

1. ЕЛЕКТРОСТАТИЧКО ПОЉЕ

Примјер 1.1

Израчунати силу **на** тачкасто наелектрисање $Q_1 = 20 \mu\text{C}$ од тачкастог наелектрисања $Q_2 = -300 \mu\text{C}$ ако су координате тачака 1 и 2 одређене са $(2, -1, 0)$ m и $(0, 0, 2)$ m, [135].

Рјешење:

$$\mathbf{R}_{21} = (x_1 - x_2)\hat{\mathbf{x}} + (y_1 - y_2)\hat{\mathbf{y}} + (z_1 - z_2)\hat{\mathbf{z}} = 2\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}} - 2\hat{\mathbf{z}},$$

$$R_{21} = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3$$

$$\hat{\mathbf{R}}_{21} = \frac{1}{3}(2\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}} - 2\hat{\mathbf{z}}),$$

$$\mathbf{F}_{\text{извор, наелектрисање на које се рачуна сила}} = \mathbf{F}_{21} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{\mathbf{R}}_{21}.$$

$$\mathbf{F}_{21} = -6 \frac{2\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}} - 2\hat{\mathbf{z}}}{3} = (-4x + 2y + 4z) \text{ N}.$$

Примјер 1.2

Дат је систем од четири тачкаста наелектрисања постављена у тачкама чије су координате: $Q_1(x_1, 2, 2)$, $Q_2(7, -1, 1)$, $Q_3(-3, -2, -1)$ и $Q_4(2, 3, 4)$. Одредити непознату координату x_1 и однос између количина наелектрисања ако је познато да је електростатичка сила која дјелује на наелектрисање Q_4 једнака нули, [132].

Рјешење:

Из услова $\mathbf{F}_4 = 0$ слиједи:

$$\mathbf{F}_4 = \mathbf{F}_{14} + \mathbf{F}_{24} + \mathbf{F}_{34} = \frac{Q_1 Q_4}{4\pi\epsilon_o} \cdot \frac{\hat{\mathbf{r}}_{14}}{r_{14}^2} + \frac{Q_2 Q_4}{4\pi\epsilon_o} \cdot \frac{\hat{\mathbf{r}}_{24}}{r_{24}^2} + \frac{Q_3 Q_4}{4\pi\epsilon_o} \cdot \frac{\hat{\mathbf{r}}_{34}}{r_{34}^2},$$

$$\mathbf{F}_4 = \frac{Q_4}{4\pi\epsilon_o} \left[Q_1 \cdot \frac{\hat{\mathbf{r}}_{14}}{r_{14}^2} + Q_2 \cdot \frac{\hat{\mathbf{r}}_{24}}{r_{24}^2} + Q_3 \cdot \frac{\hat{\mathbf{r}}_{34}}{r_{34}^2} \right]$$

$$\frac{\hat{\mathbf{r}}_{14}}{r_{14}^2} = \frac{\mathbf{r}_{14}}{r_{14}^3} = \frac{(x_4 - x_1) \cdot \hat{\mathbf{x}} + (y_4 - y_1) \cdot \hat{\mathbf{y}} + (z_4 - z_1) \cdot \hat{\mathbf{y}}}{r_{14}^3}, \text{ итд.}$$

$$(x_4 - x_1) \frac{Q_1}{r_{14}^3} + (x_4 - x_2) \frac{Q_2}{r_{24}^3} + (x_4 - x_3) \frac{Q_3}{r_{34}^3} = 0, \text{ итд.}$$

Коначно, имамо хомоген систем:

$$\begin{bmatrix} \frac{x_4 - x_1}{r_{14}^3} & \frac{x_4 - x_2}{r_{24}^3} & \frac{x_4 - x_3}{r_{34}^3} \\ \frac{y_4 - y_1}{r_{14}^3} & \frac{y_4 - y_2}{r_{24}^3} & \frac{y_4 - y_3}{r_{34}^3} \\ \frac{z_4 - z_1}{r_{14}^3} & \frac{z_4 - z_2}{r_{24}^3} & \frac{z_4 - z_3}{r_{34}^3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = 0 \quad .$$

Систем ће имати осим тривијалних рјешења и друга рјешења, ако је:

$$\begin{bmatrix} (x_4 - x_1) & (x_4 - x_2) & (x_4 - x_3) \\ (y_4 - y_1) & (y_4 - y_2) & (y_4 - y_3) \\ (z_4 - z_1) & (z_4 - z_2) & (z_4 - z_3) \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 2 - x_1 & -5 & 5 \\ 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow x_1 = -8;$$

$$r_{14} = \sqrt{105}, \quad r_{24} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}, \quad r_{34} = \sqrt{75}.$$

Ранг матрице је 2, а број непознатих 3. Двије непознате изражавамо преко треће:

$$\frac{10}{\sqrt{105^3}} \frac{Q_1}{Q_3} - \frac{5}{\sqrt{50^3}} \frac{Q_2}{Q_3} = -\frac{5}{\sqrt{75^3}}, \quad \frac{1}{\sqrt{105^3}} \frac{Q_1}{Q_3} + \frac{4}{\sqrt{50^3}} \frac{Q_2}{Q_3} = -\frac{5}{\sqrt{75^3}},$$

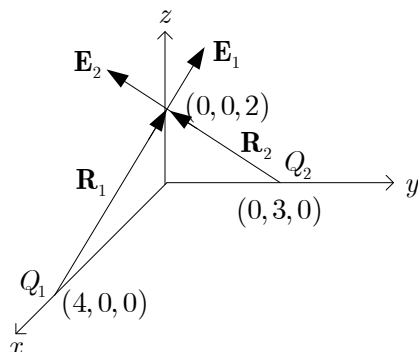
ОДНОСНО

$$\frac{Q_1}{Q_3} = -\frac{7}{5} \sqrt{\frac{7}{5}}, \quad \frac{Q_2}{Q_3} = -\frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \rightarrow \quad \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{21}{10} \sqrt{\frac{21}{10}}.$$

Примјер 1.3

Израчунати поље $\mathbf{E}$ у тачки простора са координатама $(0,0,2)$ од тачкастих наелектрисања $Q_1 = 0,5 \text{ } \mu\text{C}$ и $Q_2 = -0,75 \text{ } \mu\text{C}$ смјештених у тачкама са координатама $(4,0,0)$ и $(0,3,0)$, респективно, [136].

Рјешење:



Слика 1.1

$$\mathbf{R}_1 = (-4 \cdot \hat{\mathbf{x}} + 2 \cdot \hat{\mathbf{z}}), \quad R_1 = \sqrt{20},$$

$$\mathbf{R}_2 = (-3 \cdot \hat{\mathbf{x}} + 2 \cdot \hat{\mathbf{z}}), \quad R_2 = \sqrt{13}.$$

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{R_1^2} \frac{-4 \cdot \hat{\mathbf{x}} + 2 \cdot \hat{\mathbf{z}}}{R_1},$$

$$\mathbf{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{R_2^2} \frac{-3 \cdot \hat{\mathbf{x}} + 2 \cdot \hat{\mathbf{z}}}{R_2},$$

$$\mathbf{E}_1 = (-201,25 \cdot \hat{\mathbf{x}} + 100,62 \cdot \hat{\mathbf{z}}) \frac{\text{V}}{\text{m}},$$

$$\mathbf{E}_2 = (432,03 \cdot \hat{\mathbf{y}} - 288,02 \cdot \hat{\mathbf{z}}) \frac{\text{V}}{\text{m}},$$

$$\mathbf{E} = (-201,25 \cdot \hat{\mathbf{x}} + 432,03 \cdot \hat{\mathbf{y}} - 187,39 \cdot \hat{\mathbf{z}}) \frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

Примјер 1.4

Тачкасто оптерећење Q налази се у хомогеном електростатичком пољу $\mathbf{E}_0$. Одредити координате сингуларне тачке поља и функцију потенцијала, [131].

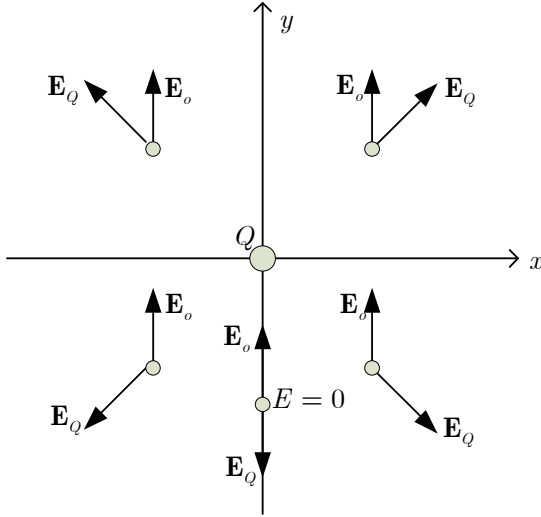
Рјешење:

Поставимо координатни систем тако да оптерећење Q буде у координатном почетку, а у-осу усмјеримо у правцу хомогеног поља. Проблем ће, тако, имати аксијалну симетрију.

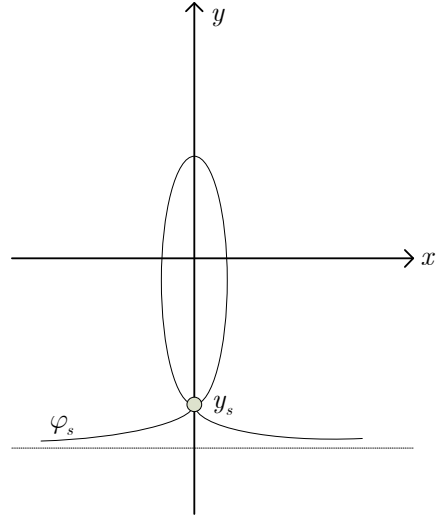
У сингуларној тачки све компоненте поља једнаке су нули.

Са приказане скице је очигледно да поље може имати вриједност нула једино на негативном дијелу у-осе. Потенцијал у некој тачки $M(x, y)$ дат је изразом:

$$\varphi(x, y) = -E_o \cdot y + \frac{Q}{4\pi\epsilon_o \sqrt{x^2 + y^2}}.$$



Слика 1.2



Слика 1.3

Потенцијал и поље у тачкама у-осе су:

$$\varphi(0, y) = -E_o \cdot y + \frac{Q}{4\pi\epsilon_o |y|},$$

$$E(0, y) = -\frac{\partial \varphi(0, y)}{\partial y} = E_o - \frac{Q}{4\pi\epsilon_o} \cdot \frac{-\frac{y}{y^2}}{y^2} = E_o + \frac{Q}{4\pi\epsilon_o y |y|}.$$

Поље $E(0, y)$ једнако је нули у тачки са негативном y координатом:

$$E(0, y < 0) = E_o - \frac{Q}{4\pi\epsilon_o y^2} = 0. \quad \rightarrow \quad y_s = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{Q}{\pi\epsilon_o E_o}}.$$

Одредимо вриједност потенцијала сингуларне еквипотенцијале:

$$\varphi(0, y < 0) = -E_o \cdot y - \frac{Q}{4\pi\epsilon_o y} \quad \rightarrow \quad \varphi(0, y_s) = \sqrt{\frac{QE_o}{\pi\epsilon_o}}.$$

Да ли сингуларна еквипотенцијала пролази дијелом равни $y > 0$?

$$\varphi(0, y > 0) = -E_o y + \frac{Q}{4\pi\epsilon_o y} \rightarrow -E_o y + \frac{Q}{4\pi\epsilon_o y} = \sqrt{\frac{QE_o}{\pi\epsilon_o}} \rightarrow$$

$$y^2 + \sqrt{\frac{Q}{\pi\epsilon_o E_o}} \cdot y - \frac{Q}{4\pi\epsilon_o E_o} = 0 \cdot y^2 + 2|y_s| \cdot y - |y_s|^2 = 0 \cdot$$

Узимамо само позитивно рјешење: $y_1 = (\sqrt{2} - 1) \cdot y_s$. Дакле, сингуларна еквипотенцијала пролази тачком $(0, y_1) = (0, (\sqrt{2} - 1) \cdot |y_s|)$.

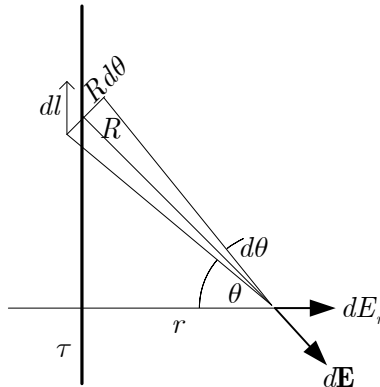
Примјер 1.5

Веома дуг праволинијски проводник наелектрисан је равномјерно подужним наелектрисањем τ . Одредити поље и потенцијал у произвољној тачки у околини проводника, [133].

Рјешење:

Због симетрије поље ће имати само радијалну компоненту:

$$dE = \frac{\tau \cdot dl}{4\pi\epsilon_o R^2}, \quad dE_r = dE \cdot \cos \theta,$$



Слика 1.4

$$\frac{r}{R} = \cos \theta \rightarrow R = \frac{r}{\cos \theta}, \quad dl = \frac{R \cdot d\theta}{\cos \theta} = \frac{r \cdot d\theta}{\cos^2 \theta}$$

$$dE_r = \frac{\tau \cdot r \cdot d\theta \cdot \cos^2 \theta \cdot \cos \theta}{4\pi\epsilon_o \cos^2 \theta \cdot r^2} = \frac{\tau \cdot \cos \theta \cdot d\theta}{4\pi\epsilon_o \cdot r} \rightarrow$$

$$E_r = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_o \cdot r} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta \cdot d\theta, \quad E_r = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_o \cdot r} \left[\sin \frac{\pi}{2} + \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_o \cdot r}.$$

$$\mathbf{E} = -grad\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \right) \rightarrow E = -\frac{d\varphi}{dr} \rightarrow$$

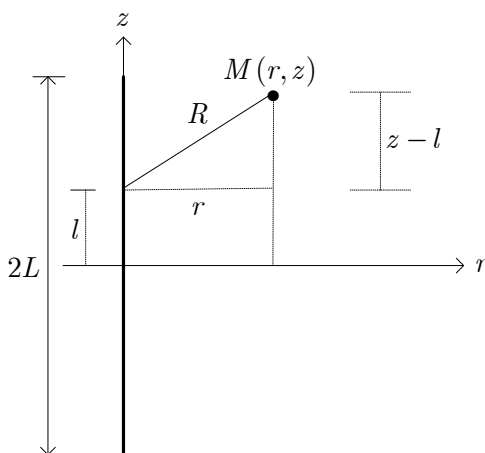
$$\varphi = -\int_{r_{ref}}^r E dr = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_o} \int_r^{r_{ref}} \frac{dr}{r} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_o} \ln \frac{r_{ref}}{r}.$$

Примјер 1.6

Одредити потенцијал и поље у околини правог танког равномјерно наелектрисаног проводника дужине $2L$, равномјерно оптерећеног наелектрисањем подужне густине τ , [134].

Рјешење:

Задатак рјешавамо у цилиндричном координатном систему. Пошто постоји симетрија по углу произволну тачку M можемо поставити у (r, z) раван. Потенцијал од елементарног наелектрисања $\tau \cdot dl$ износи:



Слика 1.5

$$d\varphi = \frac{\tau \cdot dl}{4\pi\epsilon_o R}, \text{ те је: } \varphi = \int_{-L}^{+L} \frac{\tau \cdot dl}{4\pi\epsilon_o R} + \varphi_o, \quad R = \sqrt{r^2 + (z-l)^2}$$

$$\varphi = \int_{-L}^{+L} \frac{\tau \cdot dl}{4\pi\epsilon_o \sqrt{r^2 + (z-l)^2}} + \varphi_o.$$

$$\text{Уведимо смјену: } z-l = r \cdot \text{sh}t, \quad -dl = r \cdot \text{ch}t \cdot dt,$$

$$z+L = r \cdot \text{sh}t_1 \rightarrow t_1 = \text{Arsh} \frac{z+L}{r},$$

$$z-L = r \cdot \text{sh}t_2 \rightarrow t_2 = \text{Arsh} \frac{z-L}{r}$$

$$\text{Arsh}x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \rightarrow$$

$$t_1 = \ln \frac{z+L + \sqrt{(z+L)^2 + r^2}}{r}, \quad t_2 = \ln \frac{z-L + \sqrt{(z-L)^2 + r^2}}{r}.$$

$$\varphi = \int_{t_1}^{t_2} \frac{-\tau \cdot r \cdot \text{ch}t \cdot dt}{4\pi\epsilon_o \sqrt{r^2(1+\text{sh}^2t)}} + \varphi_o = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_o} \int_{t_2}^{t_1} \frac{\text{ch}t \cdot dt}{\sqrt{1+\text{sh}^2t}} + \varphi_o,$$

$$\varphi = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_o} \int_{t_2}^{t_1} \frac{\text{ch}t \cdot dt}{\text{ch}t} + \varphi_o.$$

$$\varphi = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_o} (t_1 - t_2) + \varphi_o, \quad t_1 - t_2 = \ln \frac{z+L + \sqrt{(z+L)^2 + r^2}}{z-L + \sqrt{(z-L)^2 + r^2}} \rightarrow$$

$$\varphi = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_o} \ln \frac{z+L + \sqrt{(z+L)^2 + r^2}}{z-L + \sqrt{(z-L)^2 + r^2}} + \varphi_o. \quad (*)$$

$$\mathbf{E} = -\text{grad}\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \hat{\theta} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \hat{\mathbf{z}}\right) = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \hat{\mathbf{z}}\right) = E_r \hat{\mathbf{r}} + E_z \hat{\mathbf{z}}.$$

Подсјетник:

$$\text{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad \text{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \quad \text{th}x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \text{cth}x = \frac{1}{\text{th}x},$$

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \quad \operatorname{sh} 2x = 2 \cdot \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x, \quad \operatorname{ch} 2x = \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x;$$

$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} y, \quad \operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y,$$

$$\operatorname{Arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad \operatorname{Arch} x = \pm \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), (x \geq 1),$$

$$\operatorname{Arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}; (|x| < 1), \quad \operatorname{Arcth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}; (|x| > 1).$$

Примјер 1.7

Дат је кружни линеичан прстен полупречника a на коме се налази равномерно расподијељено електрично оптерећење укупног износа Q . Израчунати потенцијал било које тачке у простору око прстена, [137].

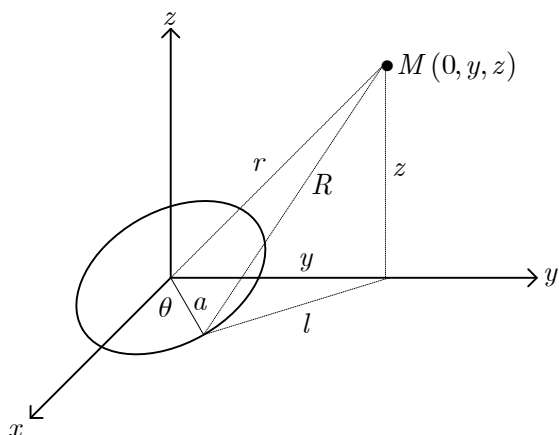
Рјешење:

Због лучне симетрије тачку M у којој рачунамо потенцијал можемо поставити у раван yOz без умањења општости.

Елементарно наелектрисање на елементарном луку кружног прстена износи:

$$dq = \tau \cdot dl = \frac{Q}{2\pi a} a d\theta = \frac{Q}{2\pi} d\theta, \quad \Rightarrow$$

$$d\varphi = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{Q}{2\pi \cdot 4\pi\epsilon_0} \frac{d\theta}{R} = \frac{Q}{8\pi^2\epsilon_0} \frac{d\theta}{R}.$$



Слика 1.6

$$R = \sqrt{z^2 + y^2 + a^2 - 2ay \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} = \sqrt{z^2 + y^2 + a^2 - 2ay \cdot \sin \theta};$$

Ако узмемо у обзир симетрију у односу на yOz раван можемо писати:

$$\varphi = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi, \quad \varphi = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{Q}{8\pi^2 \varepsilon_0} \frac{d\theta}{\sqrt{z^2 + y^2 + a^2 - 2ay \cdot \sin \theta}}.$$

Уведимо смјену: $\theta = 2\alpha - \frac{\pi}{2}, \Rightarrow d\theta = 2d\alpha, \quad \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$

$$R = \sqrt{z^2 + y^2 + a^2 - 2ay \cdot \sin \theta} = \sqrt{z^2 + y^2 + a^2 - 2ay \cdot \sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right)},$$

$$\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = -\cos 2\alpha = -\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha,$$

$$2ay \cdot \cos 2\alpha = 2ay(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha), \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} z^2 + y^2 + a^2 - 2ay \cdot \sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right) &= \\ &= z^2 + y^2 + a^2 - 2ay + 2ay + 2ay(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = \\ &= z^2 + (y + a)^2 - 2ay(1 - \cos^2 \alpha) - 2ay \sin^2 \alpha = \\ &= z^2 + (y + a)^2 - 4ay \sin^2 \alpha = \\ &= \left[z^2 + (y + a)^2\right] \left[1 - \frac{4ay}{z^2 + (y + a)^2} \sin^2 \alpha\right], \\ k^2 &= \frac{4ay}{z^2 + (y + a)^2}, \quad R = \sqrt{z^2 + (y + a)^2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{Q}{4\pi^2\epsilon_o} \int_0^{\pi/2} \frac{2d\alpha}{\sqrt{z^2 + (y+a)^2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \alpha}} = \\ &= \frac{Q}{2\pi^2\epsilon_o \sqrt{z^2 + (y+a)^2}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \alpha}}, \\ \varphi &= \frac{Q}{2\pi^2\epsilon_o \sqrt{z^2 + (y+a)^2}} K\left(\frac{\pi}{2}, k\right).\end{aligned}$$

Са $K\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \alpha}}$ означили смо потпуни елиптички интеграл прве врсте.

$$\text{За } y = 0 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow K\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = \frac{\pi}{2}, \Rightarrow \varphi(z) = \frac{Q \frac{\pi}{2}}{2\pi^2\epsilon_o \sqrt{z^2 + a^2}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o \sqrt{z^2 + a^2}}.$$

$$\text{За } y = 0, z = 0, \Rightarrow \varphi(0, 0) = \frac{Q \frac{\pi}{2}}{2\pi^2\epsilon_o a^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o a}.$$

Подсјетник:

Ако са R означимо рационалну функцију тада се, по правилу, следећи интеграли не могу изразити преко елементарних функција:

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^3 + bx^2 + cx + d}\right) dx \text{ и } \int R\left(x, \sqrt{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e}\right) dx \quad (*)$$

Када је то случај интеграле (*) називамо **елиптичким** интегралима. У ријетким случајевима када се интеграл (*) могу изразити помоћу елементарних функција, онда се називају **псеудоелиптичким** интегралима.

Елиптички интеграл могу се разним смјенама свести на неки од следећа три типа:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}; \int \frac{t^2 dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}; \int \frac{dt}{(1+ht^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}; \quad (**)$$

$$0 < k < 1.$$

Смјеном $t = \sin \varphi$, $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ интеграле (**) сводимо на Лежандров облик:

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-k^2 \sin^2 \varphi)}}, \int \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi, \int \frac{d\varphi}{(1+h \sin^2 \varphi) \sqrt{(1-k^2 \sin^2 \varphi)}}, \quad (***)$$

Ове облике називамо елиптичким интегралима **прве, друге и треће врсте**, респективно.

