{\max} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ и $A_{\min} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.
63. Ако је познат комплексни представник јачине магнетског поља $\underline{\mathbf{H}}$ написати временски израз за његову тренутну вриједност.
- $\underline{\mathbf{H}} = (1 + j) \cdot \hat{\mathbf{i}} - j \cdot \hat{\mathbf{j}} + 2 \cdot \hat{\mathbf{k}}$ A/m.
- $\mathbf{H}(t) = 2 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \hat{\mathbf{i}} + \sqrt{2} \sin(\omega t) \cdot \hat{\mathbf{j}} + 2\sqrt{2} \cos(\omega t) \cdot \hat{\mathbf{k}}$.
64. Написати потпун систем Максвелових диференцијалних једначина у

комплексном облику за брзо промјенљиво електромагнетско поље у **добром проводнику** параметара μ_0 и σ . Како се рачуна комплексна пермитивност проводника?

Одговор: $\epsilon_c = -j\sigma/\omega$.

65. *Извести израз за Поинтингов вектор и исказати Поинтингову теорему.*
66. *Шта димензионо представља Поинтингов вектор?*
67. *Кроз бакарни цилиндрични проводник полупречника a протиче једносмјерна струја I . На дијелу проводника дужине l разлика потенцијала износи U , а укупно наелектрисање Q . Одредити Поинтингов вектор у свим тачкама простора.*
- Одговор:
$$\mathbf{P} = \frac{q'I}{4\pi^2\epsilon_0 r^2} = \frac{QI}{4\pi^2\epsilon_0 l r^2}.$$
68. *Који услов морају испунити електрично и магнетско поље да би дошло до струјања енергије?*
69. *Напишите биланс снага за хомогене, изотропне и линеарне средине. Објаснити значење појединих сабирака.*
70. *Наведите биланс снага (Поинтингова теорема) за домен без побудних струја и побудног поља?*
71. *Наведите биланс снага (Поинтингова теорема) ако је домен савршен диелектрик?*
72. *Наведите биланс снага (Поинтингова теорема) за случај стационарног електромагнетског поља.*
73. *Наведите биланс снага (Поинтингова теорема) ако је домен савршен проводник?*
74. *Извести израз за комплексни Поинтингов вектор.*
75. *Дуг прав цилиндричан проводник полупречника a , проводности σ протицају је струјом густине $\mathbf{J}$. Одредити интензитет и правац Поинтинговог вектора на површини проводника.*

Одговор:
$$\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{J}{\sigma} \hat{\mathbf{z}} \times \frac{Ja}{2} \hat{\mathbf{z}} = -\frac{J^2 a}{2\sigma} \hat{\mathbf{r}}.$$

76. *Коаксијални кабл пружључен је на простопериодични напон $u(t) = U\sqrt{2}\cos\omega t$ ниске учестаности. Између централног проводника,*

полупречника a и плашта, унутрашњег полупречника b , налази се савршен диелектрик. Губици у проводницима могу се занемарити. Одредити комплексни Поинтингов вектор у диелектрику ако је кабл затворен отпорником отпорности R .

Одговор:
$$\underline{P} = \underline{E} \times \underline{H}^* = \frac{U^2}{2 \rho R r^2 \ln(b/a)} \hat{k}.$$

77. Танки двожицни ваздушни вод повезује иделни напонски простопериодични извор $u(t) = U\sqrt{2} \cos \omega t$, ниске учестаности и отпорник отпорности R . Проводници леже у истој равни и имају полупречник пресека a и међусобно растојање d , ($a \ll d$). Ако се ефекти крајева и губици у проводницима могу занемарити одредити комплексни Поинтингов вектор у тачкама дуж вода које се налазе у равни проводника на средини растојања између оса проводника.

Одговор:
$$\underline{P} = \underline{E} \times \underline{H}^* = \frac{4U^2}{\pi d^2 R \ln(d/a)} \hat{i}_z.$$

78. Извести израз за рачунање средњег Поинтингова вектора P_{sr} ?

Питања и задаци за самостални рад

1. Који вид електромагнетског поља називамо електромагнетским таласима?
2. Које електромагнетске таласе називамо раванским?
3. Написати потпун систем Максвелових једначина у скаларном облику за раван униформан трансферзални електромагнетски талас који се простира у вакууму у смјеру z -осе.
4. Средина је линеара, хомогена и изотропна, параметара ϵ , μ и σ , без слободних наелектрисања, без побудних струја и побудних поља. (а) Из Максвелових једначина које одговарају овакој средини извести **Даламберове** таласне једначине.

$$\Delta \underline{H} - \mu \sigma \frac{\partial \underline{H}}{\partial t} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \underline{H}}{\partial t^2} = 0, \quad \Delta \underline{E} - \mu \sigma \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial t^2} = 0.$$

