

3. СТАЦИОНАРНО МАГНЕТСКО ПОЉЕ

Примјер 3.1

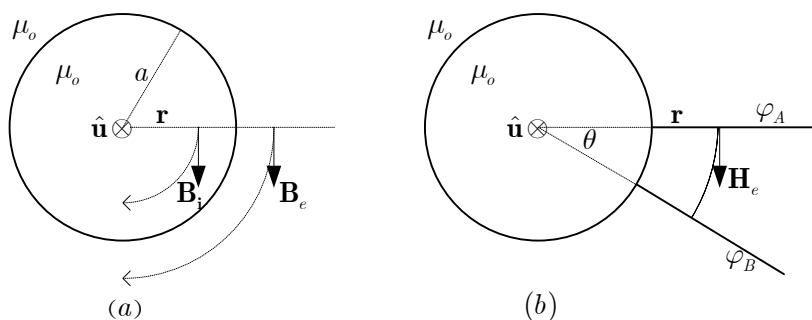
Одредити магнетски вектор-потенцијал у и око праволинијског проводника кружног попречног пресека, полупречника a , са струјом константног интензитета I , који се налази у хомогеној средини пропустљивости μ_o , [].

Рјешење:

Када се приимијени закон укупне струје добијају се познати изрази:

$$H_e = \frac{I}{2\pi r}, \quad B_e = \frac{\mu_o I}{2\pi r}, \quad (r \geq a). \quad (1)$$

$$H_i = \frac{Ir}{2\pi a^2}, \quad B_i = \frac{\mu_o Ir}{2\pi a^2}, \quad (r \leq a). \quad (2)$$



Слика 3.1

гдје је r – растојање од осе проводника. Ако са $\hat{\mathbf{u}}$ означимо смјер вектора густине струје, магнетске индукције $\mathbf{B}_i$ и $\mathbf{B}_e$ можемо написати у облику:

$$\mathbf{B}_i = \frac{\mu_o I}{2\pi a^2} (\hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{r}), \quad \mathbf{B}_e = \frac{\mu_o I}{2\pi r} (\hat{\mathbf{u}} \times \hat{\mathbf{r}}), \quad (3)$$

Смјер линија поља одређен је векторским производом $(\hat{\mathbf{u}} \times \hat{\mathbf{r}})$. У области $\mathbf{J} = 0$ скаларни магнетски потенцијал одређујемо из:

$$\varphi_A - \varphi_B = \int_A^B \mathbf{H}_e \cdot d\mathbf{l} = H \int_0^\theta r d\theta = \frac{I \cdot r}{2\pi r} \int_0^\theta d\theta = \frac{I \cdot \theta}{2\pi}. \quad (4)$$

Магнетски вектор-потенцијал има исти смјер као и струја у проводнику, односно $A = A_z(r)$. Из слике поља и релације $\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A}$ слиједи:

$$\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A} = B_\theta \hat{\theta} = \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \cdot \hat{\theta} = -\frac{\partial A_z}{\partial r} \cdot \hat{\theta}, \quad B_\theta = -\frac{dA_z}{dr},$$

$$A_e = -\frac{\mu_o I}{2\pi} \ln r + C_1, \quad A_i = -\frac{\mu_o I r^2}{4\pi a^2} + C_2.$$

Једну константу је могуће произвољно изабрати, а друга се одређује из услова непрекидности вектор-потенцијала: $A_e(a) = A_i(a)$. Узимајући прву константу једнаку нули, за другу добијамо:

$$C_2 = \frac{\mu_o I}{4\pi} (1 - 2 \cdot \ln a).$$

Коначно,

$$A_e = -\frac{\mu_o I}{2\pi} \ln r, \quad (r \geq a), \quad (5)$$

$$A_i = \frac{\mu_o I}{4\pi} \left(1 - 2 \cdot \ln a - \frac{r^2}{a^2} \right). \quad (r \leq a). \quad (6)$$

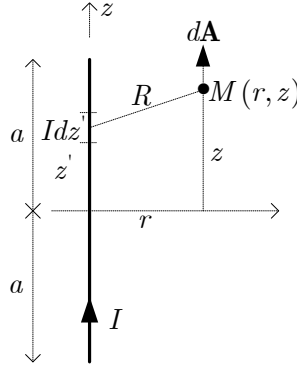
Примијетимо да магнетски вектор-потенцијал у вањској области не зависи од полупречника проводника.

Примјер 3.2

Одредити поље у околини праволинијског проводника дужине $2a$ кроз кога протиче струја константног интензитета I , [207].

Рјешење:

Бирамо цилиндрични координатни систем. Поставимо га тако да координатни почетак лежи на половини проводника. У овако постављеном координатном систему магнетски вектор-потенцијал има само z -компоненту:



Слика 3.2

$$d\mathbf{A} = dA \cdot \hat{\mathbf{z}} = \frac{\mu_o I}{4\pi} \int \frac{dz'}{R} \hat{\mathbf{z}}, \quad R = \sqrt{r^2 + (z - z')^2},$$

$$A = \frac{\mu_o I}{4\pi} \int_{-a}^{+a} \frac{dz'}{\sqrt{r^2 + (z - z')^2}} = \frac{\mu_o I}{4\pi} \ln \frac{z + a + \sqrt{r^2 + (z + a)^2}}{z - a + \sqrt{r^2 + (z - a)^2}}.$$

Вектор магнетске индукције има само θ -компоненту: $B_\theta = -\frac{dA_z}{dr},$

$$B_\theta = \frac{\mu_o I}{4\pi} \left[\frac{-r}{\left(a + z + \sqrt{r^2 + (a + z)^2} \right) \sqrt{r^2 + (a + z)^2}} + \right.$$

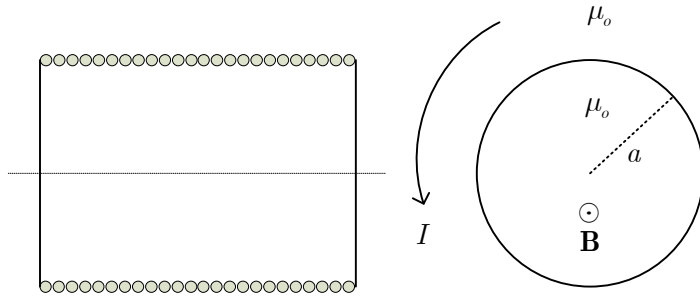
$$\left. + \frac{r}{\left(z - a + \sqrt{r^2 + (z - a)^2} \right) \sqrt{r^2 + (z - a)^2}} \right].$$

Примјер 3.3

Одредити магнетски вектор потенцијал у унутрашњости и изван неограниченог цилиндричног соленоида кружног пресеја, полупречника a , густо намотаног са N' завојака по јединици дужине, кроз које протиче временски константна струја интензитета I , [208].

Рјешење:

У цилиндричном координатном систему вектор густине струје има само угаону компоненту: $\mathbf{J} = J \cdot \hat{\theta}$, ($J = 0, r < a$), ($J = \text{const.}, r = a$) и ($J = 0, r > a$). То значи да ће и магнетски вектор потенцијал имати само угаону компоненту: $\mathbf{A} = A_\theta(r) \cdot \hat{\theta}$.



Слика 3.3

$$\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{r}} & r\hat{\theta} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(rA_\theta) \cdot \hat{\mathbf{z}} = B_z \cdot \hat{\mathbf{z}}.$$

$$\text{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{r}} & r\hat{\theta} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} = -\frac{dB_z}{dr} \cdot \hat{\theta} = \mu_0 J_\theta \cdot \hat{\theta}, \quad \frac{dB_z}{dr} = \begin{cases} 0, & r < a \\ -\mu_0 J, & r = a \\ 0, & r > a \end{cases}$$

$$\text{За } r < a \Rightarrow \frac{dB_z}{dr} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}(rA_\theta) \right) = 0, \Rightarrow A_\theta = \frac{C_1}{2} r + \frac{C_2}{r}.$$

$$\text{За } r = 0 \text{ потенцијал мора бити коначан, те је } C_2 = 0, \Rightarrow A_\theta = \frac{C_1}{2} r.$$

$$B_z = \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(rA_\theta) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{C_1 r^2}{2} \right) = \frac{1}{r} \frac{2C_1 r}{2} = C_1$$

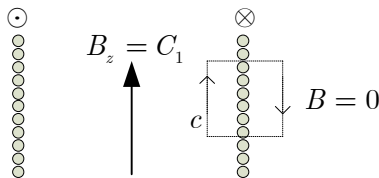
$$\text{За } r > a \Rightarrow A_\theta = \frac{C_3}{2} r + \frac{C_4}{r}.$$

$$\text{За } r \rightarrow \infty \text{ потенцијал има коначну вриједност, те је } C_3 = 0, \Rightarrow A_\theta = \frac{C_4}{r}.$$

$$B_z = \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(rA_\theta) = 0.$$

Из непрекидности функције потенцијала

$$A_\theta(r = a_-) = A_\theta(r = a_+) \Rightarrow C_4 = \frac{C_1 a^2}{2}. \quad C_1 = ?$$



Слика 3.4

Примијенимо Амперов закон на контуру која обухвата дио завојака соленида:

$$\oint_c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I, \Rightarrow B_z \cdot l = \mu_o N' I \cdot l \Rightarrow C_1 = \mu_o N' I.$$

Коначно,

$$A_\theta = \begin{cases} \frac{\mu_o N' I \cdot r}{2}, & r \leq a \\ \frac{\mu_o N' I \cdot a^2}{2r}, & r \geq a \end{cases}, \quad B_z = \begin{cases} \mu_o N' I, & r < a \\ 0, & r > a \end{cases}.$$

Примјер 3.4

Бесконечно дуг цилиндар кружног попречног пресјека, полупречника a , од **немагнетског** материјала са $\mu = \mu_o$ равномерно је по својој запремини оптерећен запреминском густином наелектрисања ρ . Цилиндар се окреће око своје осе угаоном брзином ω . Користећи се диференцијалном једначином за магнетски вектор потенцијал одредити магнетски вектор потенцијал, а преко њега и магнетску индукцију у свим тачкама простора, [209].