Ако је доња граница интеграла (***) једнака нули добијамо **такозване непотпуне елиптичке интеграле прве, друге и треће врсте**. Уобичајени симболи за ове интеграле су:

$$K(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{d\alpha}{\sqrt{(1-k^2 \sin^2 \alpha)}}, \quad E(\varphi, k) = \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \alpha} \cdot d\alpha,$$

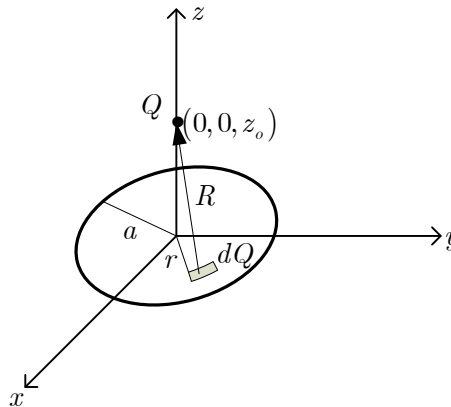
$$\Pi(\varphi, h, k) = \int_0^\varphi \frac{d\alpha}{(1+h \sin^2 \alpha) \sqrt{(1-k^2 \sin^2 \alpha)}}.$$

Ако је $\varphi = \pi/2$ добијају се **потпуни** интеграли.

Примјер 1.8

Одредити силу на тачкасто наелектрисање Q које се налази у тачки $(0, 0, z_o)$ од наелектрисања Q_1 равномерно расподијељеног по површини кружног диска полупречника a смјештеног у равни $z = 0$, [136]

Рјешење:



Слика 1.7

Површинска густина наелектрисања на диску одређена је са: $\eta = \frac{Q_1}{S} = \frac{Q_1}{a^2 \pi}.$

У цилиндричном координатном систему су:

$$\mathbf{R} = -r \cdot \hat{\mathbf{r}} + z_o \hat{\mathbf{z}}, \quad dQ = \eta dS = \eta \cdot r dr d\theta.$$

$$d\mathbf{F} = \frac{Q \cdot dQ}{4\pi\epsilon_o (r^2 + z^2)} \frac{-r \cdot \hat{\mathbf{r}} + z_o \cdot \hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \frac{Q \cdot \eta \cdot r dr d\theta}{4\pi\epsilon_o (r^2 + z^2)} \frac{-r \cdot \hat{\mathbf{r}} + z_o \cdot \hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{r^2 + z^2}}.$$

Примијетити да ће се радијалне компоненте силе међусобно поништити и да постоји само z компонента:

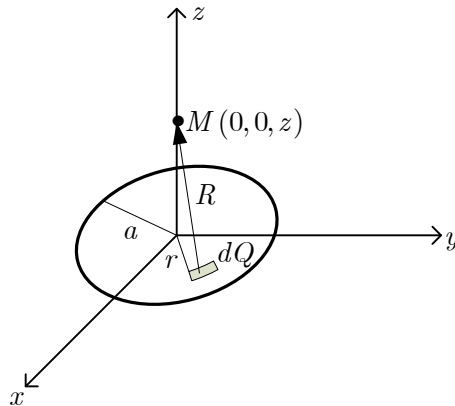
$$\mathbf{F} = \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{Q \cdot \eta \cdot z_o \cdot r dr d\theta}{4\pi\epsilon_o (r^2 + z_o^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}} = 2\pi \frac{Q \cdot \eta \cdot z_o}{4\pi\epsilon_o} \int_0^a \frac{r dr}{(r^2 + z_o^2)^{3/2}},$$

$$\mathbf{F} = \frac{Q\eta z_o}{2\epsilon_o} \left(\frac{1}{z_o} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + z_o^2}} \right) = \frac{Q Q_1 z_o}{2a^2 \pi \epsilon_o} \left(\frac{1}{z_o} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + z_o^2}} \right).$$

Примјер 1.9

Танак кружни диск од изолационог материјала полу-пречника a , неравномјерно је површински наелектрисан укупном количином наелектрисања Q . Површинска густина наелектрисања у центру диска једнака је нули, а према ободу расте пропорционално квадрату растојања од центра диска. Одредити: (а) координате сингуларне тачке у датом систему, (б) z – координату тачке на z -оси у којој јачина поља има највећу вриједност, [139].

Рјешење:



Слика 1.8

(a)

Проблем има аксијалну симетрију. У свим тачкама z-осе x и y компоненте поља једнаке су нули. Тражена сингуларна тачка лежи на z-оси и да би је пронашли довољно је да одредимо z компоненту поља.

Елементарна површина је: $dS = r \cdot d\theta \cdot dr$.

Површинска густина наелектрисања је: $\eta = kr^2$. Одредимо константу k:

$$Q = \int_S \eta dS = k \int_0^{2\pi} \int_0^a r^2 \cdot r \cdot dr \cdot d\theta = 2\pi k \int_0^a r^3 dr = \frac{\pi k a^4}{2}, \Rightarrow k = \frac{2Q}{\pi a^4}.$$

Коначно, $\eta = \frac{2Q}{\pi a^4} r^2$.

Потенцијал у тачкама на z-оси:

$$d\varphi = \frac{dq}{4\pi\epsilon_o \sqrt{r^2 + z^2}} = \frac{\eta \cdot r dr d\theta}{4\pi\epsilon_o \sqrt{r^2 + z^2}} = \frac{Q}{2\pi^2 \epsilon_o a^4} \frac{r^3 dr d\theta}{\sqrt{r^2 + z^2}}.$$

$$\varphi(0, 0, z) = \frac{2\pi Q}{2\pi^2 \epsilon_o a^4} \int_0^a \frac{r^3 dr}{\sqrt{r^2 + z^2}} =$$

$$= \left| r^2 + z^2 = t^2, r \cdot dr = t \cdot dt, t_1 = |z|, t_2 = \sqrt{a^2 + z^2} \right| \Rightarrow$$

$$\varphi(0, 0, z) = \frac{Q}{\pi \epsilon_o a^4} \int_{t_1}^{t_2} (t^2 - z^2) dt = \frac{Q}{3\pi \epsilon_o a^4} \left[\sqrt{a^2 + z^2} (a^2 - 2z^2) + 2|z| z^2 \right].$$

$$E_z(0, 0, z) = -grad_z \varphi(0, 0, z); \quad f(z) = \sqrt{a^2 + z^2} (a^2 - 2z^2) + 2|z| z^2.$$

$$\frac{df}{dz} = \frac{1}{2} (a^2 + z^2)^{-1/2} 2z \cdot (a^2 - 2z^2) + \sqrt{a^2 + z^2} \cdot (-4z) + 6z|z|,$$

$$\frac{df}{dz} = \frac{-3a^2 z - 6z^3}{\sqrt{a^2 + z^2}} + 6z|z|, \quad E_z(0, 0, z) = \frac{Qz}{\pi \epsilon_o a^4} \left[\frac{a^2 + 2z^2}{\sqrt{a^2 + z^2}} - 2|z| \right] \quad (*)$$

Провјеримо функцију:

$$F(z) = \frac{a^2 + 2z^2}{\sqrt{a^2 + z^2}} - 2|z| = \frac{a^2 + 2z^2 - 2|z| \sqrt{a^2 + z^2}}{\sqrt{a^2 + z^2}} \Rightarrow$$

$$F(z) = \frac{a^2 + 2|z| \left[|z| - \sqrt{a^2 + z^2} \right]}{\sqrt{a^2 + z^2}} = \frac{a^2 \left(\sqrt{a^2 + z^2} - |z| \right)}{\sqrt{a^2 + z^2} \left(|z| + \sqrt{a^2 + z^2} \right)};$$

$$E_z(0, 0, z) = \frac{Q \cdot z}{\pi \varepsilon_0 a^4} F(z)$$

Последњи израз једнак је нули само за $z = 0$. Сингуларна тачка је, дакле, $(0, 0, 0)$.

(б)

Упростимо израз (*) увођењем смјене $z = a \cdot t, z \succ 0$:

$$E_z(0, 0, z) = \frac{tQ}{\pi \varepsilon_0 a^2} \left(\frac{1 + 2t^2}{\sqrt{1 + t^2}} - 2t \right).$$

Услов максималног поља је: $\frac{d}{dt} \left[t \left(\frac{1 + 2t^2}{\sqrt{1 + t^2}} - 2t \right) \right] = 0. \Rightarrow$

$$\frac{1 + 2t^2}{\sqrt{1 + t^2}} - 4t + t \frac{3t + 2t^3}{\sqrt{(1 + t^2)^3}} = 0$$

Направимо смјену $t^2 = u - 1 \Rightarrow \frac{2u - 1}{\sqrt{u}} + \frac{(u - 1)(1 + 2u)}{u^{3/2}} = 4\sqrt{u - 1}.$

Након квадрирања и сређивања добијамо: $-\frac{4}{u} + \frac{4}{u^2} + \frac{1}{u^3} = 0$, односно

$$4u^2 - 4u - 1 = 0 \Rightarrow u_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}.$$

Одбацивања негативног рјешења добијамо $t = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{2} - 1}{2}}$, што значи да ће поље

имати максималну вриједност за $z = \pm a \sqrt{\frac{\sqrt{2} - 1}{2}}.$

Примјер 1.10

Одредити функцију потенцијала и електрично поље **E** на оси танког диска полупречника a равномерно наелектрисаног површинском густином наелектрисања η , [141].

Рјешење:

Према ознакама на слици 1.8 имамо:

$$d\varphi = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0\sqrt{r^2 + z^2}} = \frac{\eta \cdot r dr d\theta}{4\pi\epsilon_0\sqrt{r^2 + z^2}}.$$

$$\varphi(0, 0, z) = \frac{2\pi\eta}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a \frac{r dr}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \frac{\eta}{2\epsilon_0} \int_0^a \frac{d(r^2 + z^2)}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \frac{\eta}{2\epsilon_0} (\sqrt{a^2 + z^2} - |z|).$$

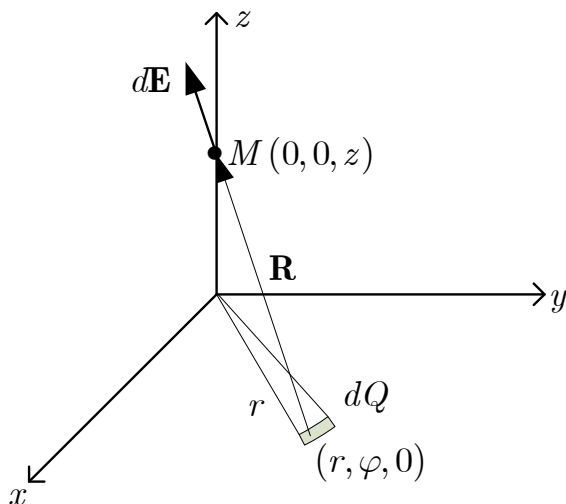
$$\mathbf{E} = -\text{grad}\varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} = \frac{\eta}{2\epsilon_0} \left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right) \hat{\mathbf{z}}.$$

$$\text{За } z = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\eta a}{2\epsilon_0}, \quad E_z = \frac{\eta}{2\epsilon_0}.$$

Примјер 1.11

Извести израз за рачунање електричног поља у околини бесконачне равномјерно наелектрисане равни, [142].

Рјешење:



Слика 1.9

Узмимо цилиндрични координатни систем у коме се наелектрисана равна налази у равни $z = 0$. Сликајући ознаке на слици 2.12 можемо писати:

$$d\mathbf{E} = \frac{\eta \cdot r dr \cdot d\theta}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + z^2)} \frac{-r \cdot \hat{\mathbf{r}} + z \cdot \hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{r^2 + z^2}}.$$

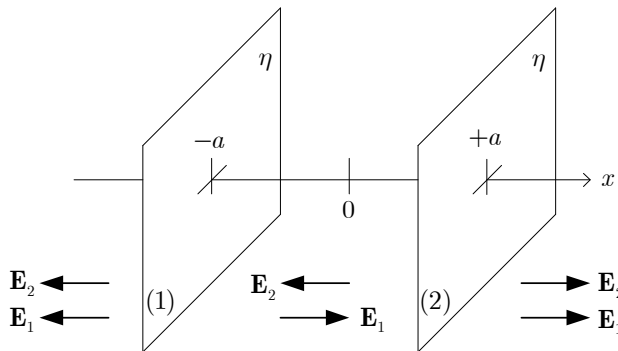
Због симетрије поље $\mathbf{E}$ ће имати само z компоненту:

$$\mathbf{E} = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{\eta r z dr d\theta}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}} = \frac{\eta z}{2\epsilon_0} \left[\frac{-1}{\sqrt{(r^2 + z^2)}} \right]_0^\infty \hat{\mathbf{z}} = \frac{\eta}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{z}}.$$

Примјер 1.12

Двије бесконачне паралелне равни равномерно су наелектрисане **једнаким** површинским наелектрисањем η . Растојање између равни је $2a$. Одредити вриједност поља у свим тачкама система, [143].

Рјешење:



Слика 1.10

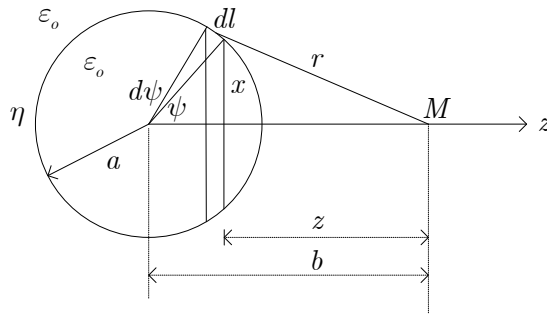
Ако координатни систем поставимо као а слици 1.10 суперпозицијом поља $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ добија се:

$$\mathbf{E}(x) = \begin{cases} -(\eta / \varepsilon_o) \hat{\mathbf{x}} & x < -a \\ 0 & -a < x < a \\ +(\eta / \varepsilon_o) \hat{\mathbf{x}} & x > a \end{cases}$$

Примјер 1.13

Полазећи од израза за потенцијал површинске расподеле наелектрисања одредити функцију потенцијала и јачину електричног поља унутар и изван сфере полупречника a , која је по површини равномјерно наелектрисана количином наелектрисања Q , [144].

Рјешење:



Слика 1.11

Због ротационе симетрије тачку M у којој рачунамо потенцијал можемо поставити било гдје па и на z -оси. Уочимо довољно узан појас лопте полупречника x . Наелектрисање dq на растојању r даје потенцијал:

$$d\varphi = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_o \cdot r} = \frac{\eta dS}{4\pi\varepsilon_o \cdot r}, \quad \eta = \frac{Q}{4\pi a^2},$$

$$dS = 2\pi x \cdot dl = 2\pi a \cdot \sin \psi \cdot a \cdot d\psi = 2\pi a^2 \sin \psi \cdot d\psi,$$

$$r^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \psi \rightarrow r dr = ab \sin \psi \cdot d\psi \rightarrow$$

$$\sin \psi \cdot d\psi = \frac{r dr}{ab}, \rightarrow dS = \frac{2\pi a}{b} r dr,$$

$$d\varphi = \frac{2\pi a \cdot \eta}{4\pi\varepsilon_o \cdot r} r dr = \frac{\eta a}{2\varepsilon_o \cdot b} dr \rightarrow \varphi = \oint_S d\varphi = \frac{\eta a}{2\varepsilon_o} \oint_S \frac{dr}{b}.$$

Слиједећи ознаке на слици имамо:

$$x^2 = r^2 - z^2 = a^2 - (b - z)^2 = a^2 - b^2 - z^2 + 2bz, \rightarrow$$

$$r^2 = a^2 - b^2 + 2bz \rightarrow r dr = b dz, \rightarrow$$

$$\frac{dr}{b} = \frac{dz}{r} = \frac{dz}{\sqrt{a^2 - b^2 + 2bz}}.$$

$$\varphi = \frac{\eta a}{2\varepsilon_o} \int_{b-a}^{b+a} \frac{dz}{\sqrt{a^2 - b^2 + 2bz}} =$$

$$= \frac{\eta a}{2b\varepsilon_o} \left[\sqrt{a^2 - b^2 + 2b(b+a)} - \sqrt{a^2 - b^2 + 2b(b-a)} \right];$$

$$\varphi = \frac{\eta a}{2b\varepsilon_o} \left[\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab} - \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab} \right] =$$

$$= \frac{\eta a}{2b\varepsilon_o} \left[\sqrt{(a+b)^2} - \sqrt{(a-b)^2} \right];$$

$$\varphi = \frac{\eta a}{2b\varepsilon_o} [|b+a| - |b-a|]; \Rightarrow$$

$$\varphi = \frac{\eta a}{2b\varepsilon_o} 2a = \frac{\eta a^2}{b\varepsilon_o} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o b}; \quad \text{за } b \geq a$$

$$\varphi = \frac{\eta a}{2b\varepsilon_o} 2b = \frac{\eta a}{\varepsilon_o} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o a}; \quad \text{за } b \leq a$$

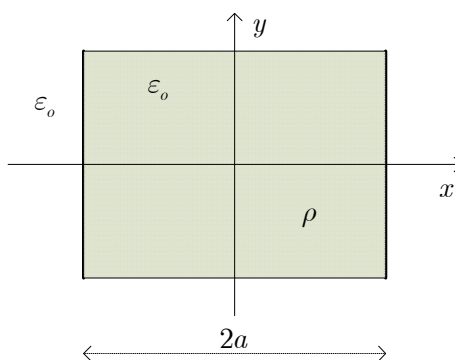
$$\mathbf{E} = -\text{grad}\varphi = -\frac{d\varphi}{dz} \hat{\mathbf{z}} \Rightarrow$$

$$E_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o b^2}, \quad \text{за } b \geq a; \quad E = 0 \quad \text{за } b \leq a.$$

Примјер 1.14

Између двије паралелне неограничене равни расподјела запреминских оптерећења дата је изразом: $\rho(x) = \rho_o x/a$, $-a \leq x \leq +a$, $\rho_o = \text{const}$. Одредити поље у свим тачкама простора, [145].

Рјешење:



Слика 1.12

Пошто су равни неограничене у y и z правцу, E_z и E_y су једнаке нули. Сре-
дина је хомогена.

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho_s}{\varepsilon_0} \Rightarrow$$

$$\text{За } -a \leq x \leq +a, \quad \rho_s = \frac{\rho_0 x}{a} \Rightarrow \frac{dE_x}{dx} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \frac{x}{a}, \Rightarrow E_x = \frac{\rho_0 x^2}{2a\varepsilon_0} + C_1.$$

$$\text{За } x \geq a \text{ и } x \leq -a, \quad \rho_s = 0, \quad \frac{dE_x}{dx} = 0, \Rightarrow E_x = C_2.$$

На великим удаљеностима поље E_x ће бити једнако нули па и константа C_2 мора бити 0.

Другу константу одређујемо из услова $E_x(x = a_-) = E_x(x = a_+)$, $\Rightarrow$

$$\frac{\rho_0 a^2}{2a\varepsilon_0} + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{\rho_0 a}{2\varepsilon_0}.$$

$$E_x = \frac{\rho_0}{2a\varepsilon_0} (x^2 - a^2), \quad -a \leq x \leq +a,$$

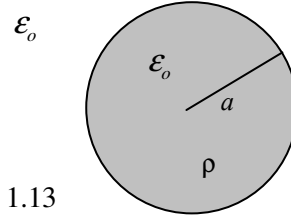
$$E_x = 0, \quad x \geq a \text{ и } x \leq -a.$$

Примјер 1.15

Одредити вектор јачине електричног поља и потенцијал у произвољној тачки простора у случају просторно расподијељеног слободног наелектрисања ρ_s које се налази унутар сферне површине полупречника a , за случајеве, [158]:

а) $\rho_s(r) = \rho_o$,

б) $\rho_s(r) = \rho_o \left(1 - \frac{r}{a}\right)$.



Рјешење:

Слика 1.13

Средина је хомогена и поље је стационарно:

$$\text{rot}\mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{E} = -\text{grad}\varphi, \quad \text{div}\mathbf{E} = \frac{\rho_s}{\epsilon_o}.$$

$$\text{div}\mathbf{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) + \frac{1}{r \cdot \sin \psi} \frac{\partial}{\partial \psi} (\sin \psi \cdot E_\psi) + \frac{1}{r \cdot \sin \psi} \frac{\partial E_\theta}{\partial \theta}.$$

Поставимо сферни координатни систем у центар сферне површине. Поље ће имати само радијалну компоненту: $E = E_r(r)$, $E_\theta = 0$, $E_\psi = 0$.

$$\text{div}\mathbf{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) = \frac{\rho_s}{\epsilon_o}.$$

(а)

$$\text{За } 0 \leq r \leq a, \quad \rho_s = \rho_o = \text{const.} \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) = \frac{\rho_o}{\epsilon_o}, \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) = \frac{\rho_o r^2}{\epsilon_o}$$

$$r^2 E = \frac{\rho_o r^3}{3\epsilon_o} + C_1 \quad \rightarrow \quad E = \frac{\rho_o r}{3\epsilon_o} + \frac{C_1}{r^2}$$

Када $r \rightarrow 0$ поље мора имати коначну вриједност, те је $C_1 \rightarrow 0$: $E = \frac{\rho_o r}{3\epsilon_o}$.

$$\mathbf{E} = -\text{grad}\varphi = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} \hat{\psi} - \frac{1}{r \cdot \sin \psi} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \hat{\theta}.$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} \hat{\mathbf{r}}, \quad \rightarrow \quad d\varphi = -E dr = -\frac{\rho_o r}{3\epsilon_o} dr.$$

$$\varphi(r) = \int_{r'=r}^a E(r') dr' + \varphi(a) = \frac{\rho_o}{3\varepsilon_o} \int_{r'=r}^a r' dr' + \frac{\rho_o \frac{4a^3\pi}{3}}{4\pi\varepsilon_o a} = \frac{\rho_o}{3\varepsilon_o} \left(\frac{a^2}{2} - \frac{r^2}{2} + a^2 \right)$$

$$\varphi(r) = \frac{\rho_o}{6\varepsilon_o} (3a^2 - r^2).$$

За $r \geq a$, $\rho_s = 0$, $\frac{d}{dr}(r^2 E) = 0$, $\rho_s = \rho_o = const.$, $E = \frac{C_2}{r^2}$.

Пошто је у читавом простору вакуум, средина је хомогена у диелектричном смислу. Зато мора бити: $E(r = a_-) = E(r = a_+)$.

$$\frac{\rho_o a}{3\varepsilon_o} = \frac{C_2}{a^2} \rightarrow C_2 = \frac{\rho_o a^3}{3\varepsilon_o}.$$

Коначно је: $E = E_r = \frac{\rho_o a}{3\varepsilon_o} \left(\frac{a}{r} \right)^2$, за $r \geq a$.

$$d\varphi = -E \cdot dr, \rightarrow \varphi(r) = - \int_{\infty}^{r'=r} E_r \cdot dr' = \frac{\rho_o a^3}{3\varepsilon_o} \int_{r'=r}^{\infty} \frac{dr'}{r'^2} = \frac{\rho_o a^3}{3\varepsilon_o r}, \text{ за } r \geq a.$$

(б)

За $0 \leq r \leq a$, $\rho_s = \rho_o \left(1 - \frac{r}{a} \right)$. $\rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr}(r^2 E_r) = \frac{\rho_o}{\varepsilon_o} \left(1 - \frac{r}{a} \right) \rightarrow$

$$\frac{d}{dr}(r^2 E_r) = \frac{\rho_o}{\varepsilon_o} \left(r^2 - \frac{r^3}{a} \right) \rightarrow E_r = \frac{\rho_o}{\varepsilon_o} \left(\frac{r}{3} - \frac{r^2}{4a} \right) + \frac{C_3}{r^2}.$$

За $r \rightarrow 0$ поље има коначну вриједност, те је $C_3 \rightarrow 0$, те је: $E_r = \frac{\rho_o r}{4\varepsilon_o} \left(\frac{4}{3} - \frac{r}{a} \right)$,

$$\varphi(r) = \int_{r'=r}^a E_r \cdot dr' + \varphi(a) = \frac{\rho_o}{4\varepsilon_o} \int_{r'=r}^a \left(\frac{4}{3} - \frac{r'}{a} \right) r' dr' + \varphi(a),$$

$$\varphi(r) = \frac{\rho_o}{12\varepsilon_o} \left(a^2 - 2r^2 + \frac{r^3}{a} \right) + \varphi(a)$$

За $r \geq a$, $\rho_s = 0$, $\frac{d}{dr}(r^2 E) = 0$, $r^2 E = C_4$, $E = \frac{C_4}{r^2}$.