5. Средина је линеара, хомогена и изотропна, параметара ϵ , μ и σ , без слободних наелектрисања, без побудних струја и побудних поља. Ако је поље временски простопериодично извести **Хелмхолцове** таласне једначине.

$$\Delta \underline{H} + (\omega^2 \epsilon \mu_0 - j \omega \mu_0 \sigma) \underline{H} = 0, \quad \Delta \underline{E} + (\omega^2 \epsilon \mu_0 - j \omega \mu_0 \sigma) \underline{E} = 0.$$

6. Средина је линеара, хомогена и изотропна, без слободних наелектрисања, без побудних струја и побудних поља. Поља су временски простопериодична. Извести Хелмхолцове таласне једначине за савршени диелектрик.

$$\Delta \underline{H} + \beta^2 \underline{H} = 0, \quad \Delta \underline{E} + \beta^2 \underline{E} = 0.$$

7. Извести таласну једначину за вектор $\underline{E}$ z, t за случај униформног електромагнетског таласа у линеарном, хомогеном, изотропном и савршеном диелектрику.

$$\Delta \underline{E} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial t^2}.$$

8. Показати да се рјешење скаларне парцијалне диференцијалне једначине:

$$c^2 \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}, \text{ може наћи у облику } E = F_1(z - ct) + F_2(z + ct).$$

9. Полазећи од диференцијалног комплексног облика Максвелових једначина у савршеном хомогеном диелектрику параметара ϵ, μ без слободних наелектрисања, извести комплексни облик таласне једначине за вектор $\underline{H}$.

$$\Delta \underline{H} + \beta^2 \underline{H} = 0.$$

10. Особине униформног раванског електромагнетског таласа који се простире у линеарном, хомогеном, изотропном и савршеном диелектрику.

11. Доказати да је збир два кружно поларизована таласа исте амплитуде, а супротних смјерова поларизације представља линијски поларизован талас.

12. Испитати поље таласа електричног поља које има двије компоненте:

$$\underline{E}(z, t) = 10 \cdot \sin(\omega t + \beta z) \cdot \hat{i} + 10 \cdot \cos(\omega t + \beta z) \cdot \hat{j} \text{ у равни } z = 0 \text{ за } \omega t = 0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4 \text{ и } \pi.$$

Талас је кружно поларизован и простире се у $-\hat{k}$ правцу.

13. Објасните особину трансферзалности раванских таласа?

14. Објасните особину униформности раванских таласа?

15. Којом брзином се простире TEM талас у хомогеном диелектрику?

$$c = 1/\sqrt{\epsilon \mu} = c_0/\sqrt{\epsilon_r \mu_r}.$$

16. Шта називамо фронтом раванског таласа?

17. Објаснити појам просторне учестаности или фазни коефицијент?

18. Ако електрично поље раванског електромагнетског таласа, који се простире у савршеном диелектрику, има само x компоненту доказати да магнетско поље има само y - компоненту.

19. Како се рачуна таласна (карактеристична, TEM) импеданса за случај линеарног

хомогеног изотропног и савршеног диелектрика?

20. Коју величину називамо просторним периодом или таласном дужином?
21. Представите на слици векторе директног и рефлектованог таласа електричног и магнетског поља, као и Поинтингове векторе за оба таласа.
22. Равански талас магнетског поља $\mathbf{H}$ простира се у слободном простору у $-z$ правцу са фазом 60 rad/m и амплитудом $2/(3\pi) \text{ A/m}$. Ако поље $\mathbf{H}$ има $-y$ компоненту за $t=0$ и $z=0$ написати одговарајуће изразе за поља $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, те одредити учестаност и таласну дужину таласа.

$$\mathbf{H}(z,t) = -\frac{2}{3\pi} \cos(\omega t + 60z) \cdot \hat{\mathbf{j}} \frac{\text{A}}{\text{m}}, \quad \mathbf{E}(z,t) = 80 \cdot \cos(\omega t + 60z) \cdot \hat{\mathbf{i}} \frac{\text{V}}{\text{m}},$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{\pi}{30} \text{ m}, \quad f = \frac{c_0}{\lambda} = \frac{9}{\pi} \text{ GHz}.$$

23. Познат је вектор електричног поља раванског електромагнетског таласа у вакууму: $\mathbf{E}(x,t) = 40 \cdot \cos(\omega t - \beta x) \hat{\mathbf{j}} \text{ V/m}$, где су $\omega = 2\pi \cdot 10^8$ и $\beta = \frac{2\pi}{3}$.
Одредити вектор магнетског поља и таласну дужину таласа.

$$\mathbf{H}(x,t) = \frac{1}{Z_c} \cdot \hat{\mathbf{i}} \times \mathbf{E}(x,t) = \frac{40}{120\pi} \cos(\omega t - \beta x) \hat{\mathbf{k}}, \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 3 \text{ m}.$$