Рјешење:

Полазимо од прве Максвелове једначине у диференцијалном облику:

$$\text{rot} \mathbf{B} = \mu_o \mathbf{J}, \quad \text{rot}(\text{rot} \mathbf{A}) = \mu_o \mathbf{J}, \quad (*)$$

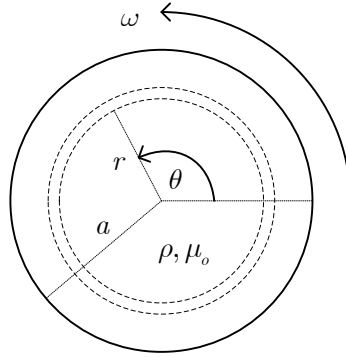
$$dq = \rho dV = \rho \cdot l \cdot r dr \cdot d\theta,$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}, \quad \Delta i = \frac{dq}{dt} = \rho l r \cdot dr \cdot \omega = \rho \omega l r \cdot dr.$$

Вектор густине струје има само угаону компоненту: $\mathbf{J} = J_\theta \hat{\theta}$:

$$J_\theta(r) = \frac{\Delta i}{\Delta S} = \frac{\rho \omega l r \cdot dr}{l \cdot dr} = \rho \omega r, \quad \text{или}$$

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v} = \rho \mathbf{w} \times \mathbf{r} = \rho \omega r \cdot \hat{\theta} = J_\theta(r) \cdot \hat{\theta}.$$



Слика 3.5

Развијмо ротор у цилиндричном координатном систему:

$$\text{rot} \mathbf{A} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{r}} & r\hat{\theta} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & rA_\theta(r) & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{r} \frac{d(rA_\theta)}{dr} \hat{\mathbf{z}} = B_z(r) \hat{\mathbf{z}}. \quad (*)$$

$$\text{rot}(\text{rot} \mathbf{A}) = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{r}} & r\hat{\theta} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} \frac{d(rA_\theta)}{dr} \end{vmatrix} = -\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d(rA_\theta)}{dr} \right) \hat{\theta} = \mu_o \rho \omega \cdot r \cdot \hat{\theta}.$$

За $r \prec a$:

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d(rA_\theta)}{dr} \right) = -\mu_o \rho \omega r, \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r} \frac{d(rA_\theta)}{dr} = -\frac{\mu_o \rho \omega \cdot r^2}{2} + C_1 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d(rA_\theta)}{dr} = -\frac{\mu_o \rho \omega \cdot r^3}{2} + C_1 r \Rightarrow A_\theta = -\frac{\mu_o \rho \omega r^3}{8} + C_1 r + \frac{C_2}{r}.$$

$C_2 = 0$ пошто је $A_\theta(0)$ коначно.

За $r \succ a$,

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d(rA_\theta)}{dr} \right) = 0, \Rightarrow \frac{d(rA_\theta)}{dr} = C_3 r \Rightarrow rA_\theta = \frac{C_3 r^2}{2} + C_4 \Rightarrow$$

$$A_\theta(r) = \frac{C_3 r}{2} + \frac{C_4}{r}.$$

$C_3 = 0$ пошто је $A_\theta(\infty)$ коначно.

$$B_z(r) = \frac{1}{r} \frac{d(rA_\theta)}{dr}.$$

За $r \prec a$:

$$B_z(r) = \frac{1}{r} \left(A_\theta + r \frac{dA_\theta}{dr} \right) = \frac{1}{r} \left[-\frac{\mu_o \rho \omega r^3}{8} + C_1 \frac{r}{2} + r \left(-\frac{3\mu_o \rho \omega r^2}{8} + \frac{C_1}{2} \right) \right],$$

$$B_z(r) = -\frac{\mu_o \rho \omega r^2}{8} + \frac{C_1}{2} - \frac{3\mu_o \rho \omega r^2}{8} + \frac{C_1}{2} = -\frac{\mu_o \rho \omega r^2}{2} + C_1.$$

За $r \succ a$,

$$B_z(r) = \frac{1}{r} \left(A_\theta + r \frac{dA_\theta}{dr} \right) = \frac{1}{r} \left(\frac{C_4}{r} - r \frac{C_4}{r^2} \right) = 0.$$

Константу C_1 израчунавамо из граничног услова $\mu_o B_z(a_-) = \mu_o B_z(a_+)$

$$C_1 = \frac{\mu_o \rho \omega \cdot a^2}{2}.$$

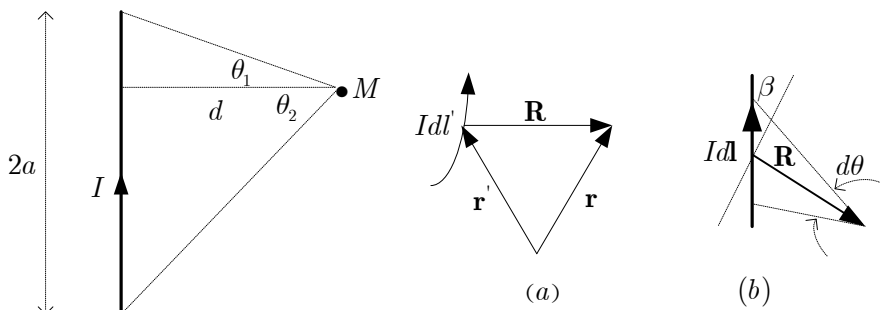
Коначно,

$$B = B_z = \frac{\mu_o \rho \omega}{2} (a^2 - r^2), \quad r \leq a,$$

$$B = B_z = 0, \quad r \geq a.$$

Примјер 3.5

Полазећи од Био-Саваровог закона одредити поље у околини праволинијског проводника дужине $2a$ кроз кога протиче струја константног интензитета I . Средина је неферомагнетска, [210].



Слика 3.6

Рјешење:

Био-Саваров закон за линијску струју има облик:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_l \frac{(I d\mathbf{l}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{R^3} = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_l \frac{(I d\mathbf{l}') \times \mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{R}}}{R^3} = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_l \frac{(I d\mathbf{l}) \times \hat{\mathbf{R}}}{R^2}.$$

Пошто је струјна нит планарна претходни израз поприма облик:

$$d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{R}} = dl \cdot \sin \alpha \cdot \hat{\mathbf{u}} = dl \cdot \cos \beta \cdot \hat{\mathbf{u}} = R \cdot d\theta \cdot \hat{\mathbf{u}}, \quad \alpha = \angle(d\mathbf{l}, \mathbf{R}).$$

$$B = \frac{\mu_o I}{4\pi} \int_l \frac{R d\theta}{R^2} = \frac{\mu_o I}{4\pi} \int_l \frac{d\theta}{R}. \quad (*)$$

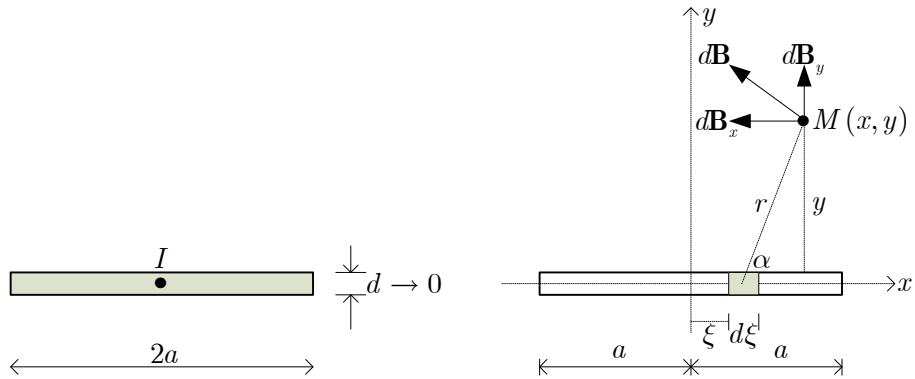
Израз (*) вриједи за тачке које леже у истој равни у којој лежи струјна нит. Израз даје интензитет вектора који је окомит на ту раван са смјером одређеним десним завртњем у односу на струју.

$$\frac{d}{R} = \cos \theta, \Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{\cos \theta}{d}, \Rightarrow$$

$$B = \frac{\mu_o I}{4\pi d} \int_{-\theta_2}^{\theta_1} \cos \theta \cdot d\theta = \frac{\mu_o I}{4\pi d} (\sin \theta_1 + \sin \theta_2), \quad \theta_1, \theta_2 \succ 0.$$

Примјер 3.6

Кроз праву врло танку бесконачно дугу проводну траку ширине $2a$, протиче временски константна струја интензитета I . Израчунати компоненте вектора магнетске индукције у произвољној тачки простора изван траке, [211].