Услов $E(r = a_-) = E(r = a_+) \rightarrow C_4 = \frac{\rho_o a^3}{12\varepsilon_o}$,

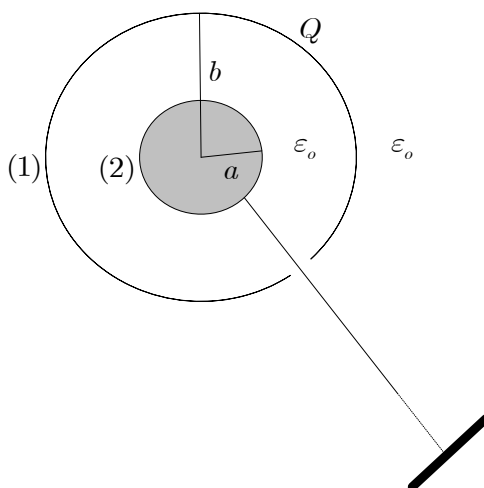
$$\text{Коначно: } E = E_r = \frac{\rho_o a}{12\epsilon_o} \left(\frac{a}{r}\right)^2, \quad \varphi(r) = - \int_{\infty}^{r'=r} E_r \cdot dr' = \frac{\rho_o a^3}{12\epsilon_o} \int_{r'=r}^{\infty} \frac{dr'}{r'^2} = \frac{\rho_o a^3}{12\epsilon_o r}. \rightarrow$$

Сада можемо одредити потенцијал: $\varphi(a) = \frac{\rho_o a^2}{12\epsilon_o}$. Коначно,

$$\varphi(r) = \frac{\rho_o}{12\epsilon_o} \left(2a^2 - 2r^2 + \frac{r^3}{a} \right), \quad 0 \leq r \leq a, \quad \varphi(r) = \frac{\rho_o a^3}{12\epsilon_o r}, \quad r \geq a.$$

Примјер 1.16

Око металне лопте полупречника a концентрично са њом налази се врло танка метална љуска, полупречника b ($b > a$). Средина је вакуум. Лопта је везана танким проводником за референтну тачку нултог потенцијала, која се налази веома далеко. На сферну љуску доведена је количина електрицитета Q . Одредити потенцијал љуске користећи једначине са потенцијалним коефицијентима, [174].



Слика 1.14

Рјешење:

Означимо љуску индексом (1), а уземљену лопту индексом (2). Једначине овог двоелектродног система су:

$$\varphi_1 = a_{11}Q_1 + a_{12}Q_2, \quad \varphi_2 = a_{21}Q_1 + a_{22}Q_2.$$

Одавде слиједи:

$$a_{11} = \frac{\varphi_1}{Q_1} / Q_2 = 0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_o b}, \quad a_{12} = a_{21} = \frac{\varphi_1}{Q_2} / Q_1 = 0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_o b},$$

$$a_{22} = \frac{\varphi_2}{Q_2} / Q_1 = 0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_o a}.$$

У нашем случају су: $\varphi_2 = 0$, $Q_1 = Q$, $\Rightarrow$

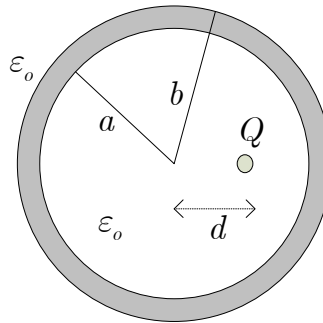
$$0 = a_{21}Q + a_{22}Q_2 \quad \Rightarrow \quad Q_2 = -\frac{a_{21}}{a_{22}}Q,$$

$$\varphi_1 = \left(a_{11} - a_{12} \frac{a_{21}}{a_{22}} \right) Q = \left(a_{11} - \frac{a_{12}^2}{a_{22}} \right) Q,$$

$$a_{11} - \frac{a_{12}^2}{a_{22}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o b} \left(1 - \frac{a}{b} \right) \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_o b} \left(1 - \frac{a}{b} \right) Q.$$

Примјер 1.17

У унутрашњости ненаелектрисане проводне сферне љуске унутрашњег полупречника a и спољашњег b налази се на одстојању d од њеног центра тачкасто оптерећење Q . Одредити вектор јачине поља у тачкама изван љуске, [157].



Слика 1.15

Рјешење:

Тачкасто оптерећење Q индуковаће на унутрашњој површини љуске распо-
дијелено оптерећење супротног знака. Та распоdjела мора бити таква да пониш-
ти поље у зиду љуске.

Замислимо површину у зиду љуске. Пошто је поље у унутрашњости проводника једнако нули добијамо:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q + Q_i}{\epsilon_0} = 0, \Rightarrow Q_i = -Q.$$

На спољашњем зиду индуковаће се $+Q$ које се расподјељује равномерно, да би поље унутар љуске било једнако нули.

За тачке изван лопте поље од тачкастог оптерећења $+Q$ и индукованог оптерећења $-Q$ поништава се у зиду љуске, па се поништава и у свим тачкама изван лопте.

Поље изван љуске зависи само од равномерно расподијељеног оптерећења Q на површини љуске:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}.$$

Поље изван проводне љуске не зависи од положаја тачкастог оптерећења Q унутар љуске.

Примјер 1.18

Извести изразе за потенцијалне коефицијенте танких жичаних проводника полупречника a паралелних проводној равни у вакууму, [175].

Рјешење:

Одређивање сопственог коефицијента

Слиједећи ознаке на слици 1.16 б) можемо писати:

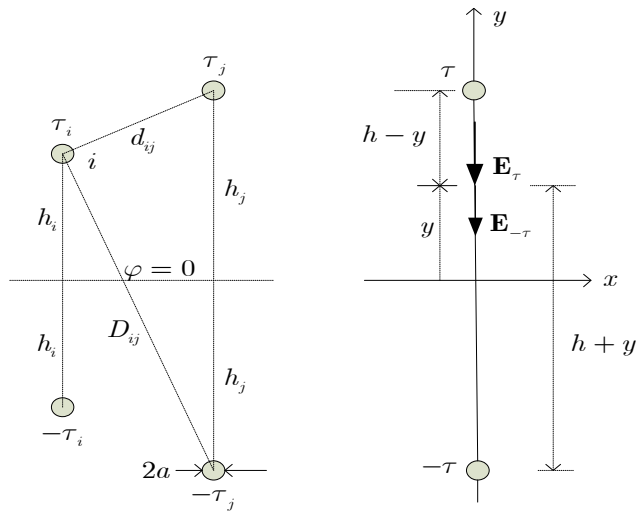
$$E(0, y) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{h_i - y} + \frac{1}{h_i + y} \right).$$

$$\varphi_i = - \int_0^{h_i-a} \mathbf{E}(0, y) \cdot d\mathbf{y} = \int_0^{h_i-a} E(0, y) \cdot dy = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h_i}{a}. \quad a_{ii} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h_i}{a}.$$

Одређивање међусобног коефицијента

Посматрајмо i -ти и j -ти проводник. При томе је j -ти проводник наелектрисан са τ_j . Потенцијал на мјесту i -тог проводника је:

$$\varphi_i = \frac{\tau_j}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{D_{ij}}{d_{ij}}. \quad \Rightarrow \quad a_{ij} = \frac{\varphi_i}{\tau_j} / \tau_i = 0 = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{D_{ij}}{d_{ij}}.$$



Слика 1.16

Примјер 1.19

На висини h од ненаелектрисане проводне равни налази се тачкасто оптерећење Q . Одредити функцију расподеле густине индукованих оптерећења на проводној равни, максималну апсолутну вриједност ове расподеле, те вектор електростатичке силе на мјесту тачкастог оптерећења, [165].

Рјешење:

У тачкама проводне равни, примјеном теореме lika у равном огледалу, поље $\mathbf{E}$ ће бити:

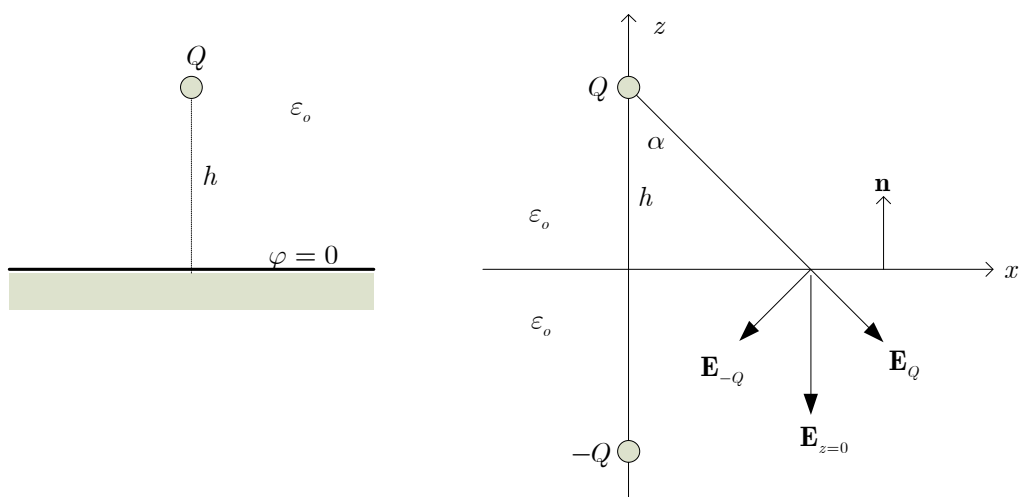
$$\mathbf{E}_{z=0} = -2|\mathbf{E}_Q| \cos \alpha \cdot \hat{\mathbf{z}} = E_z \cdot \hat{\mathbf{z}},$$

$$E_z = -\frac{2Q}{4\pi\epsilon_o(h^2 + x^2)} \frac{h}{\sqrt{h^2 + x^2}} = -\frac{Qh}{2\pi\epsilon_o(h^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$\eta_i = \epsilon_o E_z = -\frac{Qh}{2\pi(h^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$|\eta_{i\max}| = \frac{Q}{2\pi h^2} \text{ у тачки } (x, y) = (0, 0).$$

$$\mathbf{F} = Q \cdot \mathbf{E}_{-Q} / z = h = \frac{-Q^2}{16\pi\epsilon_o h^2} \hat{\mathbf{z}}.$$



Слика 1.17

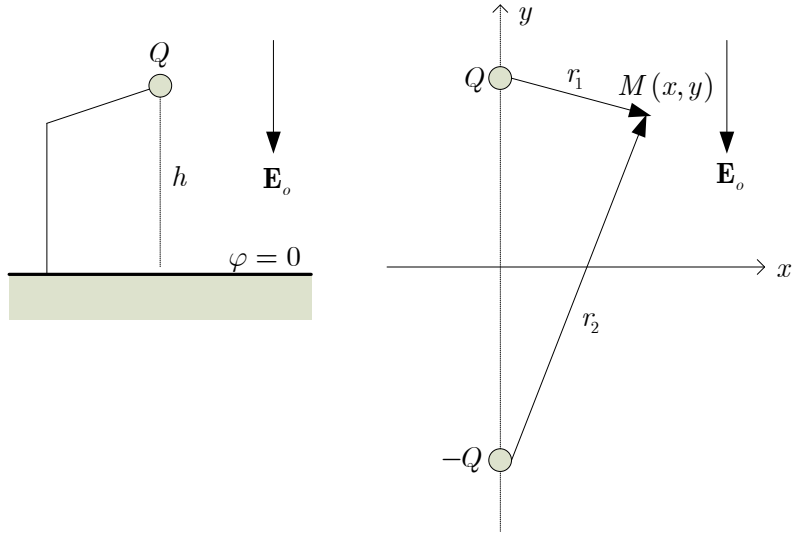
Примјер 1.20

Изнад проводне равни постоји хомогено електростатичко поље, јачине E_o , које је нормално на раван и усмјерено ка њој. У поље је унесена куглица полупречника a и постављена на висину h ($h \gg a$) изнад равни. Средина је вакуум. (а) Колико је наелектрисање куглице ако се она и проводна раван налазе на истом потенцијалу, $\varphi = 0$, (б) Одредити расподјелу наелектрисања у проводној равни за случај под а), [176].

Рјешење:

Потенцијал у тачки М је:

$$\varphi_M = \varphi_Q + \varphi_{-Q} + \varphi_o = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o r_1} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_o r_2} + E_o y$$



Слика 1.18

$$r_1 = \sqrt{x^2 + (h - y)^2}, \quad r_2 = \sqrt{x^2 + (h + y)^2}.$$

(a)

За $r_1 = a, \quad r_2 = 2h - a, \quad \varphi(0, h) = 0$

$$\varphi(0, h) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{2h - a} \right) + E_o y = 0 \Rightarrow$$

$$Q = \frac{-2\pi\epsilon_o h E_o a \cdot (2h - a)}{h - a} \approx -4\pi\epsilon_o h a E_o.$$

(б)

$$\eta_i = \epsilon_o E_n,$$

$$E_n = 2 \frac{Q}{4\pi\epsilon_o r^2} \cos \alpha + E_o = E_o \left[1 - \frac{2ah^2}{\sqrt{(x^2 + h^2)^3}} \right], \text{ (Видјети задатак 1.19).}$$

$$\eta_i = -\epsilon_o E_o \left[1 - \frac{2ah^2}{\sqrt{(x^2 + h^2)^3}} \right].$$

Примјер 1.21

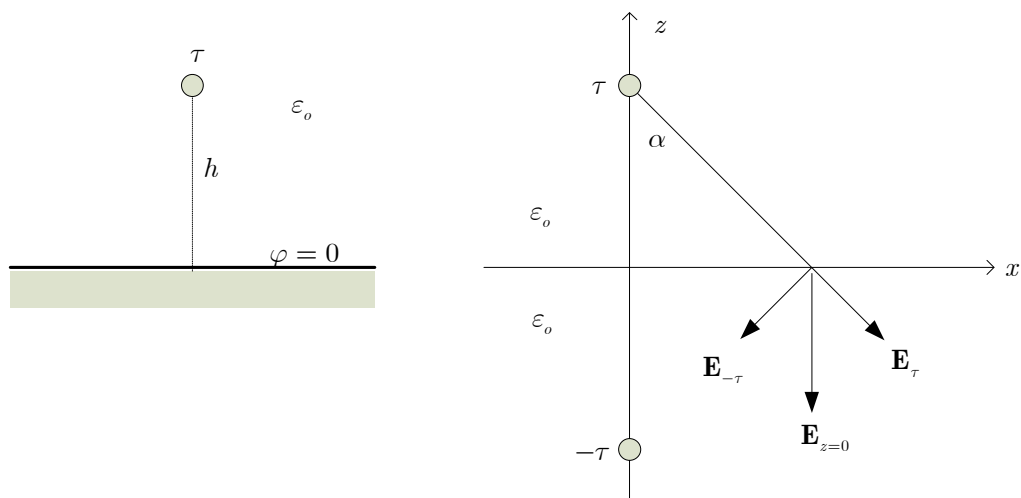
Веома дугачка жица *полупречника* a постављена је у ваздуху паралелно проводној равни на висини h , при чему је $h \gg a$. Потенцијал жице у односу на раван је φ_o . Одредити израз за површинску густину наелектрисања у произвољној тачки равни, [205].

Рјешење:

У произвољној тачки М на површини проводне равни поље $\mathbf{E}$ је:

$$\mathbf{E} = -2E_\tau \cos \alpha \cdot \hat{\mathbf{z}}, .$$

$$E_\tau = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_o r} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_o \sqrt{h^2 + x^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2 + x^2}};$$



Слика 1.19

$$E = -2 \frac{\tau \cdot h}{2\pi\epsilon_o (h^2 + x^2)} = \frac{-\tau \cdot h}{\pi\epsilon_o (h^2 + x^2)} \Rightarrow \eta_i = \epsilon_o E = \frac{-\tau \cdot h}{\pi (h^2 + x^2)}.$$

$$\tau = ?$$

Потенцијал на проводнику је:

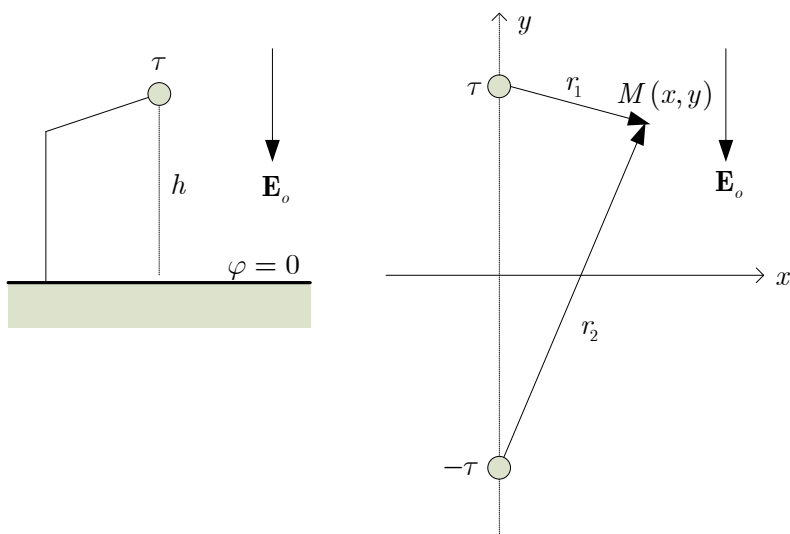
$$\varphi_o = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_o} \ln \frac{h}{a} - \frac{\tau}{2\pi\epsilon_o} \ln \frac{h}{2h} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_o} \ln \frac{2h}{a} \Rightarrow \tau = \frac{2\pi\epsilon_o \varphi_o}{\ln \frac{2h}{a}}.$$

$$\eta_i(x) = \frac{-\tau \cdot h}{\pi (h^2 + x^2)} = -\frac{2\pi\epsilon_o \varphi_o}{\ln \frac{2h}{a}} \frac{h}{\pi (h^2 + x^2)} = -\frac{2\epsilon_o h \cdot \varphi_o}{(h^2 + x^2) \cdot \ln \frac{2h}{a}}.$$

Примјер 1.22

Дат је веома дугачак ваздушни вод полупречника жица a постављен на висини h ($h \gg a$) изнад површине земље, паралелно њој. Проводник је уземљен, а налази се у хомогеном електростатичком пољу јачине E_o које је нормално на површину земље и усмјерено ка њој. Одредити: (а) потенцијал у односу на земљу било које тачке у ваздуху, (б) јачину поља на површини земље испод проводника, [177].

Рјешење:



Слика 1.20

Пошто је жичани проводник уземљен на њему ће се под дејством поља $\mathbf{E}_o$ индуковати наелектрисање τ . Утицај земље узимамо помоћу теореме лика у равном огледалу.

(а)

Потенцијал у произвољној тачки М у ваздуху је:

$$\varphi(M) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_o} \ln \frac{r_{ref}}{r_1} - \frac{\tau}{2\pi\epsilon_o} \ln \frac{r_{ref}}{r_2} + y \cdot E_o = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_o} \ln \frac{r_2}{r_1} + y \cdot E_o.$$

Колики је τ ?

Потенцијал на површини проводника је, ($r_1 = a$, $r_2 = 2h - a$, $y = h$):

$$\varphi(0, h) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_o} \ln \frac{2h - a}{a} + h \cdot E_o = 0, \quad (\text{Уземљени проводник!})$$

$$\tau = -\frac{2\pi\epsilon_o E_o h}{\ln \frac{2h}{a}}. \quad \Rightarrow \quad \varphi(x, y) = -\frac{E_o h}{\ln \frac{2h}{a}} \ln \frac{\sqrt{x^2 + (h + y)^2}}{\sqrt{x^2 + (h - y)^2}} + y \cdot E_o$$

(б)

$$\varphi(x, y) = y \cdot E_o - \frac{E_o h}{\ln \frac{2h}{a}} \ln \frac{r_2}{r_1}, \quad r_1 = \sqrt{x^2 + (h - y)^2}, \quad r_2 = \sqrt{x^2 + (h + y)^2}.$$

$$\varphi(0, y) = ?, \quad r_1(0, h) = |h - y|, \quad r_2(0, h) = |h + y|$$

$$\varphi(0, y) = y \cdot E_o - \frac{E_o h}{\ln \frac{2h}{a}} \ln \left| \frac{h + y}{h - y} \right|.$$

За $x = 0$, због симетрије, постоји само у компонента поља:

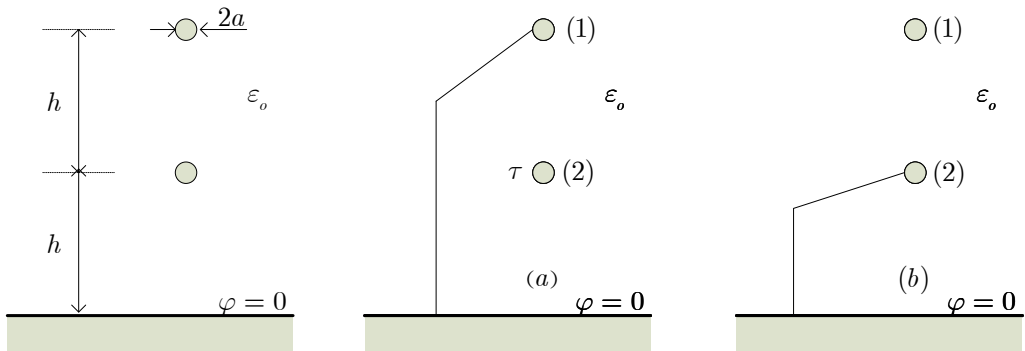
$$E_y(0, y) = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} \left(E_o y - \frac{h E_o}{\ln \frac{2h}{a}} \ln \left| \frac{h + y}{h - y} \right| \right),$$

$$E_y(0, y) = -E_o + \frac{h E_o}{\ln \frac{2h}{a}} \left(\frac{1}{|h + y|} + \frac{1}{|h - y|} \right),$$

$$E_y(0, a) = -E_o + \frac{2h^2 E_o}{(h^2 - a^2) \ln \frac{2h}{a}} \approx \frac{2E_o}{\ln \frac{2h}{a}} - E_o.$$

Примјер 1.23

Танак двожицни вод постављен је изнад проводне равни као на слици. У првом стационарном стању горњи проводник је уземљен а доњи оптерећен са τ и остављен слободан. Затим је уземљење премјештено са горњег на доњи проводник. Одредити: (а) наелектрисање горњег проводника у првом стационарном стању, (б) распојелу η на земљи у првом стационарном стању и (ц) потенцијал проводника у другом стационарном стању, [178].



Слика 1.21

Рјешење:

(а)

Наелектрисање првог проводника у првом стационарном стању?

$$\varphi_1 = a_{11}\tau_1 + a_{12}\tau, \quad \varphi_2 = a_{21}\tau_1 + a_{22}\tau$$

$$a_{11} = \frac{1}{2\pi\epsilon_o} \ln \frac{4h}{a}, \quad a_{12} = a_{21} = \frac{1}{2\pi\epsilon_o} \ln \frac{3h}{h} = \frac{1}{2\pi\epsilon_o} \ln 3, \quad a_{22} = \frac{1}{2\pi\epsilon_o} \ln \frac{2h}{a}.$$

$$\varphi_1 = 0 = a_{11}\tau_1 + a_{12}\tau, \Rightarrow \tau_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}}\tau = -\frac{\ln 3}{\ln \frac{4h}{a}}\tau.$$

(б)

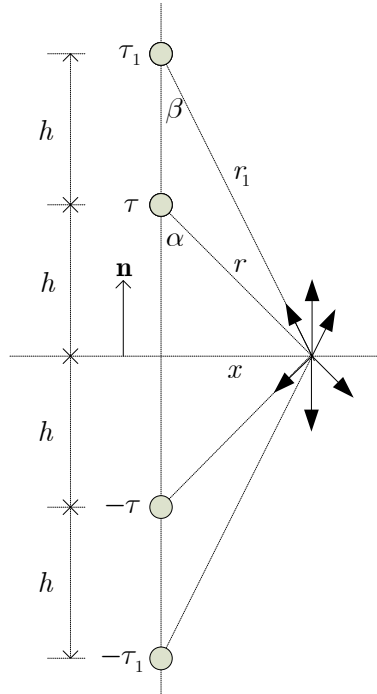
Индуковано оптерећење на површини земље у првом стационарном стању?

$$E = 2 \frac{\tau_1}{2\pi\epsilon_o r_1} \cos \beta - 2 \frac{\tau}{2\pi\epsilon_o r} \cos \alpha$$

$$\cos \beta = \frac{2h}{r_1}, \cos \alpha = \frac{h}{r},$$

$$E = -\frac{\tau h}{\pi\epsilon_o} \left(\frac{1}{h^2 + x^2} + \frac{\ln 9}{(4h^2 + x^2) \ln \frac{4h}{a}} \right),$$

$$\eta_i = \epsilon_o E_n = -\frac{\tau h}{\pi} \left(\frac{1}{h^2 + x^2} + \frac{\ln 9}{(4h^2 + x^2) \ln \frac{4h}{a}} \right).$$



Слика 1.22

(ц)

Тражимо потенцијал горњег проводника у односу на земљу у другом стационарном стању?