24. Изразите Поинтингов вектор преко таласне импедансе и модула вектора електричног и магнетског поља, $\mathbf{P}(z,t) = ?$

$$\mathbf{P}(z,t) = \mathbf{E}(z,t) \times \mathbf{H}(z,t) = (E_x H_y - E_y H_x) \hat{\mathbf{k}} = Z_c H^2 \cdot \hat{\mathbf{k}} = \frac{E^2}{Z_c} \cdot \hat{\mathbf{k}}$$

25. Раван униформан простопериодичан ТЕМ талас учестаности f линијски је поларизован простира се у вакууму у смјеру z -осе Декартовог координатног система. Ефективна вриједност електричног поља таласа је E . Вектор јачине електричног поља има само y -компоненту, чија је почетна фаза у координатном почетку $\theta = 0$. Написати изразе за тренутне вриједности вектора $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ и $\mathbf{P}$ у произвољној тачки простора.

$$\mathbf{E}(z,t) = E \sqrt{2} \cos(\omega t - \beta z) \cdot \hat{\mathbf{j}}, \quad \beta = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = \frac{\omega}{c_0},$$

$$\mathbf{H}(z,t) = -\sqrt{2} \frac{E}{Z_0} \cos(\omega t - \beta z) \cdot \hat{\mathbf{i}}, \quad Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}},$$

$$\mathbf{P}(z,t) = \mathbf{E}(z,t) \times \mathbf{H}(z,t) = 2 \frac{E^2}{Z_0} \cos^2(\omega t - \beta z) \cdot \hat{\mathbf{k}}.$$

26. У слободном простору креће се равански талас чије је електрично поље

$\underline{E}(z,t) = 60 \cdot \cos(wt - \beta z) \cdot \hat{i}$ V/m. Одредити средњу снагу која пролази кроз кружну површину полупречника 2 m у равни окомитој на правац простирања таласа.

$$P = P_{sr} R^2 \pi = 60 \text{ W}.$$

27. Ако електрично поље има само x компоненту напишите временске изразе за $E_x(z,t)$ и $H_y(z,t)$ преко фазног коефицијента.

$$E_x(z,t) = \sqrt{2} E_{xd} \cos[wt - \beta z + \theta_{xd}] + \sqrt{2} E_{xr} \cos[wt + \beta z + \theta_{xr}],$$

$$H_y(z,t) = \frac{\sqrt{2} E_{xd}}{Z_c} \cos[wt - \beta z + \theta_{xd}] - \frac{\sqrt{2} E_{xr}}{Z_c} \cos[wt + \beta z + \theta_{xr}].$$

28. Ако електрично поље има само x компоненту напишите комплексне представнике временских израза за $E_x(z,t)$ и $H_y(z,t)$ изражених преко фазног коефицијента.

$$\underline{E}_x(z) = \underline{E}_{xd} \cdot e^{-j\beta z} + \underline{E}_{xr} \cdot e^{+j\beta z}, \quad \underline{E}_y(z) = \underline{E}_{yd} \cdot e^{-j\beta z} + \underline{E}_{yr} \cdot e^{+j\beta z}$$

$$\underline{H}_y(z) = \frac{\underline{E}_{xd}}{Z_c} \cdot e^{-j\beta z} - \frac{\underline{E}_{xr}}{Z_c} \cdot e^{+j\beta z}, \quad \underline{H}_x(z) = -\frac{\underline{E}_{yd}}{Z_c} \cdot e^{-j\beta z} + \frac{\underline{E}_{yr}}{Z_c} \cdot e^{+j\beta z}$$

29. Ако електрично поље има само x компоненту скицирајте изглед директних таласа електричног и магнетског поља у савршеном диелектрику.

30. Напишите у општој комплексној форми изразе за $\underline{E}(z)$ и $\underline{H}(z)$ преко комплексних облика њихових директних и рефлектованих таласа.

$$\underline{E}(z) = \underline{E}_{od} \cdot e^{-j\beta z} + \underline{E}_{or} \cdot e^{+j\beta z}$$

$$\underline{H}(z) = \frac{1}{Z_c} (\hat{k} \times \underline{E}_{od}) \cdot e^{-j\beta z} - \frac{1}{Z_c} (\hat{k} \times \underline{E}_{or}) \cdot e^{+j\beta z}$$

31. Напишите у општој комплексној форми изразе за $\underline{E}(r)$ и $\underline{H}(r)$ преко комплексних облика њихових директних и рефлектованих таласа за случај када се талас простира у правцу l познатог орта $\hat{n}$.

