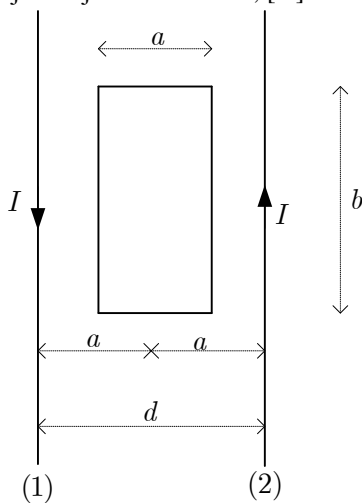


4. КВАЗИСТАЦИОНАРНО ПОЉЕ

Примјер 4.1

Између одлазног и повратног проводника двожиног вода кроз који протиче струја I , налази се правоугаони *струјни* рам са N завоја страница a и b , према слици. Одредити коефицијент међусобне индукције ако је $d = b = 2a$, [].



Слика 5.1

Рјешење:

Због симетрије флуксеви које стварају проводници вода кроз правоугаони рам међусобно су једнаки и износе:

$$\phi_1 = \phi_2 = \frac{\mu_o I b}{2\pi} \ln \frac{\frac{3}{4}d}{\frac{d}{4}} = \frac{\mu_o I b}{2\pi} \ln 3,$$

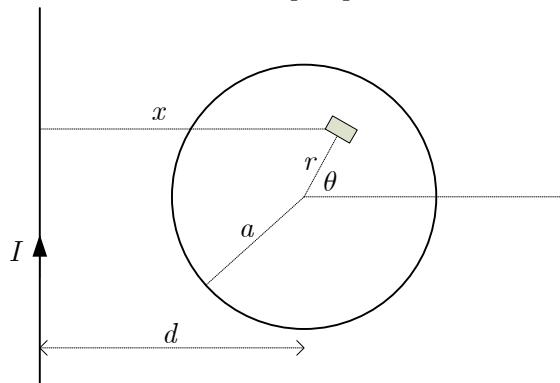
па је флуks кроз правоугаони рам: $\phi = 2\phi_1 = \frac{\mu_o I b}{\pi} \ln 3.$

Укупан флуks кроз N завоја: $\psi = N\phi$, те је коефицијент међусобне индукције:

$$M = \frac{\psi}{I} = \frac{\mu_o N b}{\pi} \ln 3.$$

Примјер 4.2

Праволинијски бесконачно дуг вод и кружна жичана контура, полупречника a , леже у истој равни. Растојање центра контуре од проводника је d . Одредити међусобну индуктивност оваког система, [226].



Слика 5.2

Рјешење:

$$B = \frac{\mu_o I}{2\pi x}, \quad x = d + r \cos \theta,$$

$$d\Phi_{21} = \mathbf{B} d\mathbf{S} = B dS = \frac{\mu_o I}{2\pi x} r \cdot dr \cdot d\theta = \frac{\mu_o I}{2\pi} \frac{r}{d + r \cos \theta} dr \cdot d\theta,$$

$$r \in [0, a], \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad \Phi_{12} = 2 \frac{\mu_o I}{2\pi} \int_0^a r dr \int_0^\pi \frac{d\theta}{d + r \cos \theta} \Rightarrow$$

$$\Phi_{21} = \left| t = tg \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}, \quad \cos \theta = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad d\theta = \frac{2dt}{1 + t^2}, \quad t \in [0, \infty) \right|,$$

$$\Phi_{21} = \frac{\mu_o I}{\pi} \int_0^a r dr \int_0^\infty \frac{dt}{d+r+(d-r)t^2} = \frac{\mu_o I}{\pi} \int_0^a \left(\frac{2}{\sqrt{d^2-r^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{d-r}{d+r}} t \right)^\infty dr,$$

$$\Phi_{21} = \mu_o I \int_0^a \frac{r dr}{\sqrt{d^2-r^2}} = -\mu_o I \sqrt{d^2-r^2} \Big|_0^a = \mu_o I \left(d - \sqrt{d^2-a^2} \right),$$

$$L_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I} = \mu_o \left(d - \sqrt{d^2-a^2} \right).$$