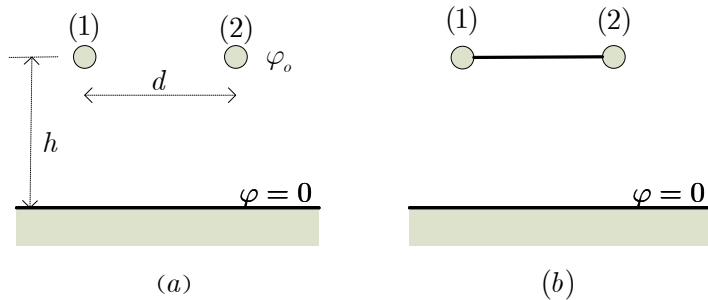
Када се уземљење пренесе на доњи проводник наелектрисање горњег проводника се неће промијенити $\tau_{2a} = \tau_{1a}$, а $\varphi_2 = 0$:

$$\begin{aligned}\varphi_2 &= a_{21}\tau_1 + a_{22}\tau_2 = 0 \Rightarrow \tau_2 = -\frac{a_{21}}{a_{22}}\tau_1 \\ \varphi_1 &= a_{11}\tau_1 + a_{12}\tau_2 = a_{11}\tau_1 - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{22}}\tau_1, \\ \varphi_1 &= \frac{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)}{a_{22}} \left(-\frac{a_{12}}{a_{11}}\tau \right) = -\frac{a_{12}(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)}{a_{11}a_{22}}\tau\end{aligned}$$

Примјер 1.24

У вакууму изнад бесконачне савршено проводне равни налазе се паралелни проводници (1) и (2). Плоупречник проводника је a , растојање оса d , висина изнад равни h , ($d, h \gg a$). У почетку први проводник је **ненаелектрисан**, а други **на потенцијалу** φ_o , слика а). Након тога проводници су краткоспојени, слика б).

Одредити: (а) потенцијал првог проводника и наелектрисање другог проводника у почетном положају, (б) наелектрисања и потенцијале проводника након њиховог кратког спајања, [179].



Слика 1.23

(а)

$$\begin{aligned}a_{11} &= a_{22} = \frac{1}{2\pi\epsilon_o} \ln \frac{2h}{a}, & a_{12} &= a_{21} = \frac{1}{2\pi\epsilon_o} \ln \frac{\sqrt{d^2 + 4h^2}}{d}, \\ \tau_{1a} &= 0, & \varphi_{2a} &= \varphi_o.\end{aligned}$$

$$\varphi_{1a} = a_{11}\tau_{1a} + a_{12}\tau_{2a} = a_{12}\tau_{2a}, \quad \varphi_{2a} = a_{21}\tau_{1a} + a_{22}\tau_{2a} = a_{22}\tau_{2a} = \varphi_o$$

$$\varphi_{1a} = a_{12} \frac{\varphi_o}{a_{22}} = \varphi_o \frac{\ln \frac{\sqrt{d^2 + 4h^2}}{d}}{\ln \frac{2h}{a}}, \quad \tau_{2a} = \frac{\varphi_o}{a_{22}} = \frac{2\pi\epsilon_o\varphi_o}{\ln \frac{2h}{a}}.$$

(b)

$$\tau_{1b} + \tau_{2b} = \tau_{2a} = \frac{\varphi_o}{a_{22}}, \quad \varphi_{1b} = \varphi_{2b}, \Rightarrow (a_{11} - a_{21})\tau_{1b} = (a_{22} - a_{12})\tau_{2b} \Rightarrow$$

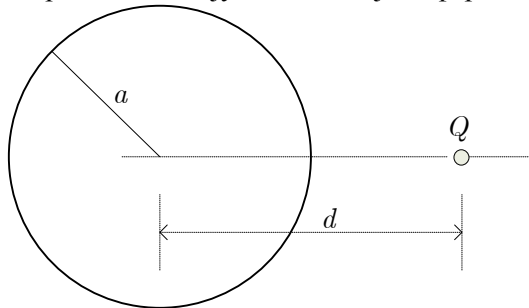
$$\tau_{1b} = \tau_{2b} = \frac{\tau_{2a}}{2} = \frac{\varphi_o}{2a_{22}} = \frac{\pi\epsilon_o\varphi_o}{\ln \frac{2h}{a}},$$

$$\varphi_{1b} = (a_{11} + a_{12})\tau_{1b} = (a_{11} + a_{12})\frac{\tau_{2a}}{2} = (a_{11} + a_{12})\frac{\varphi_o}{2a_{22}},$$

$$\varphi_{1b} = \frac{\ln \frac{2h}{a} + \ln \frac{\sqrt{d^2 + 4h^2}}{d}}{\ln \left(\frac{2h}{a} \right)^2} \varphi_o.$$

Примјер 1.25

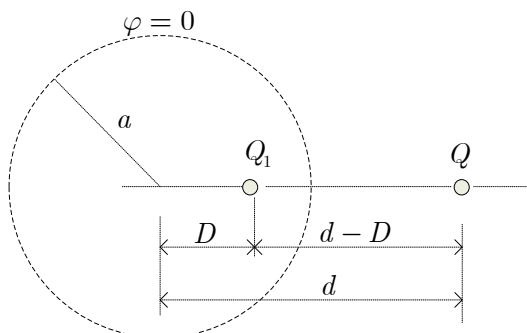
На растојању d од центра проводне сфере полупречника a налази се тачкасто наелектрисање Q . Израчунати рад који је потребно извршити да би се ово наелектрисање удаљило у бесконачност, ако је сфера: (а) уземљена, (б) изолована, тј. одвојена од извора. Одредити пливајући потенцијал сфере, [162].



Слика 1.24

Рјешење:

а) Проводна сфера је уземљена.



$$Q_1 = -\frac{a}{d}Q,$$

$$D = \frac{a^2}{d},$$

$$d - D = \frac{d^2 - a^2}{d}.$$

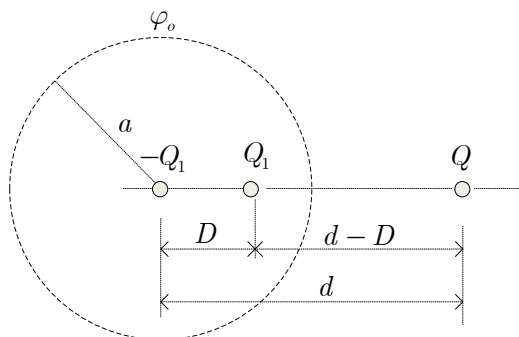
Слика 1.25

$$F(d) = \frac{Q \cdot Q_1}{4\pi\epsilon_o (d - D)^2} = -\frac{aQ^2}{4\pi\epsilon_o} \frac{d}{(d^2 - a^2)^2}.$$

Рад потребан да се Q удаљи у бесконачност:

$$A = \left| -\frac{Q^2 a}{4\pi\epsilon_o} \int_d^\infty \frac{r dr}{(r^2 - a^2)^2} \right| = \frac{aQ^2}{8\pi\epsilon_o (d^2 - a^2)}.$$

б) Проводна сфера је изолована. Она ће доћи на пливајући потенцијал φ_o . Њено укупно наелектрисање биће једнако нули.



Слика 1.26

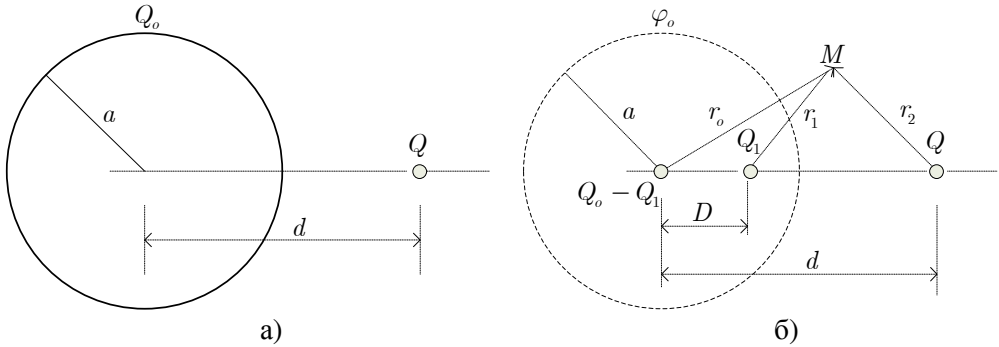
$$F(d) = -\frac{Q^2 da}{4\pi\epsilon_o (d^2 - a^2)^2} + \frac{Q^2 a}{4\pi\epsilon_o d^3},$$

$$A = \left| -\frac{Q^2 a}{4\pi\epsilon_o} \int_d^\infty \frac{r dr}{(r^2 - a^2)^2} + \frac{Q^2 a}{4\pi\epsilon_o} \int_d^\infty \frac{dr}{r^3} \right|$$

$$A = \frac{Q^2 a^3}{8\pi\epsilon_o d^2 (d^2 - a^2)}. \quad \varphi_o = \frac{-Q_1}{4\pi\epsilon_o a} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o d}.$$

Примјер 1.26

Одредити поље које ствара наелектрисана метална лопта и пунктуално оптерећење ван ње. Одредити пливајући потенцијал лопте, [180].



Слика 1.27

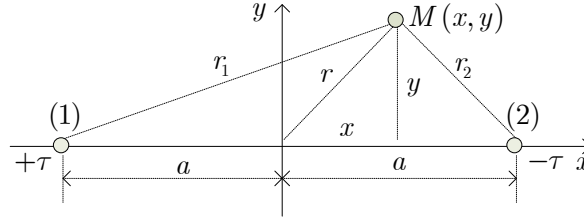
Рјешење:

$$Q_1 = -\frac{a}{d} Q, \quad D = \frac{a^2}{d}, \quad \mathbf{E}(M) = \frac{Q_o - Q_1}{4\pi\epsilon_o r_o^2} \hat{\mathbf{r}}_o + \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_o r_1^2} \hat{\mathbf{r}}_1 + \frac{Q}{4\pi\epsilon_o r_2^2} \hat{\mathbf{r}}_2,$$

$$\varphi_o = \frac{Q_o - Q_1}{4\pi\epsilon_o a} = \frac{dQ_o + aQ}{4\pi\epsilon_o ad}.$$

Примјер 1.27

Анализирати електростатички систем двије бесконачно дуге, равномерно подужно наелектрисане осе у хомогеном диелектрику. Нека су наелектрисања једнака и супротног знака. Показати да постоји кружна линија у односу на коју су тачке, у којима осе продиру раван цртежа, инверзне једна другој и да је та кружна линија еквипотенцијална, [181].



Слика 1.28

Поље у околини дуге наелектрисане нити има само радијалну компоненту. Потенцијал у тачки M , слика 1.28 добија се суперпозицијом:

$$\varphi(r) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} + C. \quad (1)$$

Очигледно је да константа C мора имати вриједност нула, јер је за $r_1 = r_2$, тј. у равни у односу на коју су наелектрисане нити симетричне, потенцијал једнак нули. Из израза (1) је очигледно да су једначине еквипотенцијалних линија (поље је планпаралелно, односно исто у свакој равни окомитој на наелектрисане нити):

$$\frac{r_2}{r_1} = k > 0, \quad (2)$$

гдје је k параметар фамилије еквипотенцијалних линија. Са слике 1.28 је очигледно:

$$r_1^2 = (x + a)^2 + y^2, \quad r_2^2 = (x - a)^2 + y^2, \quad (3)$$

Узимајући у обзир (2), добијамо:

$$x^2 + y^2 - 2a \frac{1 + k^2}{1 - k^2} \cdot x + a^2 = 0, \Rightarrow \left(x - a \frac{1 + k^2}{1 - k^2} \right)^2 + y^2 = \frac{4a^2 k^2}{(1 - k^2)^2} \quad (4)$$

Ова једначина представља фамилију кружница чији су центри на x -оси, у тачкама:

$$x_o = a \cdot \frac{1 + k^2}{1 - k^2}, \quad y = 0 \quad (5)$$

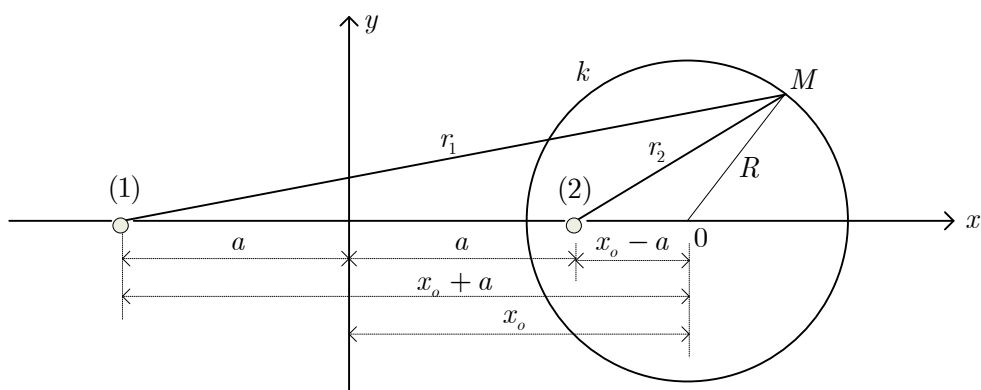
са полупречницима:

$$R = \frac{2ak}{|1 - k^2|}. \quad (6)$$

Посматрајмо један такав круг, слика 1.29. Уочимо троуглове MOI и $MO2$. Из њихове сличности слиједи:

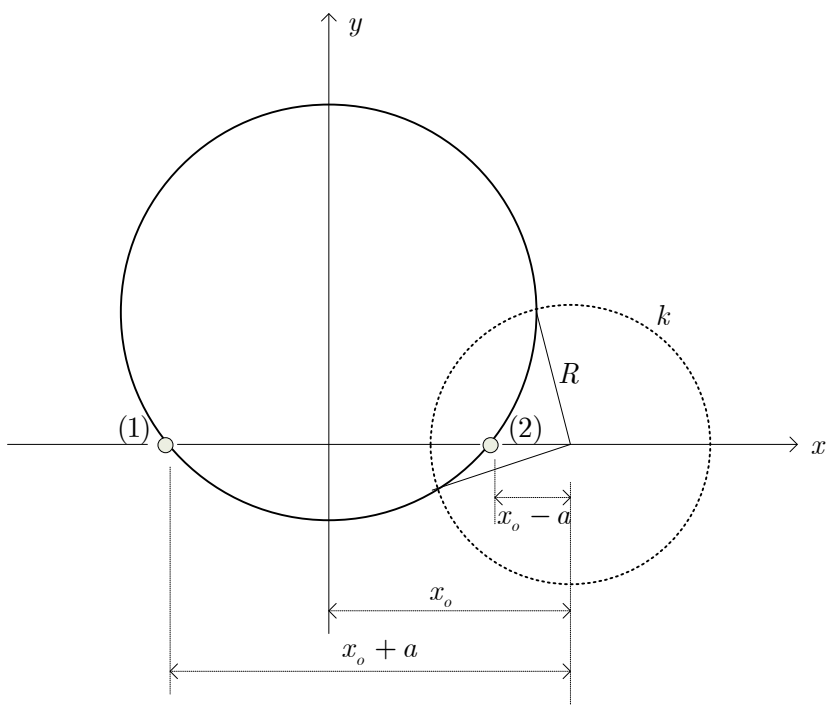
$$\frac{R}{x_o - a} = \frac{x_o + a}{R} = \frac{r_2}{r_1} = k. \quad (7)$$

Ако је $k > 1$, тада је $r_2 > r_1$, те такав круг обухвата тачку (1). Обрнуто, за $k < 1$ круг ће обухватати тачку (2).



Слика 1.29

Нацртајмо кружницу која ће проћи кроз тачке (1) и (2). Центар ове кружнице налази се на у-оси. Повуцимо из центра круга k полупречнике до тачака у којима се ова два круга сијекну. Познато је да је производ одсјечка секанте круга из неке тачке једнак квадрату растојања те тачке до тачке у којој тангента дира круг, слика 1.31.



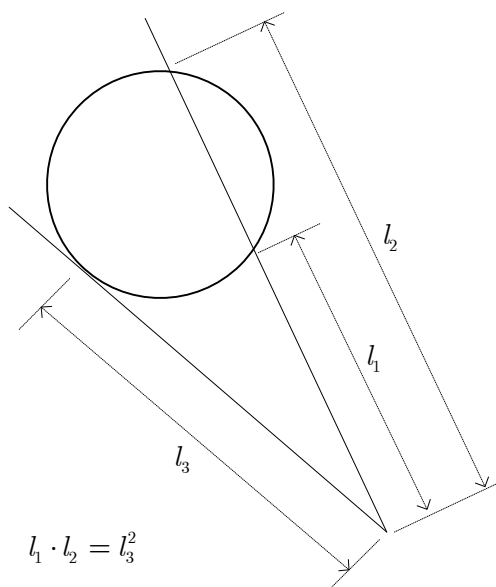
Слика 1.30

Уочавамо да су одсјечци секанте из тачке 0 на круг, који пролази кроз тачке (1) и (2), дужи $(x_o - a)$ и $(x_o + a)$. На основу (7) закључујемо да је производ ових одсјечака једнак:

$$(x_o - a) \cdot (x_o + a) = R^2, \quad (8)$$

односно – тачке у којима се сијеку ова два круга су тачке у којима правци повучени из тачке O тангирају круг који пролази кроз тачке (1) и (2). Дакле, ова два круга се сијеку под правим углом.

Закључак: У посматраном систему еквипотенцијалне линије су кругови чији су центри помјерени у односу на наелектрисане осе. Један од тих кругова дегенерише се у правац са потенцијалом једнаким нули. Линије јачине поља су лукови са почетком на позитивној и завршетком на негативној оси. Израз (8) показује да су тачке у којима осе простиру раван цртежа инверзне једна другој у односу на круг са центром у $(x_o, 0)$ а чији је полупречник R . Дакле, тачке (1) и (2) на слици 1.30 инверзне су једна другој у односу на кругове дефинисане са (5) и (6).



Слика 1.31

Из слике поља двије наелектрисане осе закључујемо да се систем дугих наелектрисаних проводних плаштева на познатом потенцијалу може ријешити замјеном еквивалентним системом наелектрисаних оса.

Примјер 1.28

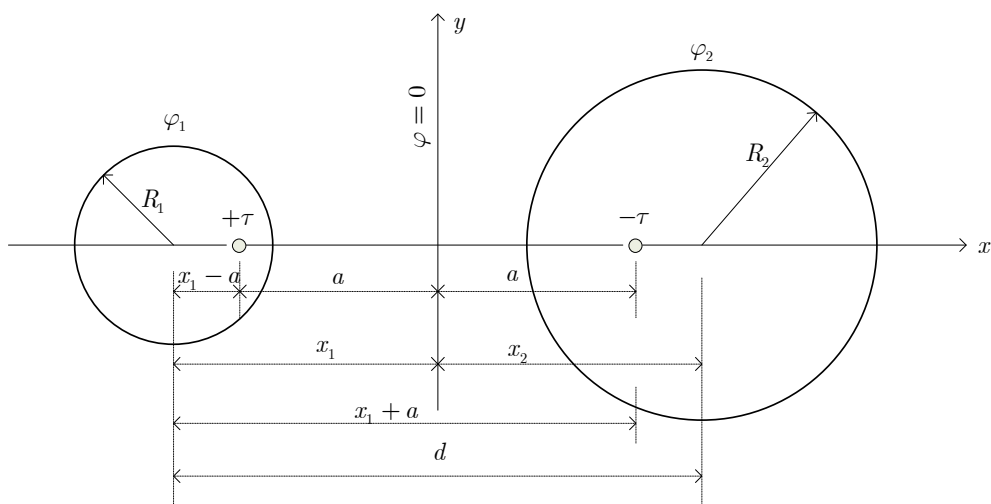
Анализирати поље у електростатичком систему који се састоји од два бесконачно дуга паралелна цилиндрична проводна некоаксијална плашта,[182].

Рјешење:

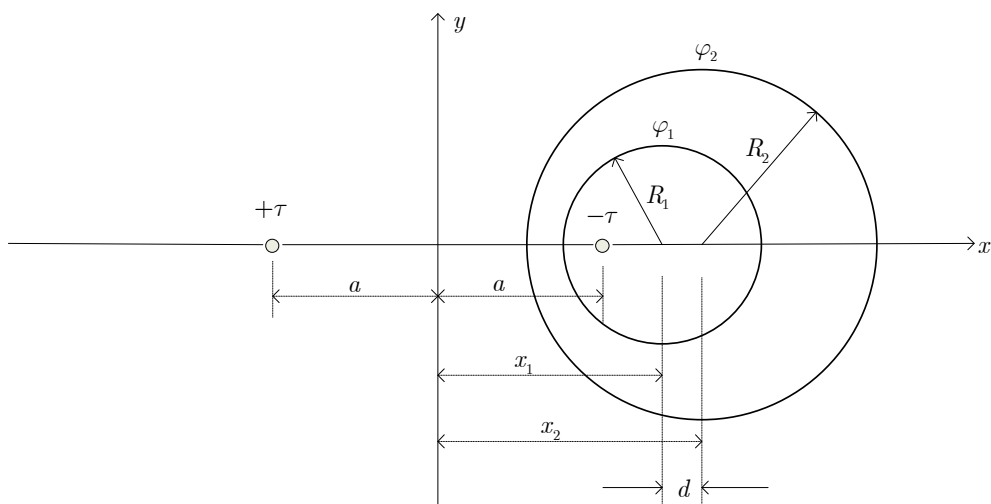
За рјешавање задатка искористимо претходни примјер. Из слике поља двије бесконачно дуге електричне осовине са подужним наелектрисујима $\pm \tau$, очигледно је да било којој цилиндричној еквипотенцијалној површини можемо одредити еквивалентне електричне осе, након чега је лако одредити све величине поља.

Размотримо два карактеристична случаја, слике 1.32 и 1.33. Нека полупречници некоаксијалних цилиндара буду R_1 и R_2 а растојања њихових *геометријских оса* d . Нека је растојање електричних оса $2a$. Пошто су проводни плаштови еквипотенцијалне површине, то ће електричне осовине бити међусобно инверзне у од-

носу на те површине, односно важиће релација (8) из претходног примјера. Одредимо непознате x_1 , x_2 , a и τ .



Слика 1.32



Слика 1.33

За примјер на слици 1.32 очигледно је:

$$\begin{aligned}
 (x_1 - a) \cdot (x_1 + a) &= R_1^2, \\
 (x_2 - a) \cdot (x_2 + a) &= R_2^2, \\
 x_1 + x_2 &= d.
 \end{aligned} \tag{1}$$

За други случај, слика 1.33, аналогно важи:

$$\begin{aligned}
 (x_1 - a) \cdot (x_1 + a) &= R_1^2, \\
 (x_2 - a) \cdot (x_2 + a) &= R_2^2, \\
 x_2 - x_1 &= d.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Уочавамо да је за оба случаја из познатих R_1 , R_2 и d могуће одредити x_1 , x_2 и a , односно то је довољан број података на основу којих је могуће одредити положај електричних оса $\pm \tau$, што опет омогућава једноставно одређивање потенцијала, поља и капацитета.