$$\underline{E}(r) = \underline{E}_{od} \cdot e^{-j\beta r \cdot \hat{n}} + \underline{E}_{or} \cdot e^{+j\beta r \cdot \hat{n}}$$

$$\underline{H}(r) = \frac{1}{Z_c} (\hat{n} \times \underline{E}_{od}) \cdot e^{-j\beta r \cdot \hat{n}} - \frac{1}{Z_c} (\hat{n} \times \underline{E}_{or}) \cdot e^{+j\beta r \cdot \hat{n}}$$

32. Раван униформан простопериодичан ТЕМ талас учестаности f простира се у вакууму у правцу и смјеру $\hat{n}$. Познат је комплексни вектор јачине електричног поља овога таласа у координатном почетку, $\underline{E}_o$. Написати изразе за комплексне векторе $\underline{E}$ и $\underline{H}$ у произвољној тачки простора.

$$\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \underline{\mathbf{E}}_o e^{-j\beta r i}, \quad \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{Z_o} \hat{\mathbf{n}} \times \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{Z_o} \hat{\mathbf{n}} \times \underline{\mathbf{E}}_o e^{-j\beta r i}.$$

33. Средина кроз коју се простира равански прогресиван талас $\underline{\mathbf{H}}(z,t)$ је средина без губитака са таласном импедансом $Z_t = 60\pi \Omega$ и $\mu_r = 1$. Ако је $\underline{\mathbf{H}}(z,t) = -0,1 \cdot \cos(\omega t - z) \cdot \hat{\mathbf{i}} + 0,5 \cdot \sin(\omega t - z) \cdot \hat{\mathbf{j}}$ одредити: ω , ϵ_r и $\underline{\mathbf{E}}(z,t)$.

$$\epsilon_r = 4, \quad \omega = 1,5 \times 10^8 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \quad \underline{\mathbf{E}} = 94,25 \sin(\omega t - z) \cdot \hat{\mathbf{i}} + 18,85 \cos(\omega t - z) \cdot \hat{\mathbf{j}}.$$

34. Из Даламберових таласних једначина за линеарну, хомогену и изотропну средину, параметара ϵ , μ и σ , без слободних наелектрисања, без побудних струја и побудних поља, извести Хелмхолцове таласне једначине за несавршени диелектрик.

Даламберове таласне једначине:

$$\Delta \underline{\mathbf{H}} - \mu \sigma \frac{\partial \underline{\mathbf{H}}}{\partial t} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \underline{\mathbf{H}}}{\partial t^2} = 0, \quad \Delta \underline{\mathbf{E}} - \mu \sigma \frac{\partial \underline{\mathbf{E}}}{\partial t} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \underline{\mathbf{E}}}{\partial t^2} = 0.$$

Хелмхолцове таласне једначине:

$$\Delta \underline{\mathbf{H}} + (\omega^2 \epsilon \mu_o - j \omega \mu_o \sigma) \underline{\mathbf{H}} = 0, \quad \Delta \underline{\mathbf{E}} + (\omega^2 \epsilon \mu_o - j \omega \mu_o \sigma) \underline{\mathbf{E}} = 0.$$

Хелмхолцове таласне једначине за несавршени диелектрик:

$$\Delta \underline{\mathbf{H}} - \gamma^2 \underline{\mathbf{H}} = 0, \quad \Delta \underline{\mathbf{E}} - \gamma^2 \underline{\mathbf{E}} = 0.$$

35. Извести таласну једначину за поље комплексног вектора електричног поља $\underline{\mathbf{E}}$ за случај простирања раванског таласа у хомогеној проводној средини.

$$\Delta \underline{\mathbf{E}} = \gamma^2 \underline{\mathbf{E}}.$$

36. Извести изразе за рачунање коефицијента слабљења α и фазног коефицијента β за простопериодичан униформан равански талас који се простира у хомогеном, линеарном, изотропном и несавршеном диелектрику параметара ϵ , μ и σ .

37. Како рачунамо комплексну константу простирања $\underline{\gamma}$?

38. Талас $\underline{\mathbf{E}}(z,t) = 100 \cdot \sin(\omega t - \beta z) \cdot \hat{\mathbf{j}}$ V/m простира се у слободном простору. Одредити поље $\underline{\mathbf{H}}(z,t)$ и комплексну константу простирања $\underline{\gamma}$ ако је учестаност $f = 95,5 \text{ MHz}$.

$$\underline{\mathbf{H}} = -\frac{E_o}{Z_c} \sin(\omega t - \beta z) \cdot \hat{\mathbf{i}} = -\frac{100}{120\pi} \sin(\omega t - \beta z) \cdot \hat{\mathbf{i}}, \quad \alpha = 0, \quad \beta = 2 \text{ m}^{-1}.$$