Слика 3.7

Рјешење:

Ради се о планпаралелном магнетском пољу. Компоненте магнетске индукције можемо рачунати у произвољној равни $z = const$. Јасно је да магнетска индукција нема z -компоненту.

За елемент ширине $d\xi$ елементарна струја је: $dI = \frac{I}{2a} d\xi$.

$$dB_x = -\frac{\mu_o \cdot dI}{2r\pi} \sin \alpha = -\frac{\mu_o \cdot I}{4a\pi \cdot r} \frac{y}{r} = -\frac{\mu_o \cdot I}{4a\pi} \frac{y \cdot d\xi}{(x - \xi)^2 + y^2},$$

$$dB_y = \frac{\mu_o \cdot dI}{2r\pi} \cos \alpha = \frac{\mu_o \cdot I}{4a\pi \cdot r} \frac{x - \xi}{r} = \frac{\mu_o \cdot I}{4a\pi} \cdot \frac{(x - \xi) \cdot d\xi}{(x - \xi)^2 + y^2}.$$

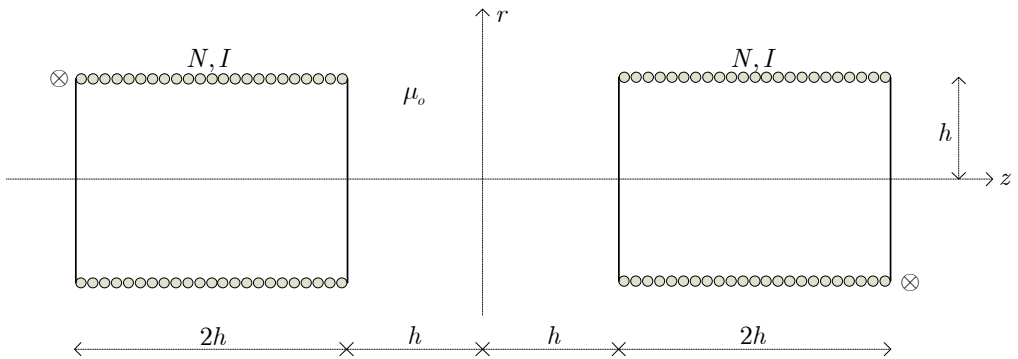
$$B_x = -\frac{\mu_o y \cdot I}{4a\pi} \int_{-a}^a \frac{d\xi}{(x - \xi)^2 + y^2} = \frac{\mu_o \cdot I}{4a\pi} \left(-\operatorname{arctg} \frac{x + a}{y} + \operatorname{arctg} \frac{x - a}{y} \right),$$

$$B_x(x, y) = -\frac{\mu_o \cdot I}{4a\pi} \operatorname{arctg} \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2}.$$

$$B_y = \frac{\mu_o \cdot I}{4a\pi} \int_{-a}^a \frac{(x - \xi) \cdot d\xi}{(x - \xi)^2 + y^2} = \frac{\mu_o \cdot I}{8a\pi} \ln \frac{(x + a)^2 + y^2}{(x - a)^2 + y^2}.$$

Примјер 3.7

Одредити интензитет вектора магнетске индукције дуж осе симетрије намотаја на слици. Намотаји су од густо мотане танке жице, [212].

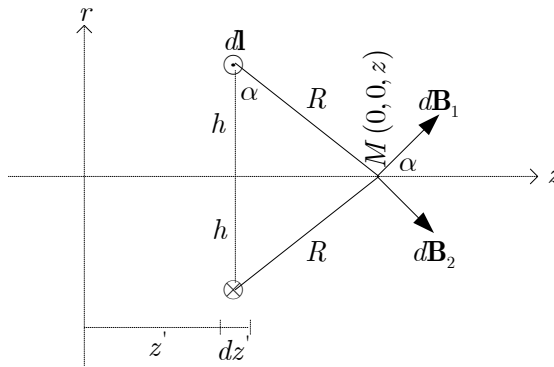


Слика 3.8

Рјешење:

Број намотаја по јединици дужине једног соленоида је $N' = \frac{dN}{dz} = \frac{N}{2h}$.

Посматрајмо елементарни дио десног соленоида који је облика прстена и који носи струју $N'Idz'$. Израчунајмо елементарни вектор магнетске индукције у произвољној тачки $M(0,0,z)$ који потиче од елементарног дијела прстена dl' .



Слика 4.11

Вектори dl и R су међусобно окомити.

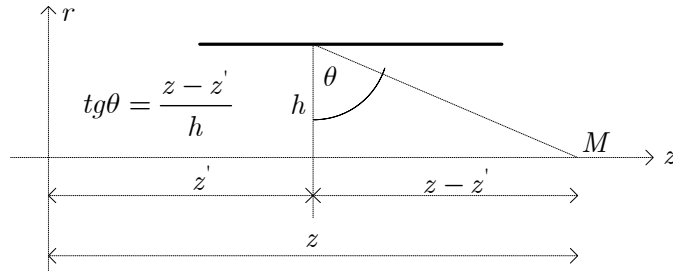
$$dB = \frac{\mu_o N' Idz'}{4\pi} \frac{dl}{R^2}, \quad dB_z = 2 \cdot dB \cdot \cos \alpha = 2 \cdot dB \frac{h}{R},$$

$$dB_z = \frac{\mu_o N' Idz'}{2\pi} \frac{h \cdot dl}{R^3} = \frac{\mu_o N' Ih}{2\pi} \frac{dz' dl}{\left(\sqrt{h^2 + (z - z')^2} \right)^3},$$

$$B_z = \frac{\mu_o N' I h}{2\pi} \int_h^{3h} \frac{dz'}{\left(\sqrt{h^2 + (z - z')^2}\right)^3} \int_0^{\pi h} dl - \frac{\mu_o N' I h}{2\pi} \int_{-3h}^{-h} \frac{dz'}{\left(\sqrt{h^2 + (z - z')^2}\right)^3} \int_0^{\pi h} dl,$$

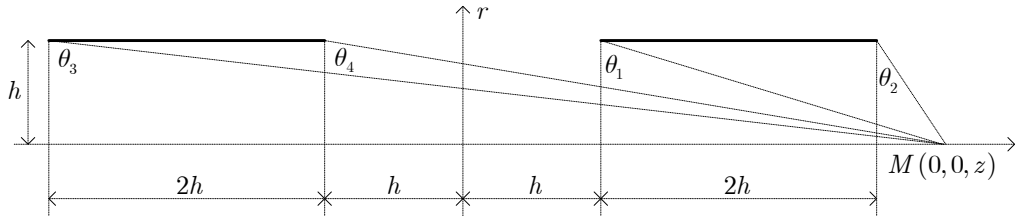
$$B_z = \frac{\mu_o N I h}{4} \left[\int_h^{3h} \frac{dz'}{\left(\sqrt{h^2 + (z - z')^2}\right)^3} - \int_{-3h}^{-h} \frac{dz'}{\left(\sqrt{h^2 + (z - z')^2}\right)^3} \right].$$

Користимо смјену: $\operatorname{tg} \theta = \frac{z - z'}{h}, \Rightarrow h \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = -dz'.$



$$h^2 + (z - z')^2 = h^2 \left[1 + \left(\frac{z - z'}{h} \right)^2 \right] = h^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \theta) = h^2 \left(1 + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \right) = h^2 \frac{1}{\cos^2 \theta},$$

$$\frac{dz'}{\left(\sqrt{h^2 + (z - z')^2}\right)^3} = \frac{-h d\theta}{\left(\sqrt{\frac{h^2}{\cos^2 \theta}}\right)^3 \cos^2 \theta} = -\frac{\cos \theta \cdot d\theta}{h^2}.$$



Слика 3.9

$$B_z(z) = \frac{\mu_o N I}{4h} \left(\int_{\theta_2}^{\theta_1} \cos \theta \cdot d\theta - \int_{\theta_4}^{\theta_3} \cos \theta \cdot d\theta \right) = \frac{\mu_o N I}{4h} (\sin \theta_1 - \sin \theta_2 - \sin \theta_3 + \sin \theta_4).$$

$$\sin \theta_1 = \frac{z-h}{\sqrt{h^2 + (z-h)^2}}, \quad \sin \theta_2 = \frac{z-3h}{\sqrt{h^2 + (z-3h)^2}},$$

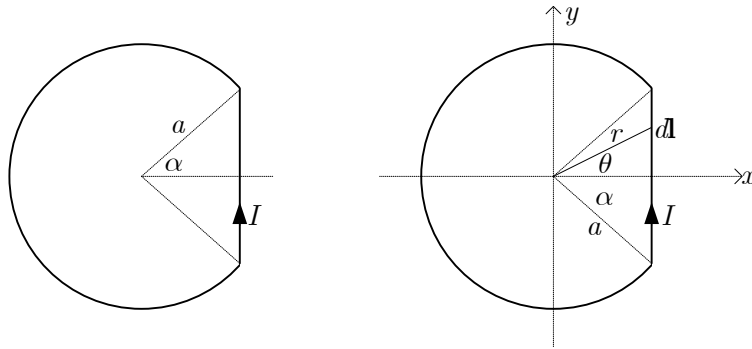
$$\sin \theta_3 = \frac{z+3h}{\sqrt{h^2 + (z+3h)^2}}, \quad \sin \theta_4 = \frac{z+h}{\sqrt{h^2 + (z+h)^2}}.$$

Коначно,

$$B_z(z) = \frac{\mu_o NI}{4h} \left(\frac{z-h}{\sqrt{h^2 + (z-h)^2}} - \frac{z-3h}{\sqrt{h^2 + (z-3h)^2}} - \frac{z+3h}{\sqrt{h^2 + (z+3h)^2}} + \frac{z+h}{\sqrt{h^2 + (z+h)^2}} \right).$$

Примјер 3.8

Дат је линијски проводник који слиједи дио кружнице полупречника a , осим на дијелу који одговара централном углу 2α , гдје је проводник праволинијски и иде дуж одговарајуће тетиве. Одредити вектор магнетске индукције у центру кружнице ако кроз проводник протиче временски константна струја интензитета I , [213].