Из (1) се добија:

$$x_1 = \frac{1}{2} \left(d - \frac{R_2^2 - R_1^2}{d} \right), \quad x_2 = d - x_1, \quad a = \sqrt{x_1^2 - R_1^2}. \tag{3}$$

Из (2) слиједи:

$$x_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{R_2^2 - R_1^2}{d} - d \right), \quad x_2 = d + x_1, \quad a = \sqrt{x_1^2 - R_1^2}. \tag{4}$$

За примјер на слици 1.32:

$$\varphi_1 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{x_1 - R_1 + a}{R_1 - \frac{R_1^2}{x_1 + a}}; \quad \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_o} \ln \frac{R_2 - \frac{R_2^2}{x_2 + a}}{x_2 - R_2 + a}; \tag{5}$$

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_o} \ln \frac{(x_1 + a)(x_2 + a)}{R_1 R_2},$$

$$\tau = \frac{2\pi\epsilon_o \cdot \varphi_1}{\ln \frac{x_1 + a}{R_1}} = \frac{2\pi\epsilon_o \cdot \varphi_2}{\ln \frac{R_2}{x_2 + a}} = \frac{2\pi\epsilon_o \cdot U}{\ln \frac{(x_1 + a)(x_2 + a)}{R_1 R_2}} \tag{6}$$

Аналогно, за примјер са слике 1.33:

$$\varphi_1 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_o} \ln \frac{R_1}{x_1 + a}; \quad \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_o} \ln \frac{R_2}{x_2 + a}; \quad U = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_o} \ln \frac{(x_2 + a) \cdot R_1}{(x_1 + a) \cdot R_2};$$

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_o} \ln \frac{(x_2 + a) \cdot R_1}{(x_1 + a) \cdot R_2},$$

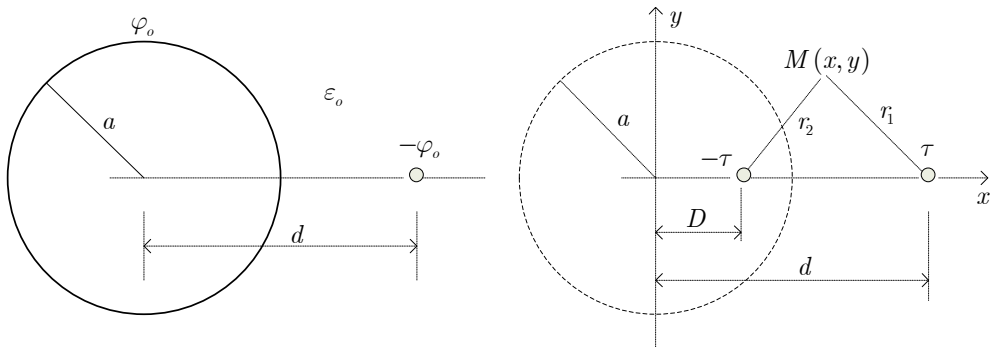
$$\tau = \frac{2\pi\epsilon_o \cdot \varphi_1}{\ln \frac{R_1}{x_1 + a}} = \frac{2\pi\epsilon_o \cdot \varphi_2}{\ln \frac{R_2}{x_2 + a}} = \frac{2\pi\epsilon_o \cdot U}{\ln \frac{(x_2 + a) \cdot R_1}{(x_1 + a) \cdot R_2}}$$

У оба случаја подужна капацитивност некоаксијалних проводних плаштева је:

$$C' = \frac{\tau}{U}. \quad (7)$$

Примјер 1.29

Поред бесконачно дугог цилиндричног проводника кружног попречног пресеја, полупречника a , који се налази на потенцијалу φ_o , паралелно његовој оси на растојању d од центра постављен је бесконачно дуг линијски проводник полупречника b ($b < a, d$), који се налази на потенцијалу $-\varphi_o$. Референтна тачка за оба потенцијала је иста. Одредити потенцијал у тачкама између проводника, [166].



Слика 1.34

Рјешење:

Користићемо теорему лика у цилиндричном огледалу. Потенцијал у тачки М одређен је са:

$$\varphi_M = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_o} \ln r_1 + \frac{\tau}{2\pi\epsilon_o} \ln r_2 + \varphi_a = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_o} \ln \frac{r_2}{r_1} + \varphi_a ,$$

$$\varphi_a = ?$$

За тачку на површини цилиндричног проводника:

$$x^2 + y^2 = a^2 ,$$

$$r_1^2 = y^2 + (d - x)^2 = y^2 + d^2 - 2dx + x^2 = a^2 + d^2 - 2dx$$

$$r_2^2 = y^2 + (x - D)^2 = y^2 + D^2 - 2Dx + x^2 = a^2 + D^2 - 2Dx \Rightarrow$$

$$r_2^2 = a^2 - 2x \frac{a^2}{d} + \frac{a^4}{d^2} = \frac{a^2}{d^2} (d^2 - 2xd + a^2) \Rightarrow$$

$$\frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{a^2}{d^2} \Rightarrow \frac{r_2}{r_1} = \frac{a}{d} .$$

$$\varphi_M = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_o} \ln \frac{a}{d} + \varphi_a = \varphi_o \Rightarrow \varphi_a = \varphi_o - \frac{\tau}{2\pi\epsilon_o} \ln \frac{a}{d} \Rightarrow$$

$$\varphi_M = \varphi_o + \frac{\tau}{2\pi\epsilon_o} \ln \frac{r_2 d}{r_1 a} .$$

$$\tau = ?$$

За тачку на линијском проводнику:

$$r_1 = b, \quad r_2 = d - D - b = d - \frac{a^2}{d} - b = \frac{d^2 - a^2 - bd}{d} ,$$

$$\frac{r_2 d}{r_1 a} = \frac{d^2 - a^2 - bd}{ab} , \quad -\varphi_o = \varphi_o + \frac{\tau}{2\pi\epsilon_o} \ln \frac{d^2 - a^2 - bd}{ab} , \Rightarrow$$

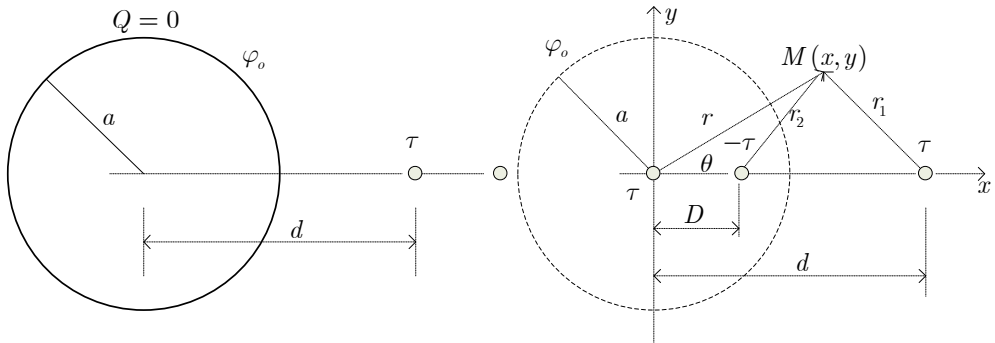
$$\frac{\tau}{2\pi\epsilon_o} = \frac{-2\varphi_o}{\ln \frac{d^2 - a^2 - bd}{ab}} \Rightarrow$$

$$\varphi(x, y) = \varphi_o \left(1 - \frac{1}{\ln \frac{d^2 - a^2 - bd}{ab}} \ln \frac{r_2^2 d^2}{r_1^2 a^2} \right),$$

$$r_1^2 = y^2 + (d - x)^2; \quad r_2^2 = y^2 + \left(x - \frac{a^2}{d} \right)^2.$$

Примјер 1.30

Поред **неоптерећеног** цилиндричног проводника кружног пресека, полупречника a налази се подужно наелектрисана нит, подужне густине наелектрисања τ , на растојању $d > a$ од осе цилиндра. Ако је цилиндрични проводник на потенцијалу φ_o одредити функцију потенцијала у произвољној тачки M у околини цилиндричног проводника и површинску густину наелектрисања на цилиндричном проводнику, [167].



Слика 1.35

Рјешење:

Пошто је укупно оптерећење цилиндра једнако нули то у центар цилиндра морамо поставити наелектрисану нит са τ . Потенцијал у тачки M ће тада бити:

$$\varphi_M = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_o} \ln r_1 + \frac{\tau}{2\pi\epsilon_o} \ln r_2 - \frac{\tau}{2\pi\epsilon_o} \ln r + \varphi_a = \varphi_a - \frac{\tau}{2\pi\epsilon_o} \ln r_1 + \frac{\tau}{2\pi\epsilon_o} \ln \frac{r_2}{r}.$$

Одредимо φ_a . Узмемо тачку на површини цилиндра.

$$r_1 = d - a, \quad r_2 = a - D = a - \frac{a^2}{d} = \frac{a(d - a)}{d}, \quad r = a \Rightarrow$$

$$\varphi_o = \varphi_a - \frac{\tau}{2\pi\epsilon_o} \ln d. \Rightarrow \varphi_a = \varphi_o + \frac{\tau}{2\pi\epsilon_o} \ln d, \Rightarrow \varphi_M = \varphi_o + \frac{\tau}{2\pi\epsilon_o} \ln \frac{r_2 \cdot d}{r \cdot r_1}.$$

Пошто је цилиндар проводни на његовој површини постоји само г-компонента електричног поља:

$$\eta = \epsilon_o E_r / r = a, \quad E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}.$$

$$r_1^2 = r^2 + d^2 - 2rd \cdot \cos \theta, \quad r_2^2 = r^2 + D^2 - 2rD \cdot \cos \theta \Rightarrow$$

$$\frac{dr_1}{dr} = \frac{r - d \cdot \cos \theta}{r_1}, \quad \frac{dr_2}{dr} = \frac{r - D \cdot \cos \theta}{r_2},$$

$$\varphi = \varphi_o + \frac{\tau}{2\pi\epsilon_o} (\ln d - \ln r_1 + \ln r_2 - \ln r) \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dr} (\ln r_1) = \frac{r - d \cdot \cos \theta}{r_1^2}, \quad \frac{d}{dr} (\ln r_2) = \frac{r - D \cdot \cos \theta}{r_2^2}, \quad \frac{d}{dr} (\ln r) = \frac{1}{r} \Rightarrow$$

$$E_r = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_o} \left(\frac{r - d \cdot \cos \theta}{r_1^2} - \frac{r - D \cdot \cos \theta}{r_2^2} + \frac{1}{r} \right) / r = a \Rightarrow$$

$$\eta = \frac{\tau}{2\pi} \left(\frac{1}{a} + \frac{a - d \cos \theta}{a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta} - \frac{a - D \cos \theta}{a^2 + D^2 - 2aD \cos \theta} \right).$$

Примјер 1.31

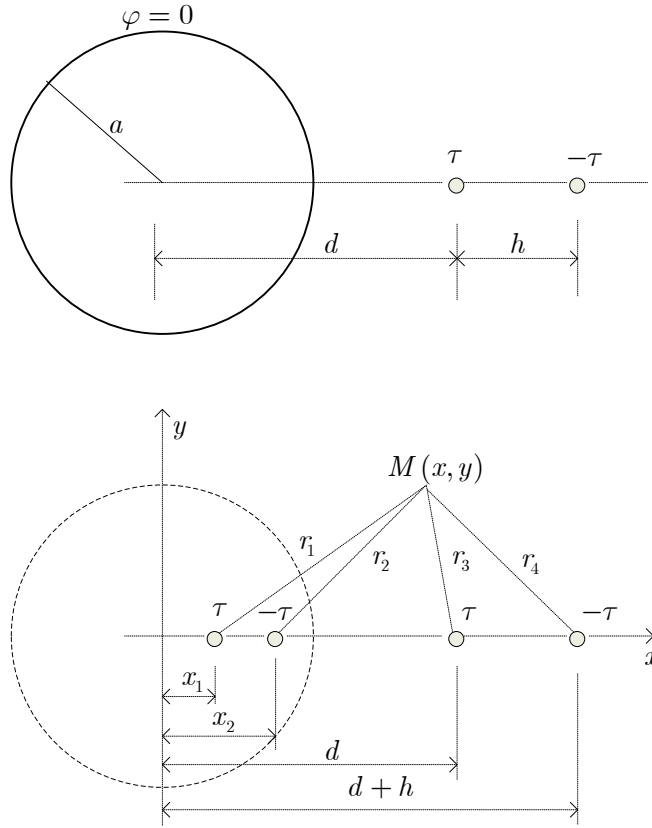
Танак двожични вод полупречника проводника r_o постављен је у близини масивног уземљеног цилиндричног проводника. Попречни пресјек система дат је на слици, $r_o \ll h, a, d$. Извести израз за функцију потенцијала у произвољној тачки у ваздуху, [168].

Рјешење:

За тачку М, према ознакама на слици, вриједи:

$$x_1 = \frac{a^2}{d + h}, \quad x_2 = \frac{a^2}{d}.$$

$$r_1^2 = (x - x_1)^2 + y^2 = y^2 + \left(x - \frac{a^2}{d + h} \right)^2 = x^2 - \frac{2a^2 x}{d + h} + \frac{a^4}{(d + h)^2} + y^2$$



Слика 1.36

$$r_2^2 = y^2 + (x - x_2)^2 = y^2 + \left(x - \frac{a^2}{d}\right)^2 = x^2 - \frac{2a^2x}{d} + \frac{a^4}{d^2} + y^2,$$

$$r_3^2 = (d - x)^2 + y^2 = d^2 - 2dx + x^2 + y^2,$$

$$r_4^2 = (d + h - x)^2 + y^2 = (d + h)^2 - 2x(d + h) + x^2 + y^2,$$

$$\varphi_M = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_o} \ln r_1 + \frac{\tau}{2\pi\epsilon_o} \ln r_2 - \frac{\tau}{2\pi\epsilon_o} \ln r_3 + \frac{\tau}{2\pi\epsilon_o} \ln r_4 + \varphi_a = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_o} \ln \frac{r_2 r_4}{r_1 r_3} + \varphi_a,$$

$$\varphi_a = ?$$

Узмимо тачку на површини цилиндра: $x^2 + y^2 = a^2$, $\varphi = 0$,

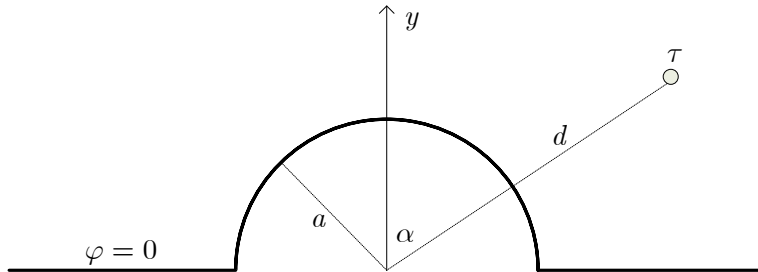
$$\begin{aligned} r_1^2 &= a^2 \left(1 - \frac{2x}{d+h} + \frac{a^2}{(d+h)^2} \right), \quad r_2^2 = a^2 \left(1 - \frac{2x}{d} + \frac{a^2}{d^2} \right), \\ r_3^2 &= a^2 \left(1 - \frac{2dx}{a^2} + \frac{d^2}{a^2} \right), \quad r_4^2 = a^2 \left(1 + \frac{(d+h)^2}{a^2} - \frac{2(d+h)x}{a^2} \right), \quad \Rightarrow \\ \left(\frac{r_2 r_4}{r_1 r_3} \right)^2 &= \left(\frac{d+h}{d} \right)^2. \end{aligned}$$

$$0 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{d+h}{d} \right) + \varphi_a \quad \Rightarrow \quad \varphi_a = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{d+h}{d} \right) \Rightarrow$$

$$\varphi_M = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2 r_4}{r_1 r_3} - \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{d+h}{d} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2 r_4 d}{r_1 r_3 (d+h)}.$$

Примјер 1.32

На неограниченој проводној равни нултог потенцијала налази се полуцилиндрична избочина полупречника a . Извести изразе за компоненте поља ако је бесконачно дуги линијски проводник подужног наелектрисања τ постављен као на слици, [169].

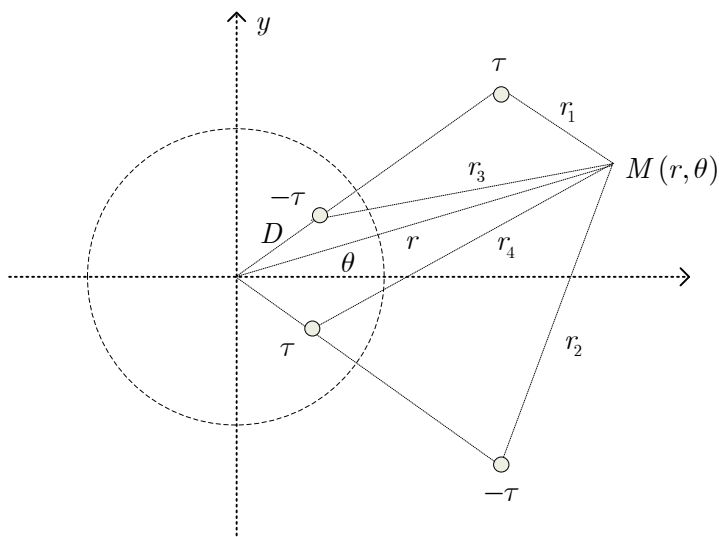


Слика 1.37

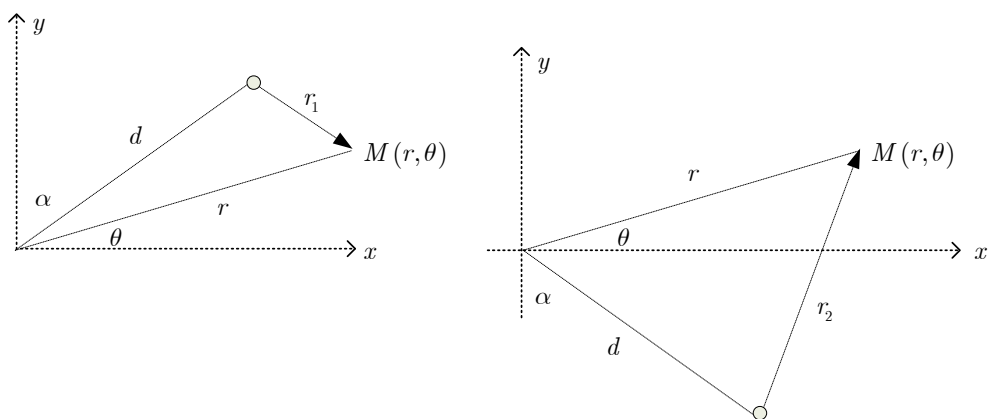
Рјешење:

За рјешавање задатка користимо теореме lika у равном и цилиндричном огледалу. Поставићемо цилиндрични координатни систем као на слици:

$$x = r \cdot \cos \theta, \quad y = r \cdot \sin \theta, \quad D = \frac{a^2}{d}. \quad \varphi_M = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2 r_3}{r_1 r_4}$$



Слика 1.38



Слика 1.39

$$r_1^2 = (r \cdot \cos \theta - d \cdot \sin \alpha)^2 + (d \cdot \cos \alpha - r \cdot \sin \theta)^2 = r^2 + d^2 - 2rd \sin(\theta + \alpha),$$

$$r_2^2 = (r \cdot \cos \theta - d \cdot \sin \alpha)^2 + (r \cdot \sin \theta + d \cdot \cos \alpha)^2 = r^2 + d^2 - 2rd \sin(\alpha - \theta),$$

$$r_3^2 = r^2 + D^2 - 2rD \sin(\theta + \alpha), \quad r_4^2 = r^2 + D^2 - 2rD \sin(\alpha - \theta).$$

$$\varphi_M = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} (\ln r_2 + \ln r_3 - \ln r_1 - \ln r_4);$$

$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r}.$$

$$\frac{dr_1}{dr} = \frac{r - d \cdot \sin(\alpha + \theta)}{r_1}, \quad \frac{dr_2}{dr} = \frac{r - d \cdot \sin(\alpha - \theta)}{r_2},$$

$$\frac{dr_3}{dr} = \frac{r - D \cdot \sin(\alpha + \theta)}{r_3}, \quad \frac{dr_4}{dr} = \frac{r - D \cdot \sin(\alpha - \theta)}{r_4}.$$

$$E_r = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{r - d \cdot \sin(\alpha + \theta)}{r_1^2} - \frac{r - d \cdot \sin(\alpha - \theta)}{r_2^2} - \frac{r - D \cdot \sin(\alpha + \theta)}{r_3^2} + \frac{r - D \cdot \sin(\alpha - \theta)}{r_4^2} \right),$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta},$$

$$\frac{1}{r} \frac{dr_1}{d\theta} = \frac{-d \cdot \cos(\alpha + \theta)}{r_1}, \quad \frac{1}{r} \frac{dr_2}{d\theta} = \frac{d \cdot \cos(\alpha - \theta)}{r_2},$$

$$\frac{1}{r} \frac{dr_3}{d\theta} = \frac{-D \cdot \cos(\alpha + \theta)}{r_3}, \quad \frac{1}{r} \frac{dr_4}{d\theta} = \frac{D \cdot \cos(\theta - \alpha)}{r_4}.$$

$$E_\theta = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \left(-\frac{d \cdot \cos(\alpha + \theta)}{r_1^2} - \frac{d \cdot \cos(\alpha - \theta)}{r_2^2} + \frac{D \cdot \cos(\alpha + \theta)}{r_3^2} + \frac{D \cdot \cos(\theta - \alpha)}{r_4^2} \right).$$

Примјер 1.33

Метална лопта полупречника a , наелектрисана је количином електрицитета Q налази се у хомогеном диелектрику диелектричне константе ϵ . Под дејством електричног поља тог наелектрисања диелектрик се поларизује. Доказати да се утицај поларизованог диелектрика своди на утицај слоја везаних наелектрисања уз површину металне лопте, [170].

Рјешење:

Ако узмемо сферну површину полупречника $r \succ a$:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_s, \Rightarrow D_r 4r^2 \pi = Q_s, \Rightarrow D = \frac{Q_s}{4\pi r^2}, E = E_r = \frac{Q_s}{4\pi \epsilon r^2}.$$

Интензитет вектора поларизације је:

$$\mathbf{P} = \alpha_e \mathbf{E} = \chi_e \epsilon_o \mathbf{E} = (\epsilon_r - 1) \epsilon_o \mathbf{E} = (\epsilon - \epsilon_o) \mathbf{E}, \Rightarrow P = (\epsilon - \epsilon_o) \frac{Q_s}{4\pi \epsilon \cdot r^2}.$$

$$\rho_v = -\text{div} \mathbf{P} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 P_r) = -\frac{1}{r^2} \left(2r P_r + r^2 \frac{\partial P_r}{\partial r} \right) = -\frac{2P_r}{r} - \frac{\partial P_r}{\partial r},$$

$$\rho_v = -\frac{2P_r}{r} - \frac{\partial P_r}{\partial r} = -\frac{2(\epsilon - \epsilon_o) Q_s}{4\pi \epsilon r^3} + \frac{2(\epsilon - \epsilon_o) Q_s}{4\pi \epsilon r^3} = 0.$$

Уз саму површину лопте постоје и површинска расподијељена везана наелектрисања густине:

$$\eta_v = -\mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = -P = -(\epsilon - \epsilon_o) \frac{Q_s}{4\pi \epsilon \cdot a^2}.$$

Укупна количина наелектрисања на површини лопте износи:

$$Q = Q_s + Q_v = Q_s + 4\pi a^2 \eta_v = Q_s \frac{\epsilon_o}{\epsilon} = Q_s \frac{1}{\epsilon_r}.$$

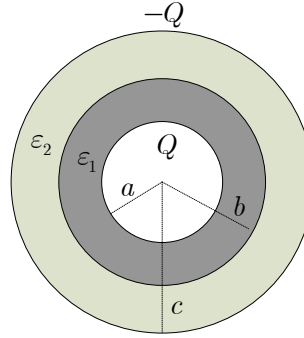
Пошто у диелектрику нема других наелектрисања сав утицај поларизованог диелектрика на поље оптерећења Q_s на лопти састоји се у привидном смањењу наелектрисања на лопти, при чему треба сматрати да се лопта налази у вакууму.

$$E = \frac{Q}{4\pi \epsilon_o \cdot r^2} = \frac{Q_s}{4\pi \epsilon_o \cdot r^2} \frac{\epsilon_o}{\epsilon} = \frac{Q_s}{4\pi \epsilon \cdot r^2}.$$

Примјер 1.34

Диелектрик сферног кондензатора састоји се од два концентрична слоја диелектричних константи ϵ_1 и ϵ_2 . Полупречници електрода су a , b и c као на слици. Ако је кондензатор оптерећен количином електрицитета Q одредити: (а) векторе поља $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$, (б) густину везаних наелектрисања између диелектрика и (ц) капацитет кондензатора, [171].