39. Одредити константу простирања $\underline{\gamma}$ за средину са следећим карактеристикама: $\mu_r = 1$, $\epsilon_r = 8$ и $\sigma = 0,5 \text{ pS/m}$ ако је учестаност таласа

$$f = 1,5 \text{ MHz.}$$

$$\alpha = 0, \quad \beta = 9 \cdot 10^{-2} \text{ rad/m.}$$

40. Извести опште изразе за константу пригушења α и фазни коефицијент β ?
41. Извести општи израз за рачунање комплексне таласне импедансе $\underline{Z}_t$. Дати изразе за модуло и аргумент импедансе.

$$\underline{Z}_t = \frac{\underline{E}_x}{\underline{H}_y} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \frac{j\omega\mu}{\underline{\gamma}} = \frac{\omega\mu}{\alpha^2 + \beta^2}(\beta + j\alpha) = |Z_t| \angle \varphi,$$

$$|Z_t| = \frac{\omega\mu}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} / \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{\alpha}{\beta}.$$

42. Извести опште изразе за рачунање брзине простирања и таласне дужине таласа.
43. Извести комплексну импедансу простирања за случај доброг проводника.

$$|Z_t| = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}}, \quad \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

44. Одредити таласну импедансу $\underline{Z}_t$, константу простирања $\underline{\gamma}$ и брзину простирања таласа за проводну средину у којој су: $\sigma = 60 \text{ MS/m}$, $\mu_r = 1$ и $f = 100 \text{ MHz}$.

$$\underline{\gamma} = 2,18 \cdot 10^5 \angle 45^\circ, \quad \underline{Z}_t = 3,63 \cdot 10^{-3} \angle 45^\circ \Omega,$$

45. Зашто у случају доброг проводника не важи једнакост густина енергије електричног и магнетског поља? Показати да су ове густине једнаке за случај идеалних диелектрика.
46. Познат је вектор електричног поља раванског таласа који се простира у средини са губицима у смјеру y -осе. Одредити: (а) векторе електричног и магнетског поља у тренутку $t = 2 \text{ ns}$ на мјесту $y = 1 \text{ m}$, (б) Растојање које талас пређе и промијени фазу за 10° , (в) растојање које талас пређе да му се амплитуда смањи за 40%.

$$\underline{E} \text{ 0,t} = 30 \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{4} \right) \hat{k} \frac{\text{V}}{\text{m}}, \quad \epsilon_r = 4, \quad \mu = \mu_o, \quad \sigma = 10^{-2} \frac{\text{S}}{\text{m}}, \quad \omega = 10^9 \pi.$$

$$(a) \quad \underline{E} \text{ y} = 1, \quad t = 2 \text{ ns} = 2,79 \hat{k}, \quad \underline{H} \text{ y} = 1, \quad t = 2 \text{ ns} = 6,04 \cdot \hat{i} \frac{\text{mA}}{\text{m}}.$$

$$(b) \quad y = 8,325 \text{ m.}$$

$$(v) \quad y = 542,55 \text{ mm.}$$

47. Равни, униформни талас простира се кроз хомогену, линеарну и изотропну

срдину следећих карактеристика: $\varepsilon_r = 1$, $\mu_r = 20$, $\sigma = 3 \text{ S/m}$. Познат је вектор електричног поља овог таласа. Одредити коефицијент слабљења, фазни коефицијент и вектор магнетског поља $\mathbf{H}(z, t)$.

$$\mathbf{E}(z, t) = 2e^{-\alpha z} \sin(\omega t - \beta z) \hat{\mathbf{j}} \text{ V/m}, \quad f = 16 \text{ MHz}.$$

$$\alpha = 61,6 \frac{\text{Np}}{\text{m}}, \quad \beta = 61,6 \frac{\text{rad}}{\text{m}}.$$

$$\mathbf{H}(z, t) = -68,9 e^{-\alpha z} \sin\left(\omega t - \beta z - \frac{\pi}{4}\right) \hat{\mathbf{i}} \text{ mA/m}.$$

48. Напишите изразе $\mathbf{E}(z, t)$ и $\mathbf{H}(z, t)$ за случај простирања равнског таласа у доброј проводној средини, ако електрично поље има x компоненту, ефективну вриједност E_o за $z = 0$.

$$\mathbf{E}(z, t) = E_o \sqrt{2} \cdot e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \cdot \hat{\mathbf{i}},$$

$$\mathbf{H}(z, t) = \frac{E_o}{Z_t} \sqrt{2} \cdot e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z - \pi/4) \cdot \hat{\mathbf{j}}.$$

49. Изразити брзину простирања и таласну дужину преко дубине продирања у доброј проводној средини.
 $c = \omega \delta$, $\lambda = 2\pi \delta$.

50. Како се рачуна дубина продирања таласа у доброј проводној средини?