Слика 3.10

Рјешење:

Користимо Био-Саваров закон и цилиндрични координатни систем:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_o I}{4\pi} \int_l \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}, \quad d\mathbf{l} = \hat{\mathbf{r}} \cdot dr + r d\theta \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} + 0 \cdot \hat{\mathbf{z}}, \quad \mathbf{r} = -r \cdot \hat{\mathbf{r}} + 0 \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} + 0 \cdot \hat{\mathbf{z}},$$

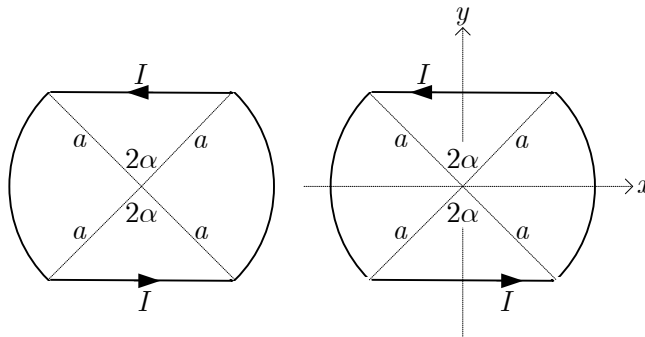
$$d\mathbf{l} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{r}} & \hat{\boldsymbol{\theta}} & \hat{\mathbf{z}} \\ dr & r d\theta & 0 \\ -r & 0 & 0 \end{vmatrix} = r^2 d\theta \cdot \hat{\mathbf{z}}, \quad \mathbf{B} = \left(\frac{\mu_o I}{4\pi} \int_{\theta} \frac{r^2 d\theta}{r^3(\theta)} \right) \hat{\mathbf{z}} = \left(\frac{\mu_o I}{4\pi} \int_{\theta} \frac{d\theta}{r(\theta)} \right) \hat{\mathbf{z}},$$

$$r(\theta) = \begin{cases} \frac{a \cdot \cos \alpha}{\cos \theta}, & 0 \leq \theta \leq \alpha \\ a, & \alpha \leq \theta \leq 2\pi - \alpha \\ \frac{a \cdot \cos \alpha}{\cos \theta}, & 2\pi - \alpha \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_o I}{4\pi a} \left(\int_0^{\alpha} \frac{\cos \theta}{\cos \alpha} d\theta + \int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} d\theta + \int_{2\pi-\alpha}^{2\pi} \frac{\cos \theta}{\cos \alpha} d\theta \right) \hat{\mathbf{z}} = \frac{\mu_o I}{4\pi a} (tg\alpha + \pi - \alpha) \hat{\mathbf{z}}.$$

Примјер 3.9

Дат је линијски проводник као на слици. Одредити вектор магнетске индукције у центру кружнице ако кроз проводник протиче временски константна струја интензитета I . Полупречник кружнице је a , а угао који одговара паралелним тетивама тетивама је 2α , [214].



Слика 3.11

Рјешење:

Користимо Био-Саваров закон и цилиндрични координатни систем:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_o I}{4\pi} \int_l \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}, \quad d\mathbf{l} = \hat{\mathbf{r}} \cdot dr + r d\theta \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} + 0 \cdot \hat{\mathbf{z}}, \quad \mathbf{r} = -r \cdot \hat{\mathbf{r}} + 0 \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} + 0 \cdot \hat{\mathbf{z}},$$

$$d\mathbf{l} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{r}} & \hat{\boldsymbol{\theta}} & \hat{\mathbf{z}} \\ dr & r d\theta & 0 \\ -r & 0 & 0 \end{vmatrix} = r^2 d\theta \cdot \hat{\mathbf{z}}, \quad \mathbf{B} = \left(\frac{\mu_o I}{4\pi} \int_{\theta} \frac{r^2 d\theta}{r^3(\theta)} \right) \hat{\mathbf{z}} = \left(\frac{\mu_o I}{4\pi} \int_{\theta} \frac{d\theta}{r(\theta)} \right) \hat{\mathbf{z}},$$

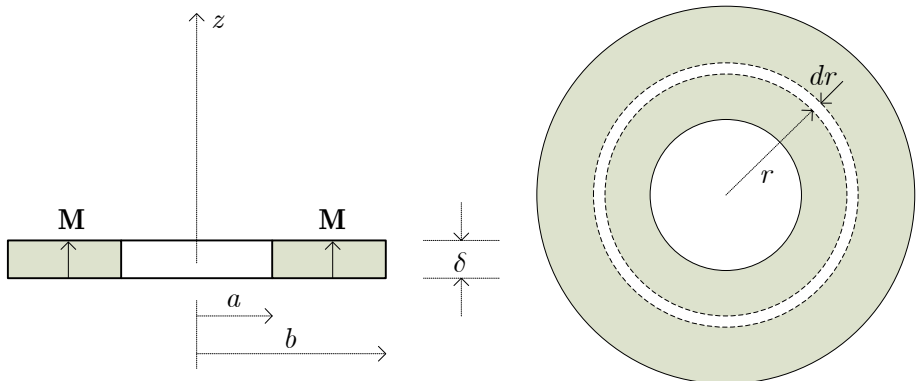
$$r(\theta) = \begin{cases} a, & -(\pi/2 - \alpha) \leq \theta \leq (\pi/2 - \alpha) \\ a \cdot \cos \alpha / \sin \theta, & (\pi/2 - \alpha) \leq \theta \leq (\pi/2 + \alpha) \\ a, & (\pi/2 + \alpha) \leq \theta \leq (3\pi/2 - \alpha) \\ -a \cdot \cos \alpha / \sin \theta, & (3\pi/2 - \alpha) \leq \theta \leq (3\pi/2 + \alpha) \end{cases}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_o I}{4\pi a} \left(\int_{-(\frac{\pi}{2}-\alpha)}^{\frac{\pi}{2}-\alpha} d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}+\alpha} \frac{\sin \theta}{\cos \alpha} d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}+\alpha}^{\frac{3\pi}{2}-\alpha} d\theta - \int_{\frac{3\pi}{2}-\alpha}^{\frac{3\pi}{2}+\alpha} \frac{\sin \theta}{\cos \alpha} d\theta \right) \hat{\mathbf{z}},$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_o I}{4\pi a} (4\alpha + 2\pi - 4\alpha) \hat{\mathbf{z}}.$$

Примјер 3.10

У врло танком шупљем диску од феромагнетског материјала постоји заостала магнетизација. Вектор магнетизације у диску је $\mathbf{M} = M_o (\ln b/r) \hat{\mathbf{z}}$, гдје је M_o константа. Диск се налази у вакууму. Одредити: (а) расподелу Амперових струја диска и (б) магнетску индукцију $\mathbf{B}$ на оси диска, [215].



Слика 3.12

Рјешење:

(а)

Густину запреминских Амперових струја одређујемо из релације $\mathbf{J}_A = \text{rot} \mathbf{M}$. Вектор магнетизације у нашем случају има само z -компоненту која се мијења са координатом r : $\mathbf{M} = M_z(r) \cdot \hat{\mathbf{z}}$.

$$\mathbf{J} = \text{rot} \mathbf{M} = \left(-\frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \hat{\theta} = -M_o \frac{r}{b} \left(-\frac{b}{r^2} \right) \hat{\theta} = \frac{M_o}{r} \hat{\theta}.$$

Густину површинских Амперових струја одређујемо из векторског производа: $\mathbf{J}_{SA} = \mathbf{M} \times \mathbf{n}$.

На унутрашњој површини, $r = a$: $\mathbf{J}_{SA} = -M_o \ln \frac{b}{a} \hat{\theta}$.

На вањској површини, $r = b$: $M = M_o \ln 1 = 0$.

На осталим површинама $\mathbf{M} \times \mathbf{n} = 0$.

Плашт површинских Амперових струја представља контуру полупречника a са јачином струје: $I_{A1} = J_{SA} \delta = -M_o \delta \ln \left(\frac{b}{a} \right)$.