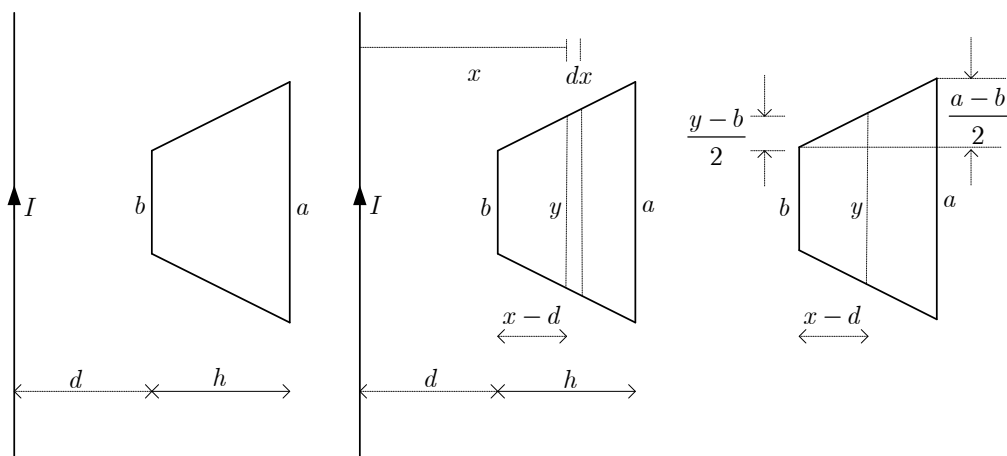
$$\int \frac{dt}{a+bt^2} = \frac{1}{b} \int \frac{dt}{a/b+t^2} = \frac{1}{b} \int \frac{dt}{\sqrt{a^2/b^2+t^2}} = \frac{1}{b} \sqrt{\frac{b}{a}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{a/b}},$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}.$$

Примјер 4.3

Жичани рам облика правилног трапеза основица a и b ($a > b$) и висине h налази се у ваздуху. Траpez лежи у истој равни са праволинијским проводником са струјом I . Међусобни положај рама и проводника дат је на слици 5.9. Израчунати међусобни индуктивитет M рама и проводника, [225].

Рјешење:



Слика 5.3

$$d\Phi = B dS = \frac{\mu_o I}{2\pi x} dS, \quad dS = y dx,$$

$$\frac{a-b}{h} = \frac{y-b}{x-d}, \Rightarrow y-b = \frac{a-b}{h}(x-d), \quad dS = \left[b + \frac{a-b}{h}(x-d) \right] dx,$$

$$d\Phi = \frac{\mu_o I}{2\pi} \left[\frac{bh - (a-b)d}{hx} + \frac{a-b}{h} \right] dx = \frac{\mu_o I}{2\pi h} \left[\frac{bh - (a-b)d}{x} + a-b \right] dx \Rightarrow$$

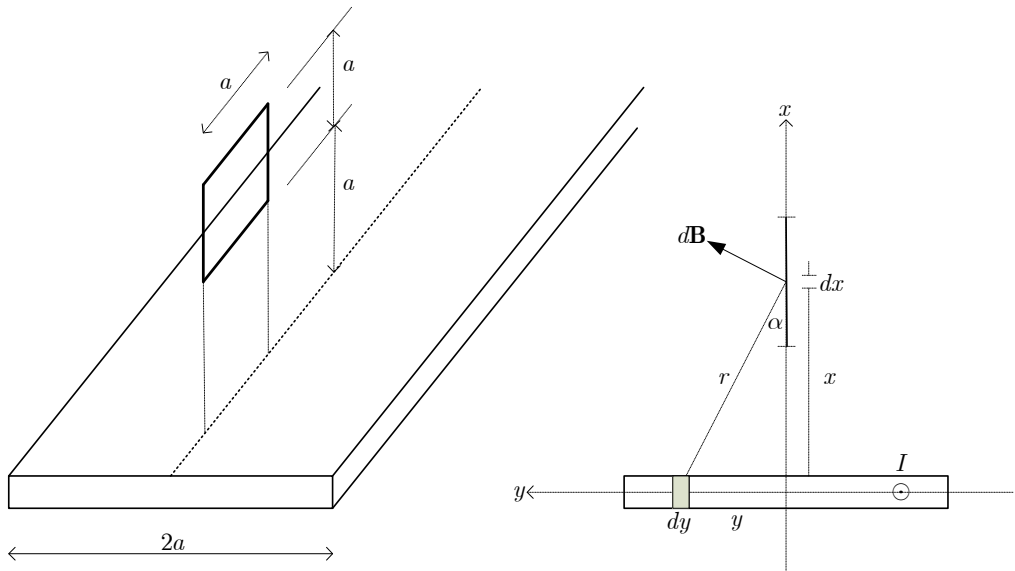
$$\Phi = \frac{\mu_o I}{2\pi h} \left\{ [bh - (a-b)d] \ln x + (a-b)x \right\}_d^{d+h},$$

$$\Phi = \frac{\mu_o I}{2\pi} \left(\frac{bh - ad + bd}{h} \ln \frac{d+h}{d} + a-b \right),$$

$$M = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_o}{2\pi} \left(\frac{bh - ad + bd}{h} \ln \frac{d+h}{d} + a-b \right).$$

Примјер 4.4

Врло танка права бесконачно дуга метална трака ширине $2a$ и квадратни жичани рам странице a имају међусобни положај као на слици. Израчунати међусобни индуктивитет L_{12} траке и квадратног рама, [224].