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\pi \mu \sigma f}} = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}}.$$

51. Како се рачуна површинска отпорност проводника R_s ?

$$R_s = \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma}} = \sqrt{\frac{\pi \mu f}{\sigma}}.$$

52. Особине таласа у хомогеној проводној средини (γ , α , β , λ , c , $Z_t, \dots$)?

53. Када кажемо да је проводна средина идеалан проводник? Особине таквих средина?

54. Изведите израз за комплексну константу простирања за случај реалног диелектрика.

$$\alpha = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}, \quad \beta = \frac{\omega}{c}.$$

55. Изразите константе α и β преко тангенса угла губитака $\tan \delta$.

$$\alpha = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \frac{w}{2} \sqrt{\epsilon \mu} \cdot \operatorname{tg} \delta = \frac{w}{2c} \cdot \operatorname{tg} \delta = \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg} \delta.$$

56. Гранични услови на површини идеалног проводника?
57. Ако је комплексни представник магнетског поља $\underline{H} = H_o \exp(\pm \gamma z) \cdot \hat{r}$ гдје је $\hat{r}$ фиксиран јединични вектор, одредити могуће положаје вектора $\hat{r}$ да ово поље задовољи Максвелове једначине.
Вектор $\hat{r}$ мора бити окомит на z осу.
58. Шта је расијање електромагнетских таласа?
59. Извести израз за резултантно електрично поље $\underline{E}_{\text{rez}}(z,t)$ за случај кад талас упада нормално на површину идеалног проводника, под претпоставком да инцидентни талас има x компоненту, ефективну вриједност E_o и $\theta_d = 0$.

$$E_x(z,t) = 2\sqrt{2} E_{od} \cdot \sin \beta z \cdot \sin(wt + \theta_d).$$

$$H_y(z,t) = H_{yd} + H_{yr} = 2 \frac{\sqrt{2} E_{od}}{Z_c} \cos \beta z \cdot \cos(wt + \theta_d).$$
60. Написати комплексног представника $\underline{E}(z)$ израза за резултантно електрично поље $\underline{E}_{\text{rez}}(z,t) = 2\sqrt{2} E_o \sin(\beta z) \sin(wt) \cdot \hat{i}$.

$$\underline{E}_{\text{rez}}(z,t) = 2\sqrt{2} E_o \sin(\beta z) \sin(wt) \cdot \hat{i} = -2\sqrt{2} E_o \sin(\beta z) \cos(wt + \pi/2) \cdot \hat{i}.$$

$$\underline{E}(z) = -j 2 E_o \sin(\beta z).$$
61. За стојеће таласе одредити мјеста гдје се налазе чворне равни резултантних електричног и магнетског поља.
62. Резултантно електрично и магнетско поље дати су изразима:

$$\underline{E}_{\text{rez}}(z,t) = 2\sqrt{2} E_o \sin(\beta z) \sin(wt) \cdot \hat{i}, \underline{H}_{\text{rez}}(z,t) = 2 \frac{\sqrt{2}}{Z_t} E_o \cos(\beta z) \cos(wt) \cdot \hat{j}.$$
Објаснити зашто ове таласе називамо стојећим таласима? По чему закључујемо да ово нису прогресивни таласи?
63. Помоћу израза за тренутну вриједност Поинтингова вектора у случају стојећих таласа показати да се овим таласима не може преносити енергија?
64. Напишите комплексне представнике израза:

$$\underline{E}_{\text{rez}}(z,t) = 2\sqrt{2} E_o \sin(\beta z) \sin(wt) \cdot \hat{i}, \underline{H}_{\text{rez}}(z,t) = 2 \frac{\sqrt{2}}{Z_t} E_o \cos(\beta z) \cos(wt) \cdot \hat{j}.$$

$$\underline{E}_{\text{rez}}(z) = -j 2 E_{od} \cdot \sin \beta z \cdot \hat{i}, \underline{H}_{\text{rez}}(z) = \frac{2 E_{od}}{Z_c} \cdot \cos \beta z \cdot \hat{j}.$$

65. Ако су:

$$\mathbf{E}_{\text{rez}}(z,t) = 2\sqrt{2} E_o \sin(\beta z) \sin(\omega t) \cdot \hat{\mathbf{i}}, \mathbf{H}_{\text{rez}}(z,t) = 2 \frac{\sqrt{2}}{Z_t} E_o \cos(\beta z) \cos(\omega t) \cdot \hat{\mathbf{j}},$$

стојећи таласи у слободном простору за случај када инцидентни талас упада нормално на површину идеалног проводника, одредити површинску густину наелектрисања $\underline{\eta}$ и густину површинске струје $\underline{\mathbf{J}}_{\text{pov.}}$.

$$\underline{\eta} = 0, \quad \underline{\mathbf{J}}_{\text{pov.}} = \frac{2E_{\text{od}}}{Z_c} \cdot \cos\beta z \cdot \hat{\mathbf{i}} = \frac{2E_{\text{od}}}{Z_c} \cdot \hat{\mathbf{i}}.$$