(б)

Од запреминских Амперових струја у тачкама на z -оси је:

$$dB = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{\mathbf{J} \cdot dV' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{R^3}, \Rightarrow$$

$$dB_z = dB \cdot \cos \alpha = \frac{\mu_o J_A \cdot (r \cdot dr \cdot d\theta \cdot \delta) \cdot R \cdot r}{4\pi R^3} = \frac{\mu_o M_o \delta \cdot r \cdot dr}{2R^3}. \quad (*)$$

Од површинских Амперових струја:

$$dB = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I \cdot dl' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{R^3}, \Rightarrow$$

$$dB_z = dB \cdot \cos \alpha = \frac{\mu_o a^2 \cdot I_{A1} \cdot d\theta}{4\pi R^3} = \frac{-\mu_o a^2 \cdot \left(M_o \ln \frac{b}{a} \right) \cdot d\theta}{4\pi R^3}. \quad (**)$$

Након интеграције израза (*) и (**) добијамо:

$$B_z = \frac{\mu_o M_o \delta}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{b^2 + z^2}} - \frac{a^2 \ln \frac{b}{a}}{\left(\sqrt{a^2 + z^2}\right)^3} \right).$$

Примјер 3.11

Танка квадратна плочица од феромагнетског материјала, хомогено је намагнетисана по својој запремини тако да је $\mathbf{M} = M_o \hat{\mathbf{z}}$, гдје је M_o константа. Околна средина је немагнетска. Одредити магнетску индукцију $\mathbf{B}$ на оси плочице, [216].

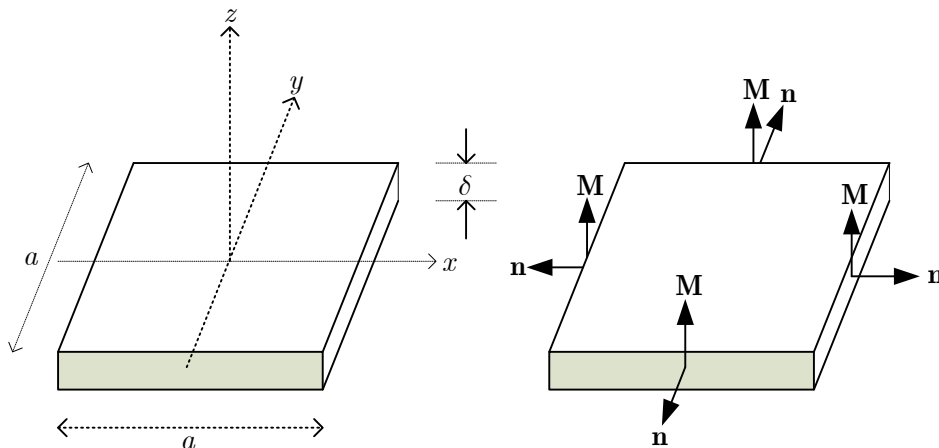
Рјешење:

$$\mathbf{J}_A = \text{rot} \mathbf{M} = \left(\frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{z}},$$

$$\mathbf{J}_A = \text{rot} \mathbf{M} = \frac{\partial M_z}{\partial y} \hat{\mathbf{x}} - \frac{\partial M_z}{\partial x} \hat{\mathbf{y}} = 0.$$

Нема запреминских Амперових струја.

На горњој и доњој површини плочице, такође, нема површинских Амперових струја (вектори магнетизације и нормале су колинеарни).



Слика 3.13

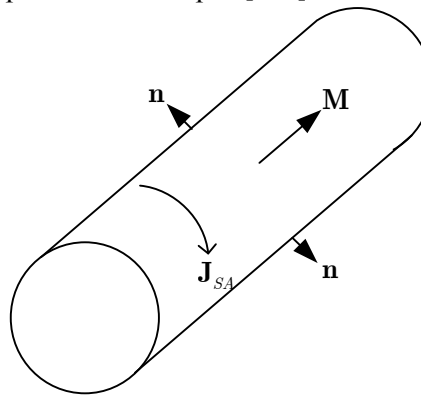
По бочним површинама плочице постоји површинска Амперова струја густине M_o , односно интензитета $I_{SA} = M_o \delta$.

На z -оси вектор магнетске индукције имаће само z -компоненту. За резултат се добија:

$$B_z = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 a^2 M_o \delta}{\pi(4z^2 + a^2)\sqrt{2z^2 + a^2}}.$$

Примјер 3.12

Врло дугачак цилиндар од феромагнетског материјала кружног попречног пресека полупречника a , хомогено је намагнетисан по својој запремини тако да је вектор магнетизације $\mathbf{M}$ паралелан оси цилиндра. Цилиндар се налази у вакууму. (а) Одредити расподјелу Амперових струја цилиндра, (б) Колики је вектор магнетске индукције у средини цилиндра? [217].



Слика 3.14

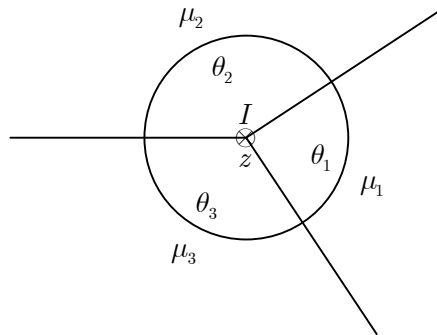
Рјешење:

По запремини цилиндра нема Амперових струја пошто је магнетик хомоген, без кондукционих струја. На базисима цилиндра, због колинеарности вектора магнетизације и нормале, такође нема површинских Амперових струја. На омотачу цилиндра постоји површинска густина Амперових струја $\mathbf{J}_{SA} = \mathbf{M} \times \mathbf{n}$.

У оси цилиндра магнетска индукција је: $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{M}$.

Примјер 3.13

Кроз праволинијски проводник, који је усмјерен у правцу z -осе, протиче једносмјерна струја I , при чему је z -оса заједничка ивица три полуравни које образују углове θ_1 , θ_2 и θ_3 (збир углова 2π). Ако је простор између овако постављених полуравни испуњен хомогеним материјалом магнетских пермеабилности μ_1 , μ_2 и μ_3 одредити јачине магнетских поља $\mathbf{H}$ у сва три ова простора, [220].



Слика 3.15

Рјешење:

$$\oint_c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I, \quad \oint_c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{c_1} H_1 \cdot dl + \int_{c_2} H_2 \cdot dl + \int_{c_3} H_3 \cdot dl = I, \Rightarrow$$

$$H_1 r \theta_1 + H_2 r \theta_2 + H_3 r \theta_3 = I, \Rightarrow H_1 \cdot \theta_1 + H_2 \cdot \theta_2 + H_3 \cdot \theta_3 = \frac{I}{r}.$$

Гранични услов: $B_{1n} = B_{2n} = B_{3n}$.

$$\mu_1 H_1 = \mu_2 H_2 \Rightarrow H_2 = \frac{\mu_1}{\mu_2} H_1, \quad \mu_2 H_2 = \mu_3 H_3 \Rightarrow H_3 = \frac{\mu_1}{\mu_3} H_1,$$

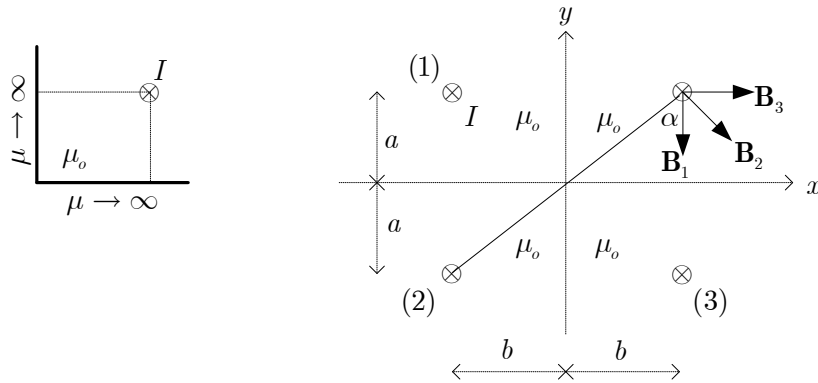
$$H_1 \cdot \theta_1 + H_1 \cdot \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \theta_2 + H_1 \cdot \frac{\mu_1}{\mu_3} \cdot \theta_3 = \frac{I}{r}, \Rightarrow$$

$$H_1 = \frac{I \mu_1 \mu_2 \mu_3}{\mu_1 r (\theta_1 \mu_2 \mu_3 + \theta_2 \mu_1 \mu_3 + \theta_3 \mu_1 \mu_2)},$$

$$H_i = \frac{I \cdot \mu_1 \mu_2 \mu_3}{\mu_i \cdot r \cdot (\theta_1 \mu_2 \mu_3 + \theta_2 \mu_1 \mu_3 + \theta_3 \mu_1 \mu_2)}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Примјер 3.14

Неограничен прав линијски проводник, протичан временски сталном струјом I , постављен је паралелно ивицама савршеног неограниченог дугог феромагнетског профила. Одредити електромагнетску силу по јединици дужине која дјелује на проводник, [218].