Рјешење:



Слика 1.40

$$\text{a)} \quad \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_s, \quad D = D_r, \quad D = \frac{Q_s}{4\pi r^2}.$$

$$\text{За } r > c \quad \mathbf{D} = 0.$$

$$\text{За } a < r < b \quad E_1 = \frac{Q_s}{4\pi\epsilon_1 \cdot r^2}. \quad \text{За } b < r < c \quad E_2 = \frac{Q_s}{4\pi\epsilon_2 \cdot r^2}.$$

$$\text{б)} \quad \eta_v = P_{1n} - P_{2n} = (\epsilon_1 - \epsilon_o) E_1 - (\epsilon_2 - \epsilon_o) E_2,$$

$$\eta_v = \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_o)}{4\pi b^2 \epsilon_1} Q_s - \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_o)}{4\pi b^2 \epsilon_2} Q_s = \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2) \epsilon_o}{4\pi b^2 \epsilon_1 \epsilon_2} Q_s.$$

$$\text{ц)} \quad U = \int_a^b E_1 dr + \int_b^c E_2 dr = \frac{Q_s (b - a)}{4\pi\epsilon_1 ab} + \frac{Q_s (c - b)}{4\pi\epsilon_2 bc}.$$

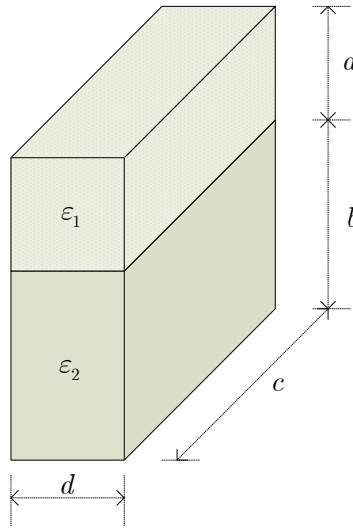
$$\frac{1}{C} = \frac{U}{Q_s} = \frac{b - a}{4\pi\epsilon_1 ab} + \frac{c - b}{4\pi\epsilon_2 bc}.$$

Примјер 1.35

Диелектрик плочастог кондензатора састоји се од два блока диелектричних константи ϵ_1 и ϵ_2 . Растојање плоча кондензатора је d . Остале димензије као на слици. Кондензатор је прикључен на напон U . Ивични ефекат занемарити. Одреди-

ти: (а) векторе поља $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$, (б) густину слободних површинских наелектрисања η_s , (ц) густину везаних површинских наелектрисања η_v , (д) капацитет кондензатора, [172].

Рјешење:



Слика 1.41

а) Вектор поља $\mathbf{E}$ нормалан је на плоче, односно тангентан је на раздвојну површ између диелектрика. Обзиром на гранични услов $E_{1t} = E_{2t}$ закључујемо да у обје диелектричне средине има исту вриједност:

$$U = \int_0^d \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = Ed \quad \Rightarrow \quad E = \frac{U}{d}.$$

$$D_1 = \varepsilon_1 E = \frac{\varepsilon_1 U}{d}, \quad D_2 = \varepsilon_2 E = \frac{\varepsilon_2 U}{d}.$$

б) $\eta_s = D_n \quad \eta_{s1} = \frac{\varepsilon_1 U}{d} \quad \text{и} \quad \eta_{s2} = \frac{\varepsilon_2 U}{d}.$

ц) $|\eta_{v1}| = |\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{n}| = P_1 = \varepsilon_o (\varepsilon_{r1} - 1) E_1 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_o) \frac{U}{d},$

$$|\eta_{v2}| = |\mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{n}| = P_2 = \varepsilon_o (\varepsilon_{r2} - 1) E_2 = (\varepsilon_2 - \varepsilon_o) \frac{U}{d}.$$

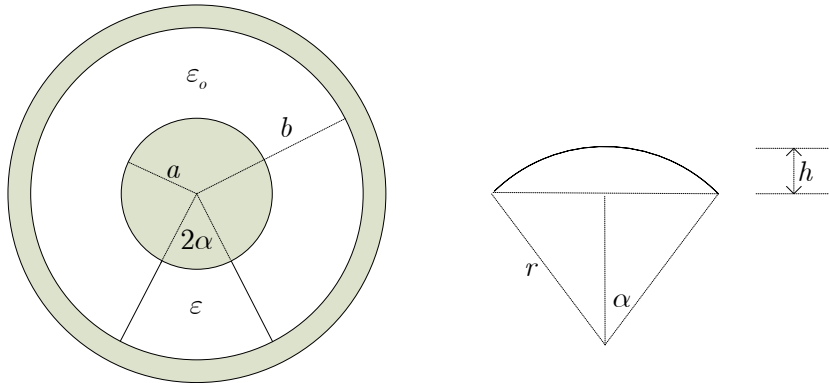
Укупна густина наелектрисања на плочама је константна:

$$\eta_{s1} + \eta_{v1} = \eta_{s2} + \eta_{v2} = \epsilon_o \frac{U}{d}.$$

$$\text{д) } C = \frac{Q}{U} = \frac{(a \cdot c) \cdot \eta_{s1} + (b \cdot c) \cdot \eta_{s2}}{U} = \frac{(ac \cdot \epsilon_1 + bc \cdot \epsilon_2) U}{U} \frac{1}{d} = \epsilon_1 \frac{ac}{d} + \epsilon_2 \frac{bc}{d}.$$

Примјер 1.36

Унутрашња електрода сферног кондензатора постављена је на купасту подметач од диелектрика диелектричне константе ϵ . У осталом дијелу кондензатора је ваздух. Изводнице купастог подметача се сијеку у центру сфера кондензатора, а угао између њих је 2α . Ако је наелектрисање кондензатора Q одредити: (а) векторе поља $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$, (б) густину слободних површинских наелектрисања η_s , (ц) густину везаних површинских наелектрисања η_v и (д) капацитет кондензатора, [183].



Слика 1.42

Рјешење:

а) Поље је радијално без обзира на диелектрични подметач:

$$U = \int_a^b E dr, \quad Q_s = Q.$$

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D_o \cdot S_o + D \cdot S = Q_s, \quad E \cdot (\epsilon_o S_o + \epsilon S) = Q_s,$$

$$S = 2r\pi h = 2r\pi (r - r \cos \alpha) = 2r^2\pi (1 - \cos \alpha),$$

$$S_o = 4r^2\pi - S = 2r^2\pi (1 + \cos \alpha).$$

$$E(r) = \frac{Q_s}{\varepsilon_o 2r^2\pi (1 + \cos \alpha) + \varepsilon 2r^2\pi (1 - \cos \alpha)},$$

$$E(r) = \frac{Q}{2r^2\pi [(\varepsilon_o + \varepsilon) - (\varepsilon - \varepsilon_o) \cos \alpha]}.$$

$$D_o(r) = \varepsilon_o E(r), \quad D(r) = \varepsilon E(r)$$

$$\text{б) } \eta_{so}(a) = D_o(a) = \frac{\varepsilon_o Q}{2a^2\pi [(\varepsilon_o + \varepsilon) - (\varepsilon - \varepsilon_o) \cos \alpha]},$$

$$\eta_s(a) = D(a) = \frac{\varepsilon Q}{2a^2\pi [(\varepsilon_o + \varepsilon) - (\varepsilon - \varepsilon_o) \cos \alpha]},$$

$$\eta_{so}(b) = D_o(b), \quad \eta_s(b) = D(b).$$

$$\text{ц) } \eta_v(a) = -P(a) = -(\varepsilon - \varepsilon_o) E(a).$$

$$\text{д) } U = \int_a^b \frac{Q}{2r^2\pi [(\varepsilon_o + \varepsilon) - (\varepsilon - \varepsilon_o) \cos \alpha]} dr,$$

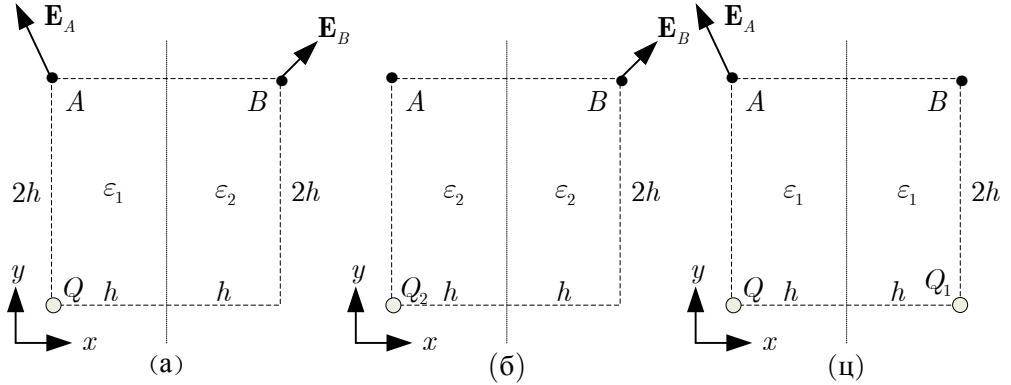
$$U = \frac{Q}{2\pi [(\varepsilon_o + \varepsilon) - (\varepsilon - \varepsilon_o) \cos \alpha]} \cdot \frac{b - a}{ab}.$$

$$C = \frac{Q}{U} = 2\pi [(\varepsilon_o + \varepsilon) - (\varepsilon - \varepsilon_o) \cos \alpha] \frac{ab}{b - a}.$$

Примјер 1.37

У тачкама А и В познати су интензитети вектора електричног поља E_A и E_B које ствара неко тачкасто оптерећење Q које се налази у хомогеном диелектрику диелектричне константе ε_1 . Ако су диелектричне константе ε_1 и ε_2 познате одредити векторе E_A и E_B , [184].

Рјешење:



Слика 1.43

За тачку B , слика 1.43 б):

$$E_B = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_2 8h^2}, \quad Q_2 = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} Q, \quad E_B = \frac{Q}{16\pi h^2 (\epsilon_1 + \epsilon_2)},$$

$$\mathbf{E}_B = \frac{Q\sqrt{2}}{32\pi h^2 (\epsilon_1 + \epsilon_2)} (\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}).$$

За тачку A слика 1.43 ц):

$$E_{Ax} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_1 8h^2}, \quad Q_1 = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} Q, \quad E_{Ax} = -\frac{\sqrt{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2)Q}{64\pi\epsilon_1 h^2 (\epsilon_1 + \epsilon_2)}.$$

$$E_{Ay} = \frac{\sqrt{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2)Q}{64\pi\epsilon_1 h^2 (\epsilon_1 + \epsilon_2)} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_1 4h^2},$$

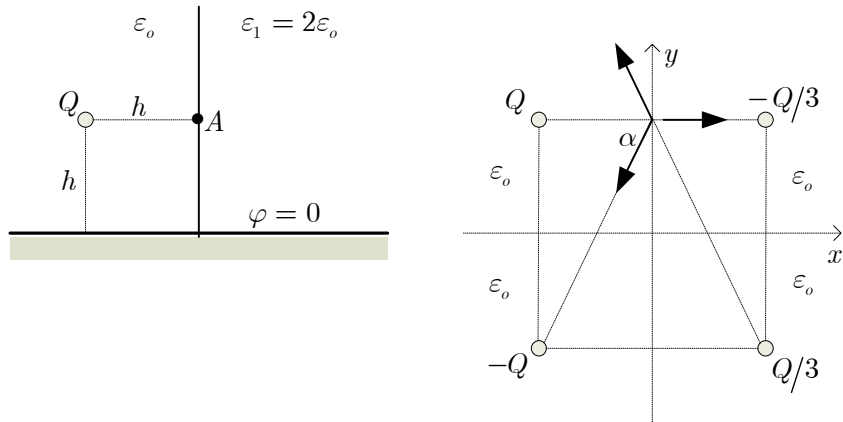
$$E_{Ay} = \frac{Q}{16\pi\epsilon_1 h^2} \frac{4(\epsilon_1 + \epsilon_2) + \sqrt{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2)}{4(\epsilon_1 + \epsilon_2)}.$$

$$\mathbf{E}_A = \frac{Q}{64\pi\epsilon_1 h^2 (\epsilon_1 + \epsilon_2)} \left\{ \left[-\sqrt{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2) \right] \hat{\mathbf{x}} + \left[4(\epsilon_1 + \epsilon_2) + \sqrt{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2) \right] \hat{\mathbf{y}} \right\}$$

Примјер 1.38

Тачкасто оптерећење Q налази се у средини ϵ_o удаљено за h од проводне равни и диелектрика $\epsilon_1 = 2\epsilon_o$, као на слици. Наћи вектор поља $\mathbf{E}$ у тачки А, на страни средине са ϵ_o , [185].

Рјешење:



Слика 1.44

Користимо теорему lika и модификовану теорему lika у равном огледалу, према слици 1.44.

$$Q_1 = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} Q = -\frac{Q}{3},$$

$$\cos \alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2 + 4h^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \sin \alpha = \frac{2h}{\sqrt{h^2 + 4h^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

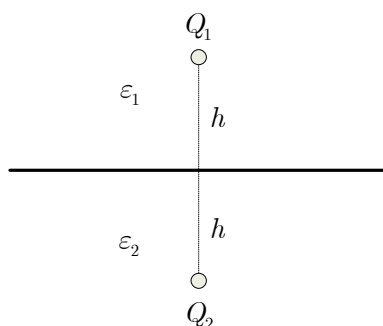
$$E_{Ax} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o h^2} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_o 5h^2} \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{Q/3}{4\pi\epsilon_o h^2} - \frac{Q/3}{4\pi\epsilon_o 5h^2} \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{Q}{3\pi\epsilon_o h^2} \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{25}\right),$$

$$E_{Ay} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_o 5h^2} \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{Q/3}{4\pi\epsilon_o 5h^2} \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{Q}{3\pi\epsilon_o h^2} \left(\frac{\sqrt{5}}{25}\right). \quad \mathbf{E}_A = E_{Ax} \hat{\mathbf{x}} + E_{Ay} \hat{\mathbf{y}}.$$

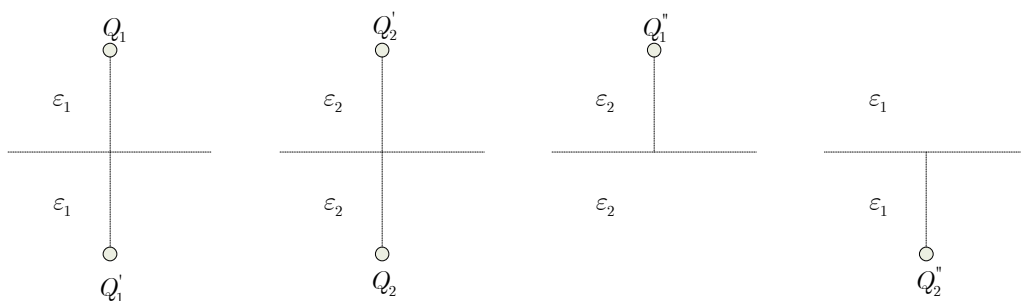
Примјер 1.39

Раван π је граница између два диелектрика константи ε_1 и ε_2 . Два тачкаста наелектрисања Q_1 и Q_2 налазе се на правој која је нормална на раван π на једнаким растојањима h . Одредити силе F_1 и F_2 које дјелују на ова наелектрисања, [186].

Рјешење:



Слика 1.45



Слика 1.46

$$Q_1' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} Q_1, \quad Q_2' = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} Q_2, \quad Q_1'' = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} Q_1, \quad Q_2'' = \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} Q_2$$

Сила на Q_1 :

$$F_1 = Q_1 \frac{Q_1' + Q_2''}{16\pi h^2 \varepsilon_1} = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) Q_1^2}{16\pi \varepsilon_1 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) h^2} + \frac{2Q_1 Q_2}{16\pi (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) h^2},$$

Сила на Q_2 :

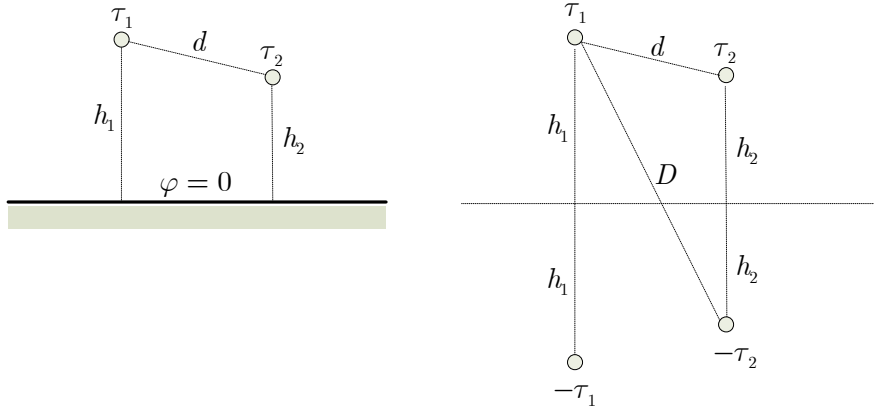
$$F_2 = Q_2 \left(\frac{Q_2'}{16\pi h^2 \varepsilon_2} + \frac{Q_1''}{16\pi h^2 \varepsilon_2} \right) = \frac{Q_2^2 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{16\pi \varepsilon_2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) h^2} + \frac{2Q_1 Q_2}{16\pi (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) h^2}.$$

Примјер 1.40

За два дуга наелектрисана проводника са подужним наелектрисуњима τ_1 и τ_2 над површином земље написати једначине са *потенцијалним коефицијентима*, једначине са *коефицијентима индукције*, те једначине преко *парцијалних капацитивности*. Претпостављајући да овај вод напаја неуземљени извор, одредити израз за радну капацитивност вода и енергију електричног поља вода, [187].

Рјешење:

Када се на овај примјер примијени метода lika у равном огледалу, добија се распоред проводника као на слици 1.47. Дакле, имамо два пара супротно наелектрисаних нити у хомогеној средини.



Слика 1.47

Потенцијал на површини првог проводника φ_1 ће бити:

$$\varphi_1 = \frac{\tau_1}{2\pi\epsilon} \ln \frac{2h_1}{a} + \frac{\tau_2}{2\pi\epsilon} \ln \frac{D}{d}. \quad (1)$$

Аналогно ће бити за потенцијал на површини другог проводника:

$$\varphi_2 = \frac{\tau_1}{2\pi\epsilon} \ln \frac{D}{d} + \frac{\tau_2}{2\pi\epsilon} \ln \frac{2h_2}{a}. \quad (2)$$

Очигледно је да смо добили једначине са потенцијалним коефицијентима:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= a_{11}\tau_1 + a_{12}\tau_2, \\ \varphi_2 &= a_{21}\tau_1 + a_{22}\tau_2\end{aligned}\quad (3)$$

За дати примјер *потенцијални коефицијенти* су:

$$a_{11} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \ln \frac{2h_1}{a}; \quad a_{12} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \ln \frac{D}{d}; \quad a_{22} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \ln \frac{2h_2}{a}. \quad (4)$$

Очигледно је да су ови коефицијенти увијек позитивни, а зависе од облика и размјештаја проводника и диелектрика у коме се проводници налазе.

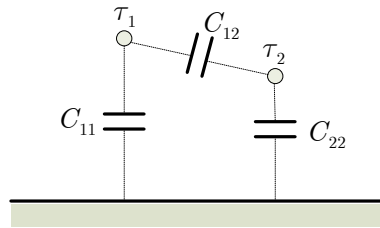
Коефицијенте индукције добијамо из (3) израчунавањем оптерећења преко потенцијала проводника:

$$\begin{aligned}\tau_1 &= b_{11}\varphi_1 + b_{12}\varphi_2, \\ \tau_2 &= b_{21}\varphi_1 + b_{22}\varphi_2.\end{aligned}\quad (5)$$

$$b_{11} = \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}, \quad b_{12} = -\frac{a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}, \quad b_{22} = \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}. \quad (6)$$

Сопствени коефицијенти индукције су увијек позитивни, а међусобни негативни.

У пракси се чешће користе једначине преко **парцијалних капацитивности**, слика 1.48.



Слика 1.48

$$\begin{aligned}\tau_1 &= b_{11}\varphi_1 + b_{12}(\varphi_2 - \varphi_1 + \varphi_1) = (b_{11} + b_{12})\varphi_1 - b_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) = C_{11}\varphi_1 + C_{12}(\varphi_1 - \varphi_2), \\ \tau_2 &= b_{21}(\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_2) + b_{22}\varphi_2 = -b_{21}(\varphi_2 - \varphi_1) + (b_{21} + b_{22})\varphi_2 = C_{21}(\varphi_2 - \varphi_1) + C_{22}\varphi_2.\end{aligned}$$

$$C_{11} = b_{11} + b_{12}, \quad C_{12} = -b_{12}, \quad C_{22} = b_{22} + b_{21}. \quad (7)$$

Ако су наелектрисања на водовима једнака и супротног знака: $\tau_1 = -\tau_2 = \tau$, (случај када је вод прикључен на неуземљен извор) могуће је одредити такозвану *подужну радну капацитивност вода*.

$$C'_{\text{радно}} = \frac{\tau}{U}, \quad (8)$$

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = (a_{11} + a_{22} - 2a_{12}) \cdot \tau. \quad (9)$$

Коначно,

$$C'_{\text{радно}} = \frac{1}{a_{11} + a_{22} - 2a_{12}} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{4h_1h_2d^2}{a^2D^2}}. \quad (10)$$

Радна капацитивност представља еквивалентну капацитивност између проводника:

$$C_{\text{радно}} = C_{12} + \frac{C_{11}C_{22}}{C_{11} + C_{22}}. \quad (11)$$

Ако је вод симетричан, тада су висине једнаке и износе h , а растојање D може се изразити преко a и d , те се за подужну радну капацитивност добија:

$$C'_{\text{радно}} = \frac{\pi\epsilon}{\ln \frac{d}{a\sqrt{1 + (d/2h)^2}}}. \quad (12)$$

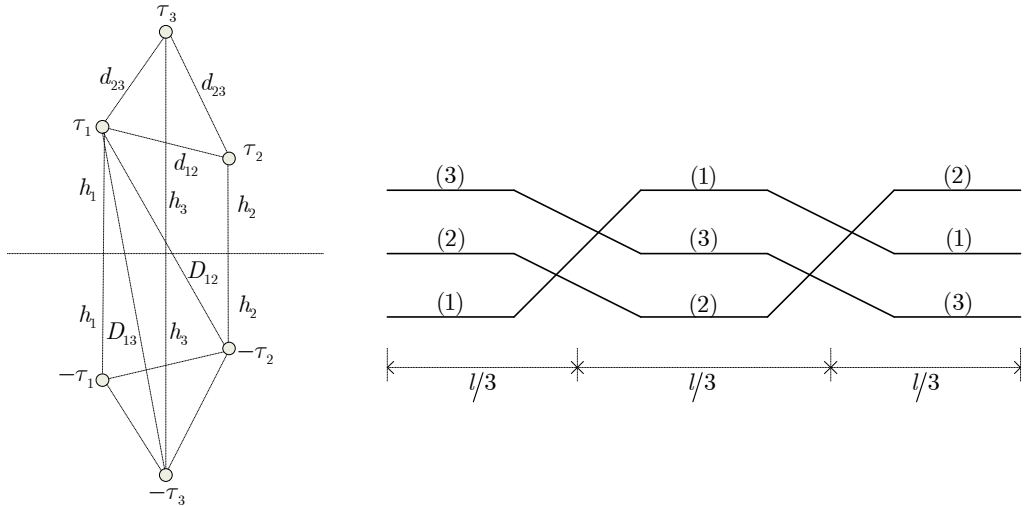
Помоћу радне капацитивности лако је одредити енергију електричног поља двојичног вода:

$$W_e = \frac{C_{\text{радно}} U^2}{2}. \quad (13)$$

Примјер 1.41

Извести израз за капацитивност проводника трофазног симетрираног вода над површином земље, [188].