Слика 5.4

Рјешење:

$$dI = \frac{I}{2a} dy, \quad dB = \frac{\mu_o dI}{2r\pi} = \frac{\mu_o I}{4a\pi} \frac{dy}{r},$$

$$d\Phi_{12} = d\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = dB_y \cdot dS = \frac{\mu_o I \cos \alpha}{4\pi ar} dy (a \cdot dx) = \frac{\mu_o I}{4\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} dx dy,$$

$$\Phi_{21} = \frac{\mu_o I}{4\pi} \int_a^{2a} x dx \int_{-a}^a \frac{dy}{x^2 + y^2} = \frac{\mu_o I}{4\pi} \int_a^{2a} x \left(\frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right)_{-a}^{+a} dx = \frac{\mu_o I}{2\pi} \int_a^{2a} \operatorname{arctg} \frac{a}{x} dx,$$

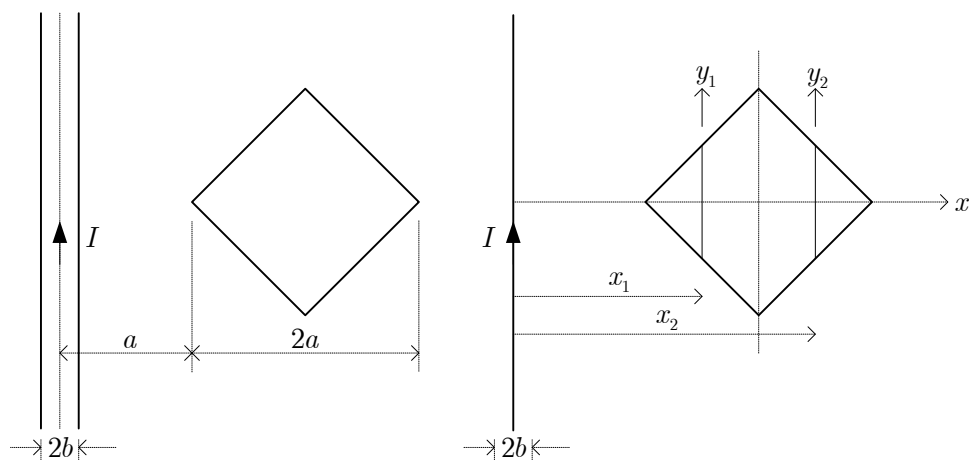
$$\Phi_{21} = \left| \begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} \frac{a}{x}, \quad du = -\frac{a}{x^2 + a^2} dx \\ v = x, \quad dv = dx \end{array} \right|,$$

$$\Phi_{21} = \frac{\mu_o I a}{4\pi} \left(4 \operatorname{arctg} \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2} + \ln \frac{5}{2} \right) = 1,2 \cdot 10^{-7} a I.$$

$$L_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I} = \frac{\mu_o a}{4\pi} \left(4 \operatorname{arctg} \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2} + \ln \frac{5}{2} \right) = 1,2 \cdot 10^{-7} a.$$

Примјер 4.5

Праволинијски бесконачно дуг проводник и квадратна контура дијагонале $2a$ леже у истој равни. Израчунати међусобну индуктивност, [223].



Слика 5.5

Рјешење:

Одредимо флукс кроз квадратну контуру који потиче од струје I :

$$B_1 = \frac{\mu_o I}{2\pi x_1}, \quad B_2 = \frac{\mu_o I}{2\pi x_2},$$

$$d\Phi_{21} = \mathbf{B}_1 d\mathbf{S}_a + \mathbf{B}_2 d\mathbf{S}_b = B_1 dS_a + B_2 dS_b = \frac{\mu_o I}{2\pi} \left(\frac{2y_1}{x_1} dx_1 + \frac{2y_2}{x_2} dx_2 \right).$$

Слиједећи ознаке на слици 5.11 добија се:

$$\frac{a}{a} = \frac{y_1}{x_1 - a}, \quad y_1 = x_1 - a,$$

$$\frac{a}{a} = \frac{y_2}{3a - x_2}, \quad y_2 = 3a - x_2.$$

$$\Phi_{21} = \frac{\mu_o I}{\pi} \left[\int_a^{2a} \frac{x_1 - a}{x_1} dx_1 + \int_{2a}^{3a} \frac{3a - x_2}{x_2} dx_2 \right],$$

$$\Phi_{21} = \frac{\mu_o I}{\pi} \left(a - a \ln 2 + 3a \ln \frac{3}{2} - a \right) = \frac{\mu_o a I}{\pi} (3 \ln 3 - 4 \ln 2).$$

$$L_{12} = \frac{\mu_o a}{\pi} (3 \ln 3 - 4 \ln 2) = \frac{\mu_o a}{\pi} (\ln 27 - \ln 16) = \frac{\mu_o a}{\pi} \ln \frac{27}{16}.$$

-*-