Слика 3.16

Рјешење:

Користимо теорему лика у равном огледалу. На мјесту проводника вектор магнетске индукције одређујемо из:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3 = B_x \hat{\mathbf{x}} + B_y \hat{\mathbf{y}}.$$

$$B_x = B_3 + B_2 \cos \alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi 2a} + \frac{\mu_0 I}{2\pi \sqrt{4a^2 + 4b^2}} \frac{2a}{\sqrt{4a^2 + 4b^2}},$$

$$B_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \cdot \frac{2a^2 + b^2}{a^2 + b^2}.$$

$$B_y = -B_1 - B_2 \sin \alpha = -\frac{\mu_0 I}{4\pi b} \cdot \frac{a^2 + 2b^2}{a^2 + b^2},$$

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi (a^2 + b^2)} \sqrt{\frac{1}{ab} (2a^2 + b^2)(a^2 + 2b^2)}.$$

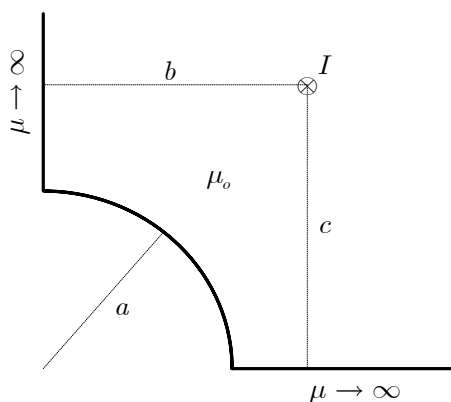
Интензитет електромагнетске силе по јединици дужине проводника износи:

$$F' = I \cdot B = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi (a^2 + b^2)} \sqrt{\frac{1}{ab} (2a^2 + b^2)(a^2 + 2b^2)},$$

Ако су a и b једнаки, тада је: $F' = \frac{3\mu_0 I^2}{8\pi \cdot a}.$

Примјер 3.15

Неограничени прав проводник кроз који протиче струја I постављен је као на слици. Одредити положај ликова у овом систему и компоненте вектора $\mathbf{B}$ у произвољној тачки M , [219].



Слика 3.17

Рјешење:

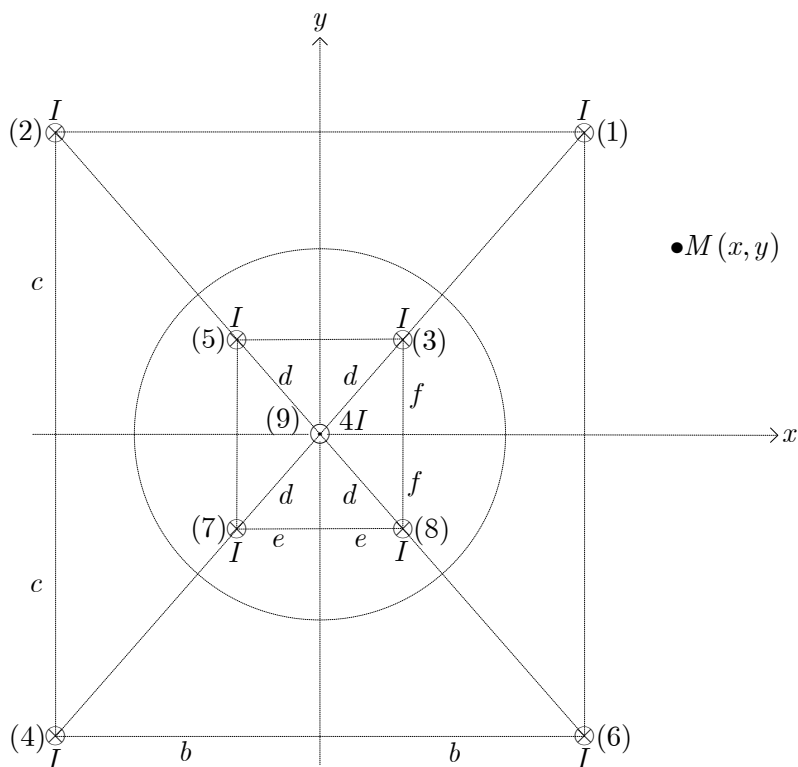
Користећи теорему lika у равном и цилиндричном огледалу добијамо распоред извора поља као на слици.

$$d = \frac{a^2}{\sqrt{b^2 + c^2}}, \quad e = \frac{a^2 b}{b^2 + c^2}, \quad f = \frac{a^2 c}{b^2 + c^2},$$

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) &= (b, c), \quad (x_2, y_2) = (-b, c), \quad (x_4, y_4) = (-b, -c), \quad (x_6, y_6) = (b, -c), \\ (x_3, y_3) &= (e, f), \quad (x_5, y_5) = (-e, f), \quad (x_7, y_7) = (-e, -f), \quad (x_8, y_8) = (e, -f), \\ (x_9, y_9) &= (0, 0), \end{aligned}$$

$$A = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\sum_{i=1}^8 \ln r_{iM} - 4 \ln r_{9M} \right),$$

$$B_x = \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\sum_{i=1}^8 \frac{y - y_i}{r_{iM}^2} - 4 \frac{y}{r_{9M}^2} \right),$$



Слика 3.18

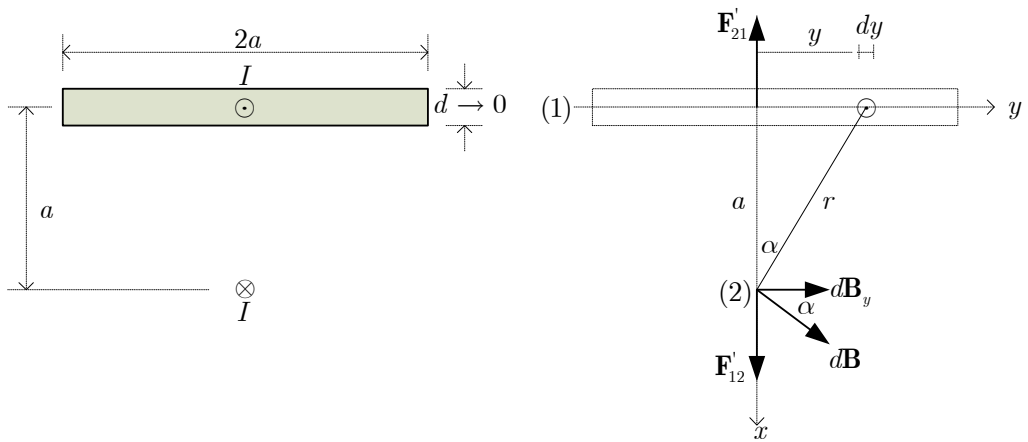
$$B_y = -\frac{\partial A}{\partial x} = -\frac{\mu_o I}{2\pi} \left(\sum_{i=1}^8 \frac{x - x_i}{r_{iM}^2} - 4 \frac{x}{r_{9M}^2} \right).$$

Примјер 3.16

На слици је приказан попречни пресјек веома дугачког вода чији је један проводник танка жица а други танка трака. Ако је јачина стационарне струје вода I одредити вектор подужне силе која дјелује на тракасти проводник, [221].

Рјешење:

По закону акције и реакције вриједи: $\mathbf{F}'_{12} = -\mathbf{F}'_{21}$. Зато ћемо рачунати силу на жичани проводник. Очигледно је да трака на мјесту жичаног проводника има само y -компоненту, јер се x -компоненте због симетрије међусобно поништавају.



Слика 3.19

$$dB = \frac{\mu_o dI}{2\pi r},$$

$$dB_y = dB \cos \alpha = \frac{\mu_o dI}{2\pi r} \frac{a}{r} = \frac{\mu_o}{2\pi r} \frac{Idy}{r} \frac{a}{r} = \frac{\mu_o Idy}{4\pi r^2}, \quad r = \sqrt{a^2 + y^2},$$

$$B_y = \frac{\mu_o I}{4\pi} \int_{-a}^a \frac{dy}{a^2 + y^2} = \frac{\mu_o I}{4\pi} \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{y}{a} \Big|_{-a}^{+a} = \frac{\mu_o I}{4a\pi} \frac{\pi}{2} = \frac{\mu_o I}{8a}.$$

Коначно, за силу добијамо:

$$\mathbf{F}'_{12} = \frac{\mu_o I^2}{8a} \hat{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{F}'_{21} = -\frac{\mu_o I^2}{8a} \hat{\mathbf{x}}.$$

Примјер 3.17

У врло дугачком проводнику облика половине кружног цилиндра полупречника b и дебљине δ постоји временски константна струја јачине I . Дуж осе цилиндра овог проводника, у вакууму, постављен је цилиндрични проводник полупречника a у коме постоји струја јачине I . Израчунати вектор подужне силе која дјелује на проводник полупречника a , ($a < b$), [222].