Рјешење:



Слика 1.49

Дугачки трофазни водови постављају се тако да се врши преплитање водова на једнаким дионицама. Ово се ради због симетрирања фаза вода. Преплитање се изводи по цикличком редоследу, слика 1.49.

Нека трофазни вод напаја извор неуземљеног звјездишта, тј. нека је збир оптерећења сва три проводника једнак нули:

$$\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0. \quad (1)$$

Потенцијал првог проводника је:

$$\varphi_1 = a_{11}\tau_1 + a_{12}\tau_2 + a_{13}\tau_3. \quad (2)$$

Узимањем у обзир односа (1), релација (2) поприма облик:

$$\varphi_1 = (a_{11} - a_{12}) \cdot \tau_1 + (a_{13} - a_{12}) \cdot \tau_3. \quad (3)$$

Ако су коефицијенти a_{13} и a_{12} међусобно једнаки, потенцијал првог проводника зависиће само од властитог оптерећења. Подужна капацитивност једне фазе тада је:

$$C' = \frac{\tau_1}{\varphi_1} = \frac{1}{a_{11} - a_{12}} = \frac{1}{\alpha_s - \alpha_m}. \quad (4)$$

Изједначавање коефицијената постиже се укрштањем (преплитањем) водова послије свако $l/3$. Зато се за коефицијенте α_s и α_m узимају средње вриједности сопствених и међусобних потенцијалних коефицијената:

$$\alpha_s = \frac{1}{3}(a_{11} + a_{22} + a_{33}), \quad \alpha_m = \frac{1}{3}(a_{12} + a_{23} + a_{31}). \quad (5)$$

$$\varphi_1 = (\alpha_s - \alpha_m) \cdot \tau_1 = \left(\frac{a_{11} + a_{22} + a_{33}}{3} - \frac{a_{12} + a_{23} + a_{31}}{3} \right) \cdot \tau_1. \quad (6)$$

Нека су растојања међу проводницима d_{12} , d_{23} и d_{31} а висине у односу на земљу h_1 , h_2 и h_3 . За потенцијалне коефицијенте добијамо:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{2\pi\epsilon} \ln \frac{2h_1}{a}, & a_{22} &= \frac{1}{2\pi\epsilon} \ln \frac{2h_2}{a}, & a_{33} &= \frac{1}{2\pi\epsilon} \ln \frac{2h_3}{a}, \\ a_{12} &= \frac{1}{2\pi\epsilon} \ln \frac{D_{12}}{d_{12}}, & a_{23} &= \frac{1}{2\pi\epsilon} \ln \frac{D_{23}}{d_{23}}, & a_{31} &= \frac{1}{2\pi\epsilon} \ln \frac{D_{31}}{d_{31}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Средња вриједност сопственог и међусобног потенцијалног коефицијента тада су:

$$\alpha_s = \frac{1}{2\pi\epsilon} \ln \frac{2 \cdot \sqrt[3]{h_1 h_2 h_3}}{a}, \quad \alpha_m = \frac{1}{2\pi\epsilon} \ln \frac{\sqrt[3]{D_{12} D_{23} D_{31}}}{\sqrt[3]{d_{12} d_{23} d_{31}}}. \quad (8)$$

Ако са D , d и h обиљежимо средње геометријске вриједности одговарајућих величина, претходни коефицијенти попримају облик:

$$\alpha_s = \frac{1}{2\pi\epsilon} \ln \frac{2h}{a}, \quad \alpha_m = \frac{1}{2\pi\epsilon} \ln \frac{D}{d}. \quad (9)$$

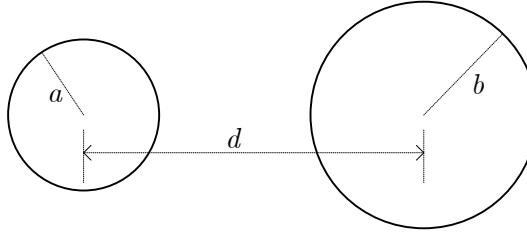
Уврштавањем ових вриједности у (4) добија се:

$$C' = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{2hd}{aD}}. \quad (10)$$

Ову капацитивност енергетичари називају *погонском капацитивношћу симетрираног трофазног ваздушног вода*.

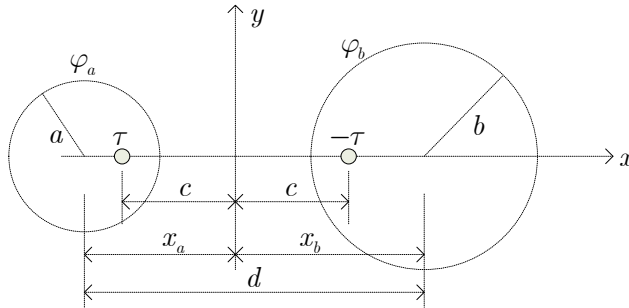
Примјер 1.42

Одредити подужну капацитивност за систем два некоаксијална проводна цилиндра полупречника a и b . Растојање између геометријских оса цилиндара је d , при чему је $d > a + b$, [189].



Слика 1.50

Задатак ћемо ријешити методом увођења еквивалентних електричних оса, односно методом lika у цилиндричном огледалу. (Видјети примјере 1.27 и 1.28).



Слика 1.51

$$(x_a - c)(x_a + c) = a^2, \quad (x_b - c)(x_b + c) = b^2, \quad x_a + x_b = d.$$

Рјешавањем ове три једначине добијамо положај еквивалентних електричних оса и положај координатног ситета:

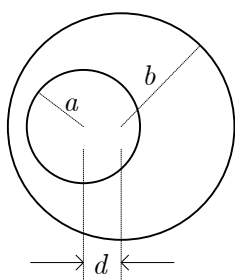
$$x_a = \frac{1}{2} \left(d - \frac{b^2 - a^2}{d} \right), \quad x_b = d - x_a, \quad c = \sqrt{x_a^2 - a^2}.$$

Одређивање потенцијала цилиндара видјети у примјеру 1.28. Коначно, капацитет је одређен изразом:

$$C' = \frac{\tau}{\varphi_a - \varphi_b} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{(x_a + c)(x_b + c)}{ab}}.$$

Примјер 1.43

Одредити подужну капацитивност за систем два некоаксијална проводна цилиндра полупречника a и b . Растојање између геометријских оса цилиндара је d , при чему је $d < a, b$, [190].



Слика 1.52

Резултат:

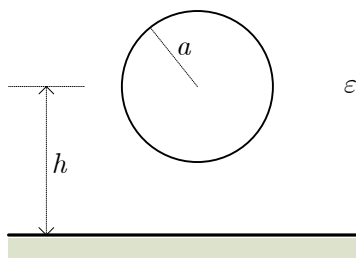
$$C' = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{(x_a + c)(x_b - c)}{ab}}$$

$$x_a = \frac{1}{2} \left(\frac{b^2 - a^2}{d} - d \right),$$

$$x_b = d + x_a, \quad c = \sqrt{x_b^2 - a^2}$$

Примјер 1.44

Одредити подужну капацитивност цилиндричног проводника полупречника a , постављеног паралелно површини земље. Удаљеност геометријске осе цилиндра од површине земље је h , ($h \gg a$), [191].



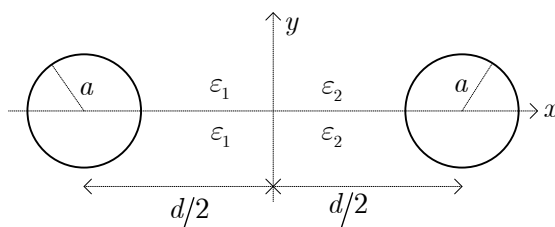
Слика 1.53

Резултат:

$$C' = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{h + \sqrt{h^2 - a^2}}{a}}.$$

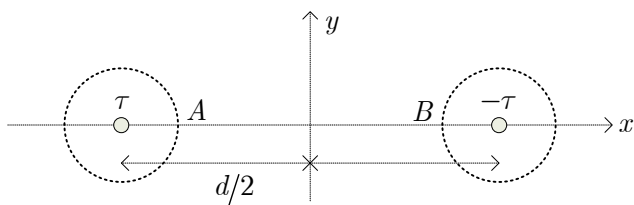
Примјер 1.45

Одредити подужну капацитивност за двожицни вод чији је попречни пресјек дат на слици. **Ефекат блискости занемарити:** $\epsilon_1 = 3\epsilon_o$ и $\epsilon_2 = 2\epsilon_o$, [192].

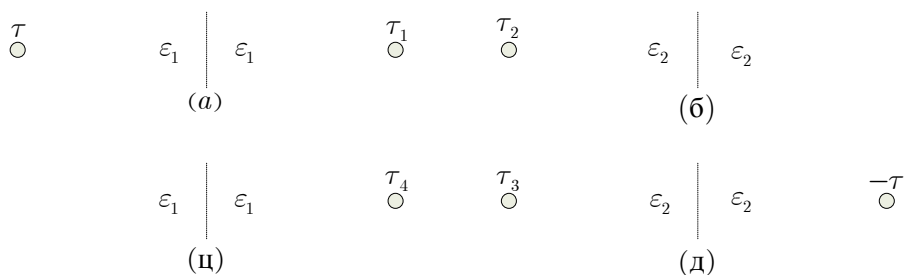


Слика 1.54

Ако се ефекат блискости може занемарити тада сваку од линија вода представљамо линијским оптерећењем смјештеним у осу проводника. За израчунавање потенцијала тачака A и B користимо модификовану теорему ликова у равном огледалу, слика 1.56.



Слика 1.55



Слика 1.56

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \tau = \alpha_1 \cdot \tau, & \tau_2 &= \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \tau = \beta_1 \cdot \tau, \\ \tau_3 &= \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} (-\tau) = -\alpha_2 \cdot \tau, & \tau_4 &= \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} (-\tau) = -\beta_2 \cdot \tau. \\ \alpha_1 &= 1/5, \quad \beta_1 = 4/5, \quad \alpha_2 = -1/5, \quad \beta_2 = 6/5.\end{aligned}$$

$$\varphi_A = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_1} \ln \frac{r_{ref.}}{a} + \frac{\tau_1}{2\pi\epsilon_1} \ln \frac{r_{ref.}}{d-a} + \frac{\tau_4}{2\pi\epsilon_1} \ln \frac{r_{ref.}}{d-a},$$

$$\varphi_A = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_1} [(\beta_2 - \alpha_1) \ln(d-a) - \ln a] + \varphi_o = \frac{\tau}{6\pi\epsilon_o} \ln \frac{d-a}{a} + \varphi_o,$$

$$\varphi_B = \frac{\tau_2}{2\pi\epsilon_2} \ln \frac{r_{ref.}}{d-a} + \frac{\tau_3}{2\pi\epsilon_2} \ln \frac{r_{ref.}}{d-a} + \frac{-\tau}{2\pi\epsilon_2} \ln \frac{r_{ref.}}{a},$$

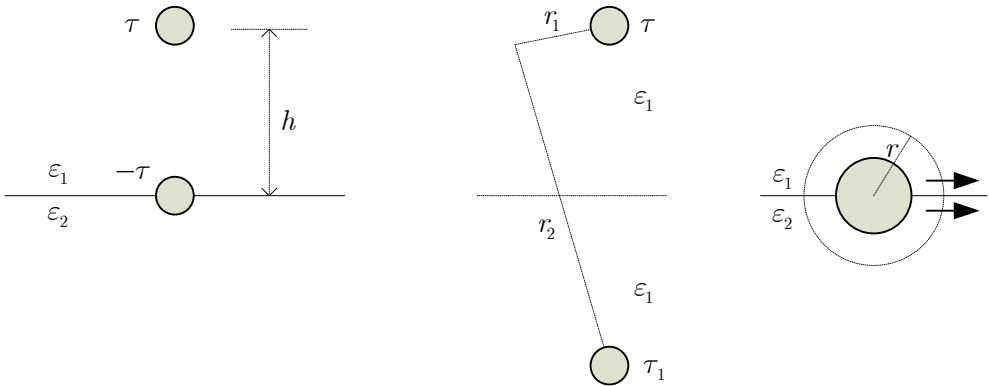
$$\varphi_B = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_2} [\ln a + (\alpha_2 - \beta_1) \ln(d-a)] + \varphi_o = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_o} \ln \frac{a}{d-a} + \varphi_o.$$

$$|\varphi_A - \varphi_B| = \frac{5\tau}{12\pi\epsilon_o} \ln \frac{d-a}{a},$$

$$C' = \frac{\tau}{|\varphi_A - \varphi_B|} = \frac{12\pi\epsilon_o}{5 \ln \frac{d-a}{a}} \approx \frac{12\pi\epsilon_o}{5 \ln \frac{d}{a}}.$$

Примјер 1.46

Извести израз за подужну капацитивност двожишног вода попречног пресека као на слици. Полуупречник проводника вода је a , ($a < h$), [193].



Слика 1.57

Рјешење:

За израчунавање потенцијала од наелектрисања на горњем проводнику примјењујемо модификовану теорему лика у равном огледалу:

$$\tau_1 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \tau.$$

Потенцијал у средини (1) од горњег проводника је:

$$\varphi_g = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_1} \ln r_1 - \frac{\tau_1}{2\pi\varepsilon_1} \ln r_2 + \varphi_o.$$

За израчунавање потенцијала од наелектрисања доњег проводника одредимо поље помоћу Гаусовог закона и граничног услова $E_{1t} = E_{2t}$:

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \int \mathbf{D}_1 d\mathbf{S} + \int \mathbf{D}_2 d\mathbf{S} = -\tau l, \quad \varepsilon_1 E r \pi l + \varepsilon_2 E r \pi l = -\tau l \Rightarrow$$

$$E = \frac{-\tau}{\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) r},$$

$$\varphi_d = -\int E dr + \varphi_o = \frac{\tau}{\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \ln r + \varphi_o.$$

Суперпонирањем ова два потенцијала, за тачку у средини (1) добијамо:

$$\varphi^{(1)} = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_1} \ln r_1 - \frac{\tau_1}{2\pi\varepsilon_1} \ln r_2 + \frac{\tau}{\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \ln r + \varphi_o.$$

За погодно изабране тачке A и B добијамо:

$$\varphi_A^{(1)} = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_1} \ln a - \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\tau}{2\pi\varepsilon_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \ln(2h - a) + \frac{\tau}{\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \ln(h - a) + \varphi_o,$$

$$\varphi_B^{(1)} = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_1} \ln(h - a) - \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\tau}{2\pi\varepsilon_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \ln(h + a) + \frac{\tau}{\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \ln a + \varphi_o.$$

$$\varphi_A^{(1)} - \varphi_B^{(1)} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_1} \left(\frac{3\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \ln \frac{h - a}{a} - \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \ln \frac{2h - a}{h + a} \right),$$

$$\varphi_A^{(1)} - \varphi_B^{(1)} \approx \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_1} \left(\frac{3\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \ln \frac{h}{a} - \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \ln 2 \right), \quad C' = \frac{\tau}{|\varphi_A^{(1)} - \varphi_B^{(2)}|},$$

$$C' = \frac{2\pi\varepsilon_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{(3\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\ln\frac{h}{a} - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\ln 2}.$$

Примјер 1.47

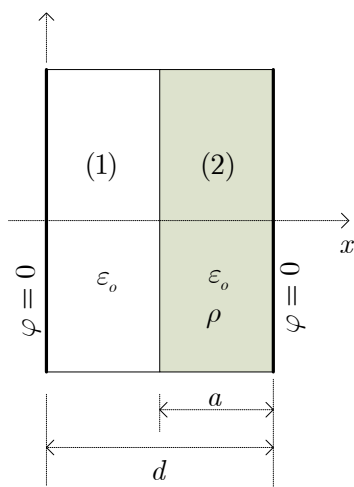
Одредити функцију расподеле потенцијала између двије плоче на растојању d , са електронским облаком, дебљине a , ($a \ll d$), међу њима. Плоче су на потенцијалу нула, [195].

Рјешење:

Лапласова и Пуасонова једначина, за области (1) и (2) су, респективно:

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_o}.$$

Њихова рјешења су: $\varphi_1 = C_1 \cdot x + C_2$, $\varphi_2 = -\frac{\rho}{2\varepsilon_o} x^2 + C_3 \cdot x + C_4$,



Слика 1.58

Гранични услови: $x=0, \Rightarrow \varphi_1 = 0$, $x=d \Rightarrow \varphi_2 = 0$,

$$x=d-a \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}.$$

Вриједности интеграционих константи су:

$$C_1 = \frac{\rho \cdot a^2}{2d\epsilon_o}, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = \frac{\rho}{2d\epsilon_o} [d^2 + (d-a)^2], \quad C_4 = -\frac{\rho}{2\epsilon_o} (d-a)^2.$$

Коначно, функције потенцијала су:

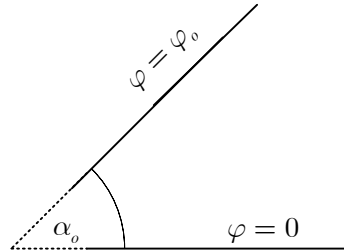
$$\varphi_1 = \frac{\rho \cdot a^2}{2d\epsilon_o} x, \quad \varphi_2 = -\frac{\rho}{2\epsilon_o} x^2 + \frac{\rho}{2d\epsilon_o} [d^2 + (d-a)^2] x - \frac{\rho}{2\epsilon_o} (d-a)^2.$$

Примјер 1.48

Двије проводне неограничене полуравни сијеку се под углом α_o али се не додирују. Једна раван је на потенцијалу φ_o , а друга на нултом потенцијалу. Одредити расподјелу поља и потенцијала у простору полуравни, [196].

Рјешење:

Бирамо цилиндрични координатни систем. Због неограничености полуравни у r и z смјеру, биће:



Слика 1.59

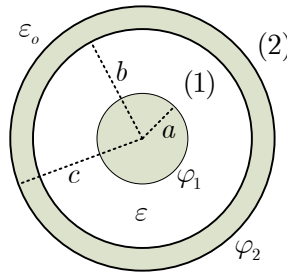
$$\frac{\partial}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} = 0. \quad \Delta\varphi = \frac{1}{r^2} \frac{d^2\varphi}{d\theta^2} = 0, \quad \varphi = C_1 \cdot \theta + C_2.$$

$$\theta = 0, \quad C_2 = 0, \quad \theta = \alpha_o, \quad \varphi_o = C_1 \cdot \alpha_o,$$

$$\varphi = \frac{\theta}{\alpha_o} \cdot \varphi_o, \quad 0 \leq \theta \leq \alpha_o. \quad \mathbf{E} = -\text{grad}\varphi = -\frac{1}{r} \frac{d\varphi}{d\theta} \hat{\theta} = -\frac{\varphi_o}{\alpha_o \cdot r} \hat{\theta}.$$

Примјер 1.49

Извести изразе за парцијалне капацитивности за сферни кондензатор на слици. Унутрашња електрода кондензатора доведена је на потенцијал φ_1 , а спољашња на потенцијалу φ_2 , [194].



Слика 1.60

Због сферне симетрије Лапласова једначина има облик:

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = 0, \quad \Rightarrow \quad \varphi = -\frac{C_1}{r} + C_2.$$

За област $a \leq r \leq b$, користећи граничне услове имамо:

$$\varphi_1 = -\frac{C_1}{a} + C_2, \quad \varphi_2 = -\frac{C_1}{b} + C_2, \quad \Rightarrow$$

$$C_1 = \frac{(\varphi_2 - \varphi_1)ab}{b - a}, \quad C_2 = \frac{b\varphi_2 - a\varphi_1}{b - a}.$$

$$\varphi^{(1)} = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2)ab}{b - a} \cdot \frac{1}{r} + \frac{b\varphi_2 - a\varphi_1}{b - a}, \quad \text{за } a \leq r \leq b.$$

За област $c \leq r < \infty$, $\varphi = -\frac{C_3}{r} + C_4$. За $r \rightarrow \infty$, $C_4 = 0$. Када је $r = c$, $\varphi = \varphi_2$,

$$C_3 = -\varphi_2 c, \quad \varphi^{(2)} = \frac{\varphi_2 c}{r}, \quad \text{за } c \leq r < \infty.$$

Електрично поље одређујемо из:

$$E_1 = -\frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial r} = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2)ab}{b - a} \cdot \frac{1}{r^2}, \quad E_2 = -\frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial r} = \frac{\varphi_2 c}{r^2}.$$

Површинске густине наелектрисања и укупна наелектрисања површина одређујемо из:

$$\begin{aligned}\eta_a &= \varepsilon \cdot E_1(r=a) = \varepsilon \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{b-a} \cdot \frac{b}{a}, \quad \Rightarrow Q_a = 4\pi a^2 \eta_a = 4\pi \varepsilon \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{b-a} ab. \\ \eta_b &= -\varepsilon \cdot E_1(r=b) = -\varepsilon \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{b-a} \cdot \frac{a}{b}, \quad \Rightarrow Q_b = 4\pi b^2 \eta_b = -4\pi \varepsilon \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{b-a} ab. \\ \eta_c &= \varepsilon_o \cdot E_2(r=c) = \varepsilon_o \frac{\varphi_2}{c}, \quad \Rightarrow Q_c = 4\pi c^2 \eta_c = 4\pi \varepsilon_o \varphi_2 c.\end{aligned}$$

Количине наелектрисања на електродама су: $Q_1 = Q_a$ и $Q_2 = Q_b + Q_c$.

$$Q_1 = 4\pi \varepsilon \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{b-a} ab = 4\pi \varepsilon \frac{ab}{b-a} \varphi_1 - 4\pi \varepsilon \frac{ab}{b-a} \varphi_2,$$

$$Q_1 = b_{11}\varphi_1 + b_{12}\varphi_2,$$

$$Q_2 = -4\pi \varepsilon \frac{ab}{b-a} \varphi_1 + 4\pi \cdot \left(\frac{ab\varepsilon}{b-a} + c\varepsilon_o \right) \varphi_2,$$

$$Q_2 = b_{21}\varphi_1 + b_{22}\varphi_2.$$

$$b_{11} = 4\pi \varepsilon \frac{ab}{b-a}, \quad b_{12} = -4\pi \varepsilon \frac{ab}{b-a}, \quad b_{22} = 4\pi \cdot \left(\frac{\varepsilon ab}{b-a} + \varepsilon_o c \right).$$

Парцијалне капацитете рачунамо из:

$$\begin{aligned}Q_1 &= b_{11}\varphi_1 + b_{12}\varphi_2 = b_{11}\varphi_1 + b_{12}(\varphi_2 - \varphi_1 + \varphi_1) = (b_{11} + b_{12})\varphi_1 - b_{12}(\varphi_1 - \varphi_2), \\ Q_2 &= b_{21}\varphi_1 + b_{22}\varphi_2 = b_{21}(\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_2) + b_{22}\varphi_2 = -b_{21}(\varphi_2 - \varphi_1) + (b_{22} + b_{21})\varphi_2.\end{aligned}$$

односно,

$$Q_1 = C_{11}\varphi_1 + C_{12}(\varphi_1 - \varphi_2),$$

$$Q_2 = C_{21}(\varphi_2 - \varphi_1) + C_{22}\varphi_2.$$

За парцијалне капацитете, коначно, добијамо:

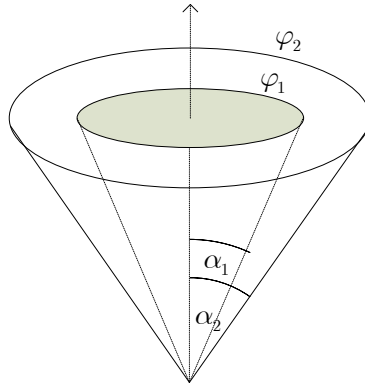
$$C_{11} = b_{11} + b_{12} = 0, \quad C_{12} = -b_{12} = 4\pi \varepsilon \frac{ab}{b-a}, \quad C_{22} = b_{22} + b_{21} = 4\pi \varepsilon_o c.$$

Капацитет кондензатора одређен је са:

$$C = C_{12} + \frac{C_{11} \cdot C_{22}}{C_{11} + C_{22}} = C_{12} = 4\pi \varepsilon \frac{ab}{b-a}.$$

Примјер 1.50

Ријешити Лапласову једначину у простору ограниченом коаксијалним проводним конусним плаштovima. Угао према оси унутрашњег конуса је α_1 а вањског α_2 . Потенцијал унутрашњег конуса је φ_1 , а вањског φ_2 . Врхови конуса су међусобно изоловани. Из функције потенцијала одредити поље у простору између конуса, [197].