66. Ако су :

$$\mathbf{E}_{\text{rez}}(z,t) = 2\sqrt{2} E_o \sin(\beta z) \sin(\omega t) \cdot \hat{\mathbf{i}}, \mathbf{H}_{\text{rez}}(z,t) = 2 \frac{\sqrt{2}}{Z_t} E_o \cos(\beta z) \cos(\omega t) \cdot \hat{\mathbf{j}},$$

стојећи таласи у слободном простору за случај када инцидентни талас упада нормално на површину идеалног проводника, одредити средњу вриједност електромагнетске енергије и показати да је та вриједност константна изнад проводне равни.

67. Анализирајте својства средине преко тангенса угла губитака
- $\text{tg}\delta$
- .

68. Докажите да је аргумент таласне импедансе проводне средине
- φ_c
- једнак половини угла губитака, (
- $\delta = 2\varphi_c$
-).

69. Раван, униформан, линијски поларизован, простопериодичан талас, кружне учестаности
- ω
- и ефективне вриједности поља
- E_o
- , наилази из вакуума нормално на савршено проводну раван. Одредити: (а) резултантно електрично и магнетско поље изнад равни, (б) расподелу индукованих струја и наелектрисања на равни, (в) тренутну вриједност густине енергије електромагнетског поља изнад равни.

(а)

$$\mathbf{E}_{\text{rez}}(z,t) = 2\sqrt{2} E_{\text{od}} \cdot \sin(\beta z) \cdot \sin(\omega t) \cdot \hat{\mathbf{i}},$$

$$\mathbf{H}_{\text{rez}}(z,t) = 2\sqrt{2} \frac{E_{\text{od}}}{Z_c} \cos(\beta z) \cdot \cos(\omega t) \cdot \hat{\mathbf{j}}.$$

(б)

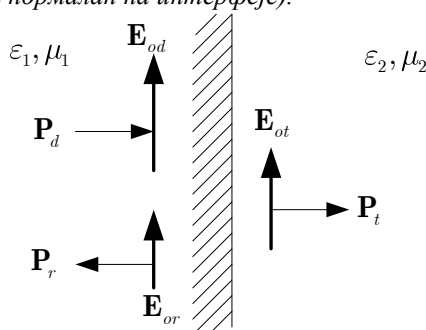
$$\underline{\eta}_s = 0, \quad \underline{\mathbf{J}}_{\text{pov}} = 2 \frac{E_{\text{od}}}{Z_c} \hat{\mathbf{i}}.$$

(в)

$$w_{\text{em}}(z,t) = 4\epsilon_o E_{\text{od}}^2 \left[\sin^2(\beta z) \cdot \sin^2(\omega t) + \cos^2(\beta z) \cdot \cos^2(\omega t) \right].$$

70. Одредити амплитуде рефлектованог и трансмитованог таласа електричног и магнетског поља на интерфејсу приказаном на слици 7.31, ако је
- $E_{\text{od}} = 15 \text{ V/m}$

у средини (1) са $\varepsilon_{r1}=9$, $\mu_{r1}=1$ и $\sigma_1=0$. Средина (2) је слободни простор. (Инцидентни талас је нормалан на интерфејс).



Слика 7.31

$$E_{or} = 7,5 \frac{\text{V}}{\text{m}}, E_{ot} = 22,5 \frac{\text{V}}{\text{m}}, H_{od} = 0,119 \frac{\text{A}}{\text{m}},$$

$$H_{or} = -0,06 \frac{\text{A}}{\text{m}}, H_{ot} = 0,06 \frac{\text{A}}{\text{m}}.$$

71. Простопериодичан равански талас наилази из диелектрика константи ε_1 и μ_1 нормано на раван што раздваја тај диелектрик од диелектрика константи ε_2 и μ_2 . Доказати да је однос амплитуда рефлектованог и директног таласа електричног поља (коэффициент рефлексије) $R = (Z_2 - Z_1) / (Z_1 + Z_2)$, а однос амплитуда трансмитованог и директног таласа (коэффициент преламања или трансмисије) $T = 2Z_2 / (Z_1 + Z_2)$, где су $Z_1 = \sqrt{\mu_1 / \varepsilon_1}$ и $Z_2 = \sqrt{\mu_2 / \varepsilon_2}$ таласне импедансе средина.
72. Када је талас паралелно поларизован?
73. Када је талас нормално поларизован?
74. Коју раван називамо инцидентном равни?
75. Равански талас упада под произвољним углом на идеалну проводну површину. Изведите изразе за компоненте поља $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ за случај нормалне поларизације.
76. Равански талас упада под произвољним углом на идеалну проводну површину. Изведите изразе за компоненте поља $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ за случај паралелне поларизације.
77. За случај нормално поларизованог таласа компоненте поља су:

$$E_x(y, z, t) = 2\sqrt{2}E_{od} \cdot \sin(\beta z \cdot \cos \theta) \cdot \sin(\omega t - \beta y \sin \theta),$$

$$H_y(y, z, t) = -\frac{2\sqrt{2}E_{od}}{Z_c} \cos \theta \cdot \cos(\beta z \cdot \cos \theta) \cdot \cos(\omega t - \beta y \sin \theta),$$

$$H_z(y, z, t) = \frac{2\sqrt{2}E_{od}}{Z_c} \sin \theta \cdot \sin(\beta z \cdot \cos \theta) \cdot \sin(\omega t - \beta y \sin \theta).$$

Анализирајте ове изразе. Напишите релације за рачунање периода за обје просторне координате, еквивалентни фазни коефицијент и брзину простирања фазе.

78. На примјеру нормално поларизованог таласа чије су компоненте поља:

$$E_x(y, z, t) = 2\sqrt{2}E_{od} \cdot \sin(\beta z \cdot \cos \theta) \cdot \sin(\omega t - \beta y \sin \theta),$$

$$H_y(y, z, t) = -\frac{2\sqrt{2}E_{od}}{Z_c} \cos \theta \cdot \cos(\beta z \cdot \cos \theta) \cdot \cos(\omega t - \beta y \sin \theta),$$

$$H_z(y, z, t) = \frac{2\sqrt{2}E_{od}}{Z_c} \sin \theta \cdot \sin(\beta z \cdot \cos \theta) \cdot \sin(\omega t - \beta y \sin \theta).$$

објаснити зашто је могуће формирање талосовода правоугаоног попречног пресека.

79. На примјеру паралелно поларизованог таласа чије су компоненте поља:

$$E_y(y, z, t) = 2\sqrt{2}E_{od} \cos \theta \cdot \sin(\beta z \cdot \cos \theta) \cdot \sin(\omega t - \beta y \sin \theta),$$

$$E_z(y, z, t) = -2\sqrt{2}E_{od} \sin \theta \cdot \cos(\beta z \cdot \cos \theta) \cdot \cos(\omega t - \beta y \sin \theta),$$

$$H_x(y, z, t) = -2\frac{\sqrt{2}E_{od}}{Z_c} \cdot \cos(\beta z \cdot \cos \theta) \cdot \cos(\omega t - \beta y \sin \theta).$$

Објаснити зашто **није** могуће формирање талосовода правоугаоног попречног пресека.

80. Извести изразе за коефицијенте рефлексије и трансмисије за случај простирања раванског, униформног, линијски поларизованог инцидентног таласа који упада нормално на раздвојну површину двије линеарне, хомогене средине без губитака.

81. Дати су комплексни представници електричног и магнетског поља за случај простирања раванског, униформног, линијски поларизованог инцидентног таласа који упада нормално на раздвојну површину двије линеарне, хомогене средине без губитака:

$$\underline{E}_1(z) = \underline{E}_d(z) + \underline{E}_r(z) = \underline{E}_{do} e^{-j\beta_1 z} (1 + \underline{R} \cdot e^{+j2\beta_1 z}) \cdot \hat{i},$$

$$\underline{H}_1(z) = \underline{H}_d(z) + \underline{H}_r(z) = \frac{\underline{E}_{do}}{Z_1} e^{-j\beta_1 z} (1 - \underline{R} \cdot e^{+j2\beta_1 z}) \cdot \hat{j},$$

$$\underline{E}_2(z) = \underline{E}_t(z) = \underline{T} \cdot \underline{E}_{do} e^{-j\beta_2 z} \cdot \hat{i}, \quad \underline{H}_2(z) = \underline{H}_t(z) = \underline{T} \cdot \frac{\underline{E}_{do}}{Z_2} e^{-j\beta_2 z} \cdot \hat{j}.$$

Анализирајте случајеве $R < 0$ и $R > 0$. Одредити минималне и максималне вриједности израза за наведене случајеве.

82. Извести израз за рачунање коефицијента стојећег таласа за случај описан у претходном питању?

83. Показати да се добар проводник понаша као идеалан проводник при упаду инцидентног таласа окомито на површину проводника. Чему је у том случају једнака средња вриједност Поинтингова вектора и укупна снага Цулових

губитака у проводнику?

84. *Објаснити и написати Снелов закон.*
85. *Извести изразе за коефицијенте рефлексије и трансмисије за нормално поларизовани талас који упада под произвољним углом.*
86. *Извести изразе за коефицијенте рефлексије и трансмисије за паралелно поларизовани талас који упада под произвољним углом.*
87. *Шта називамо Френеловим коефицијентима?*
88. *Како гласи Снелов закон у комплексном облику?*