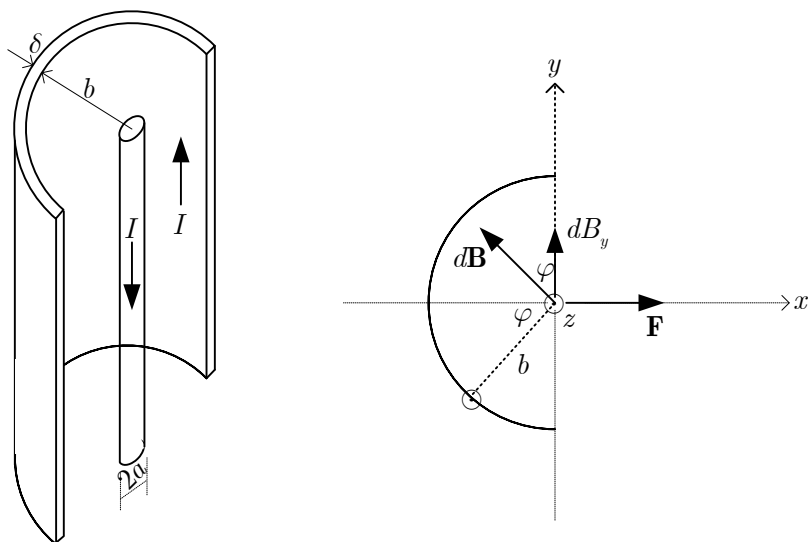
Рјешење:

Унутрашњи проводник можемо сматрати линијским. Силу на дио тог проводника дужине l , коме је придружен вектор $\mathbf{l}$ истог смјера као референтни смјер струје проводника, одређујемо из:

$$d\mathbf{F} = I \cdot (d\mathbf{l} \times \mathbf{B}), \Rightarrow \mathbf{F} = \mathbf{l} \times \mathbf{B}, \Rightarrow F' = I \cdot B.$$

$\mathbf{B}$ је вектор магнетске индукције проводника облика полуцилиндра на његовој оси. Струју полуцилиндра сматрамо површинском, $\delta \ll b$, са густином: $J_s = I/\pi b$.

$$dB = \frac{\mu_o (dI)}{2\pi b} = \frac{\mu_o (J_s dl)}{2\pi b} = \frac{\mu_o \left(\frac{I}{\pi b} dl \right)}{2\pi b} = \frac{\mu_o I (dl)}{2\pi^2 b^2} = \frac{\mu_o I (b d\varphi)}{2\pi^2 b^2} = \frac{\mu_o I (d\varphi)}{2\pi^2 b}.$$



Слика 3.20

Због симетрије резултантна магнетска индукција има само у-компоненту:

$$B_y = \int_l dB_y = \int_l dB \cos \varphi = \frac{\mu_o I}{2\pi^2 b} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi \cdot d\varphi = \frac{\mu_o I}{\pi^2 b}.$$

Подужна сила ће бити: $\mathbf{F}' = \frac{\mu_o I^2}{\pi^2 b} \hat{\mathbf{x}}$. (Правило “лијеве руке”!)

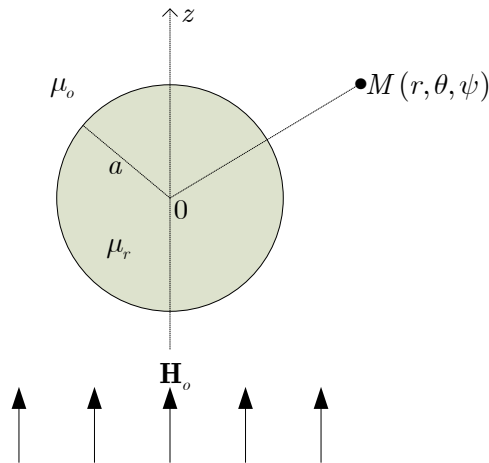
Примјер 3.18*

Анализирати поље унутар и ван кугле од хомогеног и линеарног магнетика, полупречника a , релативне пермеабилности μ_r , у страном хомогеном магнетском пољу $\mathbf{H}_o$ у вакууму, [223].

Рјешење:

Пошто је магнетик хомоген и линеаран однос између поља вектора $\mathbf{H}$ и $\mathbf{B}$ је линеаран. Читав простор је без кондукционих струја па се и за унутрашњу i и вањску e област може користити Лапласова једначина за магнетски скалар-потенцијал $\Delta\varphi_m = 0$. Проблему одговара сферни координатни систем са z -осом у правцу хомогеног поља $\mathbf{H}_o$:

$$\Delta\varphi_i = 0, \quad \Delta\varphi_e = 0, \quad (1)$$



Слика 3.21

$$\varphi_e = \varphi_i, \quad \mu_r \frac{\partial \varphi_i}{\partial r} = \frac{\partial \varphi_e}{\partial r}, \quad \text{за } r = a. \quad (2)$$

Рјешења Лапласове једначине за унутрашњу и вањску област су:

$$\varphi_i = -\frac{3H_o}{\mu_r + 2} \cdot r \cdot \cos \theta, \quad \varphi_e = -H_o \cdot r \cdot \cos \theta + \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2} \cdot \frac{a^3}{r^2} \cdot H_o \cdot \cos \theta. \quad (3)$$

Одговарајући изрази за поља $\mathbf{H}_i$ и $\mathbf{H}_e$ добијају се из:

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= -\text{grad}\varphi_m = -\frac{\partial\varphi_m}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} - \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_m}{\partial\theta}\hat{\theta} - \frac{1}{r\cdot\sin\theta}\frac{\partial\varphi_m}{\partial\psi}\hat{\psi}, \\ H_i &= \frac{3H_o}{\mu_r + 2}(\cos\theta\cdot\hat{\mathbf{r}} - \sin\theta\cdot\hat{\theta}), \\ H_e &= H_o\left(\cos\theta + 2\frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2}\cdot\frac{a^3}{r^3}\cos\theta\right)\cdot\hat{\mathbf{r}} + H_o\left(-\sin\theta + \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2}\cdot\frac{a^3}{r^3}\sin\theta\right)\hat{\theta}\end{aligned}\quad (4)$$

Преласком у Декартов координатни систем добијамо:

$$\begin{aligned}H_x^i &= 0, \quad H_y^i = 0, \quad H_z^i = \frac{3}{\mu_r + 2}\cdot H_o, \\ H_x^e &= 3\frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2}\cdot\frac{a^3H_o\cdot x\cdot z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}, \quad H_y^e = 3\frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2}\cdot\frac{a^3H_o\cdot y\cdot z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}, \\ H_z^e &= H_o + 3\frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2}\cdot\frac{a^3H_o z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2}\cdot\frac{a^3H_o}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.\end{aligned}\quad (6)$$

Магнетске индукције добијамо множењем са одговарајућим пермеабилностима. Изрази за потенцијал идентични су онима које смо извели за случај диелектричне кугле у хомогеном електричном пољу. Овдје ће поље $\mathbf{H}$ имати исту структуру као поље $\mathbf{E}$, а поље $\mathbf{B}$ одговара пољу $\mathbf{D}$.

Примијетимо да је поље унутар кугле хомогено у правцу поља $\mathbf{H}_o$. У вањској области поље $\mathbf{H}$ једнако је збиру хомогеног поља $\mathbf{H}_o$ и поља магнетског дипола у центар кугле.

У случају кугле од нелинеарног магнетског материјала, али хомогеног и изотропног, у унутрашњости кугле индукција више није једнака $\mathbf{B}_i = \mu\mathbf{H}_i$, већ је одређујемо из $\mathbf{B}_i = \mu_o(\mathbf{H}_i + \mathbf{M})$.

Анализирајмо поље у простору заузетом куглом, односно поље $\mathbf{H}_i$. Полазећи од израза (5), узимајући у обзир однос $\mathbf{M} = (\mu_r - 1)\cdot\mathbf{H}_i$, те елиминишући из њих пермеабилност μ_r добија се:

$$\mathbf{H}_i = \mathbf{H}_o - \frac{\mathbf{M}}{3}, \quad \mathbf{B}_i = \mu_o (\mathbf{H}_i + \mathbf{M}) = \mu_o \left(\mathbf{H}_o + \frac{2\mathbf{M}}{3} \right). \quad (7)$$

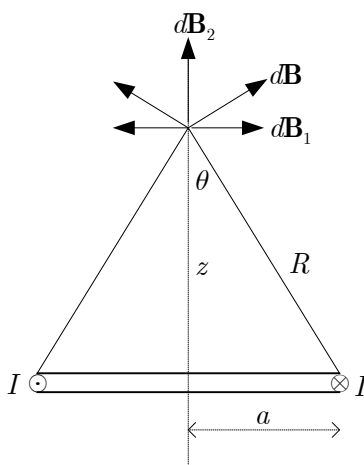
Присуство магнетика слаби јачину спољашњег поља $\mathbf{H}_o$ у простору који заузима магнетик а појачава магнетску индукцију.

Примјер 3.19*

Анализирати поље у околини танког кружног завојка полупречника a . Полупречник пресека жице је много мањи од a тако да се проводник може сматрати танким.

Рјешење:

Постављени задатак упростимо тако што ћемо најприје наћи поље у тачкама које леже на средишњој оси кружног завојка, слика 4.28. Помоћу Био-Саваровог закона за линијску струју (4.3.4), од струјног елемента $I \cdot dl$, на растојању z од равни завојка dB ће бити:



Слика 3.22

$$dB = \frac{\mu_o I}{4\pi} \cdot \frac{dl}{R^2}.$$

Са слике 3.22 је очигледно да постоји само z -компонента поља:

$$B = \oint_C dB_2 = \oint_C \sin \theta \cdot dB = \frac{\mu_o I}{4\pi R^2} \sin \theta \int_0^{2\pi} a d\theta,$$

$$B = \frac{\mu_o I a^2}{2R^3} = \frac{\mu_o I}{2} \cdot \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Када тачку у којој рачунамо индукцију изаберемо ван осе завојка, знатно се усложњава постављени задатак. По правилу се тада индукција налази из претходно нађеног магнетског вектор-потенцијала.

Посматрајмо тачку M у цилиндричном координатном систему при чему се оса z поклапа са осом завојка. Израз за магнетски вектор-потенцијал одређен је изразом (4.2.9):

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_o I}{4\pi} \oint_C \frac{d\mathbf{l}'}{R}.$$

Због симетрије у односу на z -осу, линије векторског потенцијала су кругови, који леже у равнима паралелним равни завојка, а средишта су им на z -оси. Зато вектор $\mathbf{A}$ има само једну компоненту A_θ која зависи од координата r и z , слика 4.29 а).

Пошто вектор $\mathbf{A}$ не зависи од координате θ координатни систем поставимо тако да тачка M лежи у xOz равни, односно да има координате $(r, 0, z)$.

Ако са dl_θ обиљежимо пројекцију елемента $d\mathbf{l}'$ на правац орта $\hat{\theta}$ у тачки M , према ознакама на слици 4.29 с), важиће:

$$\begin{aligned} dl_\theta &= \cos \theta \cdot dl = a \cdot \cos \theta \cdot d\theta, \\ R_o &= \sqrt{r^2 + z^2}, \quad b^2 = a^2 + r^2 - 2ra \cos \theta, \\ R^2 &= z^2 + b^2 = z^2 + a^2 + r^2 - 2ra \cos \theta. \end{aligned}$$

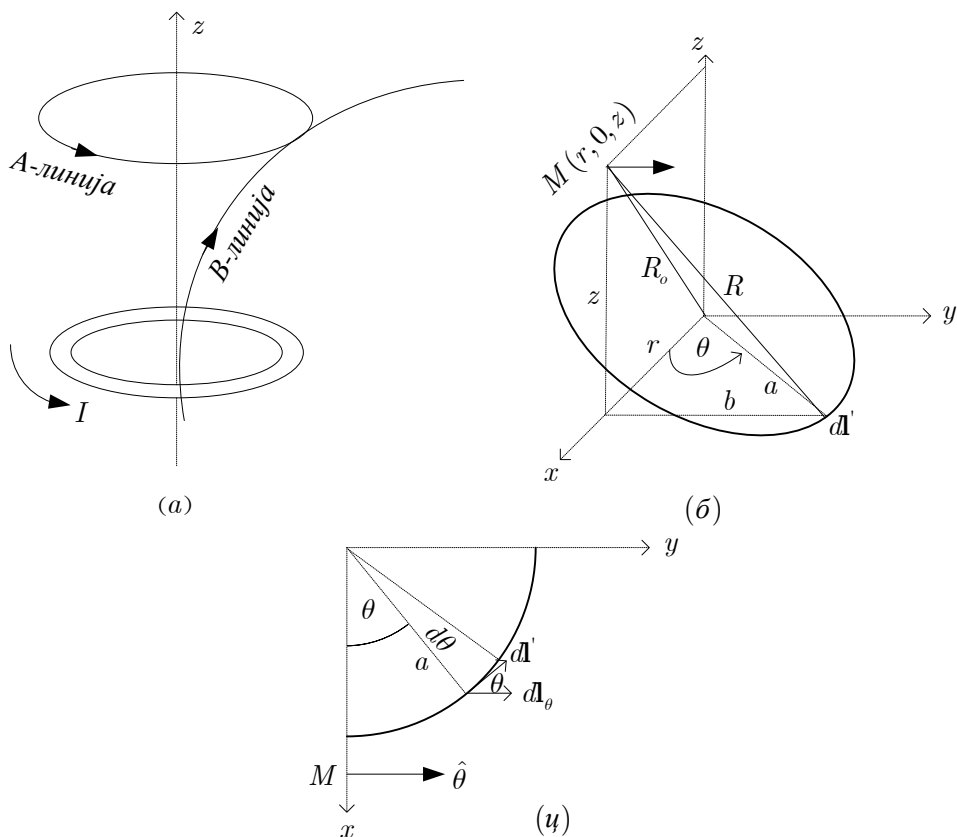
Узимањем симетрије у односу на раван xOz добијамо:

$$A = A_\theta = \frac{\mu_o I}{4\pi} 2 \cdot \int_0^\pi \frac{a \cdot \cos \theta \cdot d\theta}{\sqrt{z^2 + a^2 + r^2 - 2ar \cdot \cos \theta}}.$$

Уведимо смјену $\theta = \pi - 2\beta$, уз следеће елементарне трансформације:

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \cos(\pi - 2\beta) = \cos \pi \cdot \cos 2\beta + \sin \pi \cdot \sin 2\beta = \\ &= -\cos 2\beta = 2 \cdot \sin^2 \beta - 1, \\ d\theta &= -2 \cdot d\beta, \quad \theta \in [0, \pi] \Rightarrow \beta \in [\pi/2, 0], \end{aligned}$$

$$z^2 + a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta = z^2 + a^2 + r^2 - 2ar \cdot (2 \sin^2 \beta - 1) = \\ = z^2 + (a + r)^2 - 4ar \sin^2 \beta,$$



Слика 3.23

интеграл у последњем изразу поприма облик:

$$A = A_\theta = \frac{\mu_o I a}{\pi} \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{(2 \cdot \sin^2 \beta - 1) \cdot d\beta}{\sqrt{z^2 + (a + r)^2 - 4ar \cdot \sin^2 \beta}}. \quad (1)$$

Уведимо ознаку: $k^2 = \frac{4ar}{(a + r)^2 + z^2}$.

Број k се мијења у границама $0 \leq k \leq 1$. Вриједност $k = 1$ добија се за $z = 0$ и $r = a$, тј. за тачке на струјној контури. Направимо следеће трансформације:

$$\begin{aligned}(a+r)^2 + z^2 - 4ar \sin^2 \beta &= [(a+r)^2 + z^2] - k^2 [(a+r)^2 + z^2] \cdot \sin^2 \beta = \\ &= [(a+r)^2 + z^2] \cdot (1 - k^2 \sin^2 \beta) = \frac{4ar}{k^2} \cdot (1 - k^2 \sin^2 \beta).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{k \cdot (2 \sin^2 \beta - 1)}{\sqrt{4ar(1 - k^2 \sin^2 \beta)}} &= \frac{k}{2\sqrt{ar}} \cdot \frac{2 \sin^2 \beta - 1}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \beta)}} = \frac{k}{2\sqrt{ar}} \cdot \frac{2k^2 \sin^2 \beta - k^2}{k^2 \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}} = \\ &= \frac{k}{2\sqrt{ar}} \cdot \frac{2k^2 \sin^2 \beta - k^2 - 2 + 2}{k^2 \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}} = \frac{1}{2k\sqrt{ar}} \cdot \frac{(2 - k^2) - 2(1 - k^2 \sin^2 \beta)}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}} = \\ &= \frac{1}{2k\sqrt{ar}} \cdot \left(\frac{2 - k^2}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}} - 2\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta} \right).\end{aligned}$$

Након ове трансформације израз (1) поприма облик:

$$\begin{aligned}A_\theta &= \frac{\mu_o I}{2\pi k} \sqrt{\frac{a}{r}} \cdot \left[(2 - k^2) \int_0^{\pi/2} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}} - 2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta} d\beta \right] \\ A_\theta &= \frac{\mu_o I}{2\pi k} \sqrt{\frac{a}{r}} \cdot [(2 - k^2) \cdot K - 2 \cdot E],\end{aligned}$$

гдје смо са K и E означили **потпуне елиптичке интеграле прве и друге врсте**, респективно:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}}, \quad E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta} d\beta.$$

Величина k назива се параметар елиптичких интеграла. Ове интеграле већином рачунамо нумерички, пошто се они могу развити у ред по параметру k :

$$\begin{aligned}K(k) &= \frac{\pi}{2} \cdot \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 k^6 + \dots \right] \\ E(k) &= \frac{\pi}{2} \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{k^2}{1} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{k^4}{3} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \frac{k^6}{5} - \dots \right]\end{aligned}$$

Компоненте магнетске индукције у цилиндричном координантном систему (r, θ, z) су:

$$B_r = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} = -\frac{\partial A_\theta}{\partial z}, \quad B_\theta = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} = 0,$$

$$B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta).$$

Узимајући у обзир да су:

$$\frac{\partial K}{\partial k} = \frac{E}{k(1-k^2)} - \frac{K}{k},$$

$$\frac{\partial E}{\partial k} = \frac{E}{k} - \frac{K}{k}, \quad \frac{\partial k}{\partial r} = -\frac{zk^3}{4ar},$$

$$\frac{\partial k}{\partial z} = \frac{k}{2r} - \frac{k^3}{4} \cdot \frac{a+r}{ar},$$

за компоненте магнетске индукције добијамо:

$$B_r = \frac{\mu_o I k z}{4\pi r \sqrt{ar}} \left(\frac{a^2 + r^2 + z^2}{(a-r)^2 + z^2} E - K \right).$$

$$B_\theta = 0,$$

$$B_z = \frac{\mu_o I k}{4\pi \sqrt{ar}} \left(\frac{a^2 - r^2 - z^2}{(a-r)^2 + z^2} E + K \right).$$

За тачке које леже у равни завојка, $z = 0$, компоненте поља добијају следеће вриједности:

$$B_r = 0,$$

$$B_\theta = 0,$$

$$B_z = \frac{\mu_o I}{2\pi(a+r)}(E + K).$$

*