Слика 1.61

Рјешење:

У сферном координатном систему, ако искључимо тачку $r = 0$, Лапласова једначина се своди на облик:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r^2 \sin \psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\sin \psi \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} \right) = 0, \quad \varphi(\psi) = C_1 \int \frac{d\psi}{\sin \psi} + C_2,$$

$$\varphi(\psi) = C_1 \int \frac{d\psi}{2 \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\psi}{2}} + C_2 = C_1 \int \frac{d\psi}{2 \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} \cos^2 \frac{\psi}{2}} + C_2,$$

$$\varphi(\psi) = C_1 \int \frac{d\psi}{2 \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\psi}{2}} + C_2 = C_1 \int \frac{d\psi}{2 \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} \cos^2 \frac{\psi}{2}} + C_2,$$

$$\varphi(\psi) = C_1 \int \frac{d\left(\operatorname{tg} \frac{\psi}{2}\right)}{\operatorname{tg} \frac{\psi}{2}} + C_2 = C_1 \ln \left(\operatorname{tg} \frac{\psi}{2} \right) + C_2,$$

пошто је за могуће углове ψ , $\operatorname{tg}(\psi/2) > 0$. За $\psi = \alpha_1$, $\varphi = \varphi_1$, за $\psi = \alpha_2$, $\varphi = \varphi_2$, добијамо:

$$C_1 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\ln\left(tg \frac{\alpha_2}{2}\right) - \ln\left(tg \frac{\alpha_1}{2}\right)}, \quad C_2 = \frac{\varphi_1 \ln\left(tg \frac{\alpha_2}{2}\right) - \varphi_2 \ln\left(tg \frac{\alpha_1}{2}\right)}{\ln\left(tg \frac{\alpha_2}{2}\right) - \ln\left(tg \frac{\alpha_1}{2}\right)},$$

$$\varphi(\psi) = \frac{(\varphi_2 - \varphi_1) \ln\left(tg \frac{\psi}{2}\right)}{\ln\left(tg \frac{\alpha_2}{2}\right) - \ln\left(tg \frac{\alpha_1}{2}\right)} + \frac{\varphi_1 \ln\left(tg \frac{\alpha_2}{2}\right) - \varphi_2 \ln\left(tg \frac{\alpha_1}{2}\right)}{\ln\left(tg \frac{\alpha_2}{2}\right) - \ln\left(tg \frac{\alpha_1}{2}\right)}.$$

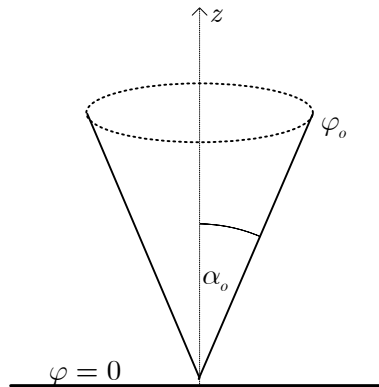
$$\mathbf{E}(r, \psi) = -\frac{1}{r} \frac{d\varphi}{d\psi} \hat{\psi} = -\frac{(\varphi_2 - \varphi_1)}{\ln\left(tg \frac{\alpha_2}{2}\right) - \ln\left(tg \frac{\alpha_1}{2}\right)} \frac{1}{tg \frac{\psi}{2}} \frac{1}{\cos^2 \frac{\psi}{2}} \frac{1}{2} \hat{\psi},$$

$$\mathbf{E}(r, \psi) = -\frac{(\varphi_2 - \varphi_1)}{\ln\left(tg \frac{\alpha_2}{2}\right) - \ln\left(tg \frac{\alpha_1}{2}\right)} \frac{1}{r \sin \psi} \hat{\psi}.$$

Примјер 1.51

Непосредно изнад савршено проводне равни на нултом потенцијалу налази се метални конус на потенцијалу φ_o . Оса z конуса окомита је на раван, а угао између ње и изводнице конуса је α_o . Одредити распоdjелу поља и потенцијала у простору између конуса и равни, [198].

Рјешење:



Слика 1.62

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r^2 \sin \psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\sin \psi \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} \right) = 0, \quad \varphi = C_1 \cdot \ln \left(tg \frac{\psi}{2} \right) + C_2,$$

пошто је за могуће углове $\psi, tg(\psi/2) \succ 0$.

$$\text{За } \psi = \alpha_o, \quad \varphi = \varphi_o \Rightarrow \quad \varphi_o = C_1 \cdot \ln \left(tg \frac{\alpha_o}{2} \right) + C_2,$$

$$\text{За } \psi = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = 0 \Rightarrow \quad 0 = C_1 \cdot \ln \left(tg \frac{\pi}{4} \right) + C_2, \Rightarrow$$

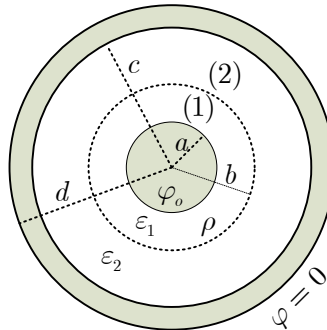
$$C_2 = 0, \quad C_1 = \frac{\varphi_o}{\ln \left(tg \frac{\alpha_o}{2} \right)}. \quad \varphi(\psi) = \frac{\varphi_o}{\ln \left(tg \frac{\alpha_o}{2} \right)} \ln \left(tg \frac{\psi}{2} \right).$$

$$\mathbf{E} = -grad\varphi = -\frac{1}{r} \frac{d\varphi}{d\psi} \hat{\psi} = -\frac{1}{r} \frac{\varphi_o}{\ln \left(tg \frac{\alpha_o}{2} \right)} \cdot \frac{1}{\left(tg \frac{\psi}{2} \right)} \frac{1}{2 \cdot \cos^2 \frac{\psi}{2}} \hat{\psi}.$$

$$\mathbf{E} = \frac{-\varphi_o}{r \cdot \ln \left(tg \frac{\alpha_o}{2} \right) \cdot \sin \psi} \hat{\psi}.$$

Примјер 1.52

У коаксијалном каблу чији је пресјек дат на слици 2.82 усљед прегријавања створио се ваздушни зазор полупречника b у коме се јонизациом створило наелектрисање запреминске густине ρ . Полазећи од Лапласове и Пуасонове једначине одредити функције потенцијала у областима (1) и (2), [199].



Слика 1.63

Резултат:

$$\varphi_1(r) = -\frac{\rho}{4\varepsilon_1} r^2 + C_1 \ln r + C_2, \quad a \leq r \leq b,$$

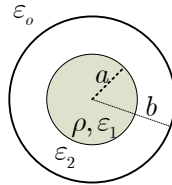
$$\varphi_2(r) = C_3 \ln r + C_4, \quad b \leq r \leq c.$$

$$C_1 = \frac{\varepsilon_2 \rho (b^2 - a^2) - 2\varepsilon_1 \rho b^2 \ln \frac{b}{c} - 4\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varphi_o}{4\varepsilon_1 \left(\varepsilon_2 \ln \frac{b}{a} - \ln \frac{b}{c} \right)}, \quad C_2 = \frac{\rho a^2}{4\varepsilon_1} - C_1 \ln a + \varphi_o,$$

$$C_3 = -\frac{\rho b^2}{2\varepsilon_2} + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} C_1, \quad C_4 = \left(\frac{\rho b^2}{2\varepsilon_2} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} C_1 \right) \cdot \ln c.$$

Примјер 1.53

Сфера полупречника a наелектрисана равномерно запреминском густином наелектрисања ρ , диелектричне пропустљивости ε_1 , налази се унутар диелектричне сферне љуске полупречника a и b , ($a < b$) пропустљивости ε_2 . Околни простор је ваздух. Полазећи од Пуасонове и Лапласове једначине, одредити функције потенцијала у свим областима простора, [200].



Слика 1.64

Резултат:

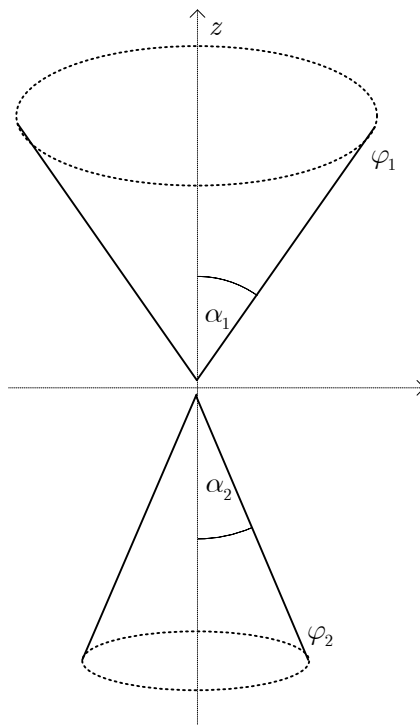
$$\varphi_1(r) = -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_1} + \frac{\rho a^3}{3} \left(\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_o}{\varepsilon_o \varepsilon_2 \cdot b} + \frac{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdot a} \right), \quad (r \leq a),$$

$$\varphi_2(r) = \frac{\rho a^3}{3} \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon_2 \cdot r} + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_o}{\varepsilon_o \varepsilon_2 \cdot b} \right), \quad (a \leq r \leq b),$$

$$\varphi(r) = \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_o \cdot r}, \quad (r \geq b).$$

Примјер 1.54

Двије електроде у облику пуног бесконачног конуса чине електродни систем као што је приказано на слици. Интеграцијом Лапласове једначине одредити потенцијал у међуелектродном простору, [201].



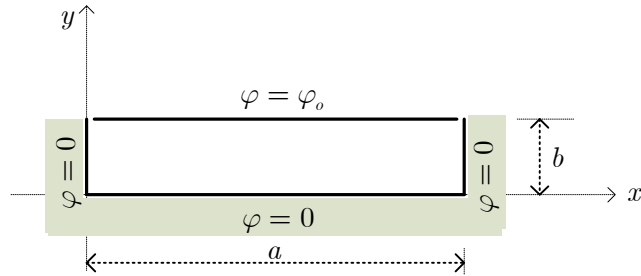
Слика 1.65

Резултат:

$$\varphi = \frac{1}{\ln\left(\operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha_2}{2}\right)} \left[(\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \ln\left(\operatorname{tg} \frac{\psi}{2}\right) + \varphi_1 \cdot \ln\left(\operatorname{tg} \frac{\alpha_2}{2}\right) + \varphi_2 \cdot \ln\left(\operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2}\right) \right].$$

Примјер 1.55*

Одредити функцију расподеле потенцијала у бесконачно дугом жљебу правоугаоног попречног пресека. Горња површина жлијеба је на потенцијалу φ_0 , а преостале три стране су на потенцијалу нула, [202].



Слика 1.66

Ако се координатни систем постави као на слици 1.66, Лапласова једначина има облик:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad \varphi(x, y) = X(x) \cdot Y(y), \quad \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0.$$

Оваква једнакост је могућа само ако су оба сабирка једнака некој константи:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = k_x^2, \quad \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = k_y^2, \quad \Rightarrow \quad k_x^2 + k_y^2 = 0. \quad (1)$$

С обзиром на граничне услове рјешење по x треба узети преко тригонометријских функција, односно:

$$X(x) = A_1 \cdot \cos(k_x x) + A_2 \cdot \sin(k_x x), \quad Y(y) = B_1 \cdot ch(k_y y) + B_2 \cdot sh(k_y y). \quad (2)$$

Гранични услови су:

- (1) За $x = 0, 0 \leq y \leq b, \quad \varphi(0, y) = 0.$
- (2) За $x = a, 0 \leq y \leq b, \quad \varphi(a, y) = 0.$
- (3) За $y = 0, 0 \leq x \leq a, \quad \varphi(x, 0) = 0.$
- (4) За $y = b, 0 \leq x \leq a, \quad \varphi(x, b) = \varphi_0.$

Услови (1) и (3) биће задовољени ако су $A_1 = B_1 = 0$. Рјешење поприма облик:

$$\varphi_n(x, y) = A_n \cdot \sin(k_x x) \cdot sh(k_y y). \quad (3)$$

Услов (2) је задовољен када је $\sin(k_x a) = 0, \quad k_x a = n\pi, \quad k_x = n\pi / a$.

$$k_y^2 = -k_x^2 \quad \Rightarrow \quad k_x = \frac{n\pi}{a} \quad \text{и} \quad k_y = j \frac{n\pi}{a}, \quad (4)$$

$$\varphi_n(x, y) = A_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \cdot sh\left(\frac{n\pi}{a} y\right). \quad (5)$$

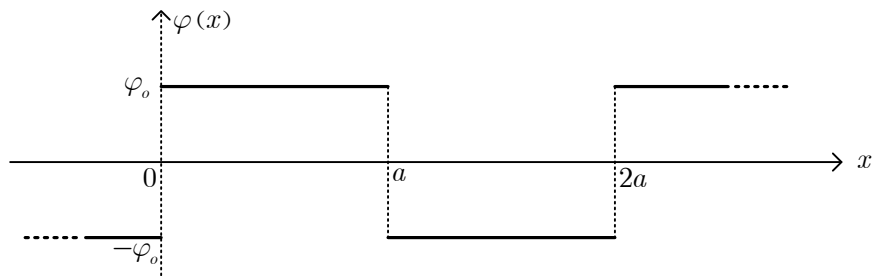
Без обзира колики је n , прва три гранична услова су задовољена. Рјешење Лапласове једначине биће сума партикуларних рјешења:

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cdot \operatorname{sh}\left(\frac{n\pi}{a}y\right). \quad (6)$$

Да бисмо одредили константе A_n , развијемо функцију у Фуријеов ред на датом сегменту. Функција и сегмент морају одговарати граничном услову број (4):

$$\varphi_o = \varphi(x, b) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cdot \operatorname{sh}\left(\frac{n\pi}{a}b\right); \quad 0_+ \leq x \leq a_- \quad (7)$$

$$\varphi(x) = \varphi_o, \quad 0_+ \leq x \leq a, \quad \varphi(0) = \varphi(a) = 0. \quad (8)$$



Слика 1.67

Наша функција је дио периодичне функције као на слици 1.67. Очигледно је да је таква функција непарна, да јој је период $T = 2a$ и да има особину:

$$f(x) = -f\left(x + \frac{T}{2}\right) = -f(x + a). \quad (9)$$

Таква функција може имати само синусне чланове непарног реда (видјети у прилогу “Фуријеов ред”):

$$f(x) = A_o + \sum_{k=1}^n [A_k \cdot \cos(kwx) + B_k \cdot \sin(kwt)]$$

$$A_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$B_{2k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$B_{2k-1} = \frac{8}{T} \int_0^{T/4} f(x) \cdot \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{a}x\right) \cdot dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

У нашем случају, то значи:

$$\begin{aligned}
 B_{2k-1} &= \frac{8}{2a} \int_0^{a/2} \varphi_o \cdot \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{a}x\right) \cdot dx = \\
 &= \frac{4\varphi_o}{a} \left[\frac{-a}{(2k-1)\pi} \cos\frac{(2k-1)\pi}{a}x \right]_0^{a/2} = \frac{4\varphi_o}{(2k-1)\pi}. \\
 \varphi(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4\varphi_o}{(2k-1)\pi} \sin\frac{(2k-1)\pi}{a}x.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Упоредбањем (7) и (10) добијамо:

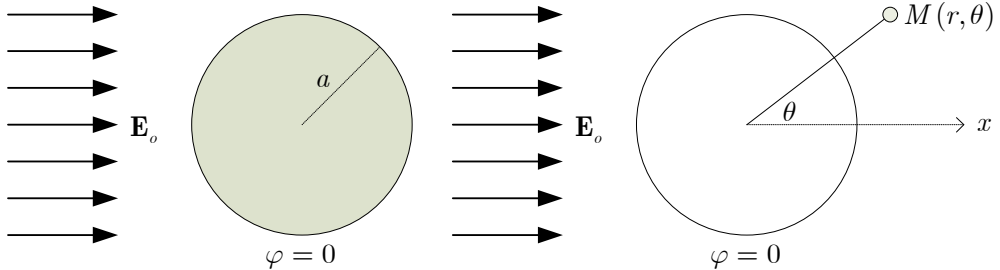
$$A_n = \frac{4\varphi_o}{n\pi \cdot sh \frac{n\pi}{a}b}, \quad n = 2k-1, \quad k = 1, 2, \dots \tag{11}$$

Коначно имамо функцију потенцијала система датог на слици 1.66:

$$\varphi(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4\varphi_o}{(2k-1)\pi \cdot sh \frac{n\pi}{a}b} \sin\frac{(2k-1)\pi}{a}x \cdot sh \frac{(2k-1)\pi}{a}y. \tag{12}$$

Примјер 1.56*

Одредити функцију потенцијала у простору око дугог проводног цилиндра на потенцијалу нула унесеног у хомогено електрично поље интензитета $\mathbf{E}_o$. Поље је окомито на осу цилиндра, [203].



Слика 1.68

Рјешење:

У цилиндричном координатном систему постављеном као на слици потенцијал неће зависити од z -координате. Претпостављено рјешење има облик:

$$\varphi(r, \theta) = R(r) \cdot T(\theta). \quad (1)$$

Уврштавањем у Лапласову једначину за цилиндричне координате, добијамо:

$$\frac{1}{rR} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{d\theta^2} = 0. \quad (2)$$

Одакле добијамо:

$$\frac{1}{T} \frac{d^2 T}{d\theta^2} = -n^2; \quad \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} - \frac{n^2}{r^2} R = 0. \quad (3)$$

Тражена функција потенцијала је једно од рјешења Лапласове једначине које задовољава гранични услов $\varphi = 0$ на површини цилиндра за $r = a$. Пошто се цилиндар налази у хомогеном пољу, то ће на великим удаљеностима од цилиндра његов утицај на поље бити занемарљив те ће потенцијал имати вриједност потенцијала у хомогеном пољу $\varphi_o = -E_o x$. У систему постоји симетрија у односу на x -осу па је функција потенцијала парна у односу на координату θ , те је: $\varphi(r, \theta) = \varphi(r, -\theta)$, из чега закључујемо да прва од једначина (3) има рјешење:

$$T(\theta) = A_n \cdot \cos(n\theta). \quad (4)$$

Друга од једначина (3) има рјешење облика:

$$R(r) = B_n \cdot r^n + C_n \cdot r^{-n}. \quad (5)$$

Уврштавањем (4) и (5) у (1) добијамо опште рјешење:

$$\varphi_n(r, \theta) = \sum_{i=1}^{\infty} (a_n \cdot r^n + b_n \cdot r^{-n}) \cdot \cos(n\theta). \quad (6)$$

За $r \rightarrow \infty$, $\varphi(r, \theta) = -E_o x = -E_o r \cos \theta$ што је могуће једино ако је $a_1 = -E_o$, $a_n = 0, n > 1$ што рјешењу (6) даје облик:

$$\varphi_n(r, \theta) = -E_o r \cos \theta + \sum_{i=1}^{\infty} b_n \cdot r^{-n} \cdot \cos(n\theta). \quad (7)$$

Када искористимо гранични услов $\varphi(a, \theta) = 0$ развојем функције:

$$\varphi_n(a, \theta) = -E_o a \cdot \cos \theta + \sum_{i=1}^{\infty} b_n \cdot a^{-n} \cdot \cos(n\theta). \quad (8)$$

у Фуријеов ред и коришћењем особина ортогоналности тригонометријских функција:

$$\int_0^T \cos(pwt) \cdot \cos(qwt) \cdot dt = \begin{cases} 0, p \neq q \\ \frac{T}{2}, p = q \end{cases} \quad (9)$$

Из (8) издвајањем првог сабирка из дате суме и узимањем у обзир (9) добијамо:

$$\left(-E_o a + \frac{b_1}{a}\right) \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) \cdot d\theta = 0, \Rightarrow b_1 = E_o a^2, \quad n = 1. \quad (10)$$

Због особине (9) сви остали сабирци за $n > 1$ биће једнаки нули. Тако добијамо коначно рјешење за потенцијал ван области проводног цилиндра:

$$\varphi(r, \theta) = E_o \cdot \left(\frac{a^2}{r} - r\right) \cdot \cos \theta. \quad (11)$$

Примјер 1.57*

Одредити поље и потенцијал у систему који се састоји од хомогеног диелектрика облика лопте, диелектричне пропустљивости $\mathcal{E}$, полупречника a , у хомогеном пољу E_o у вакууму, [204].

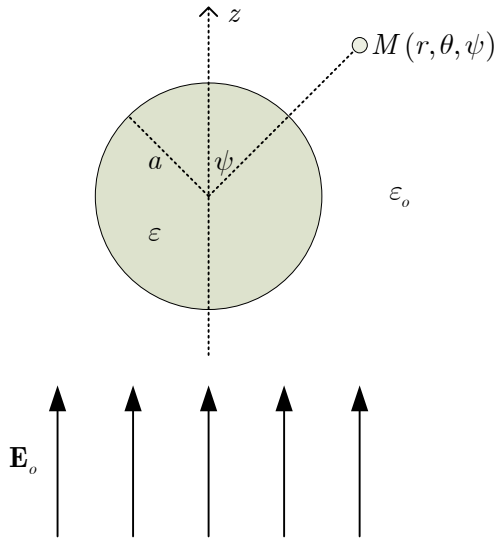
Рјешење:

Поставимо сферни координатни систем тако да z -оса буде у правцу поља E_o . Пошто у систему нема слободних наелектрисања, обје области (унутрашња “ i ” и вањска “ e ”) су хомогене и на њих можемо примијенити Лапласову једначину. Због симетрије, очигледно је да потенцијал неће зависити од координате θ , па раздвајањем промјенљивих имамо:

$$\varphi(r, \psi) = R(r) \cdot T(\psi). \quad (1)$$

Уврштавањем овог рјешења у полазну Лапласову једначину у сферном координатном систем и након дијелења са RT добијамо:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = - \frac{1}{T \sin \psi} \frac{d}{d\psi} \left(\sin \psi \frac{dT}{d\psi} \right)$$



Слика 1.69

(2)

што има смисла само ако су лијева и десна страна једнаке истој константи:

$$-\frac{1}{T \sin \psi} \frac{d}{d\psi} \left(\sin \psi \frac{dT}{d\psi} \right) = n. \quad (3)$$

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = n. \quad (4)$$

Одредимо партикуларна рјешења ових једначина за $n = 0$. Означимо та рјешења са R_o и T_o :

$$\frac{d}{d\psi} \left(\sin \psi \frac{dT}{d\psi} \right) = 0, \quad T_o(\psi) = \int \frac{C_1}{\sin \psi} d\psi + C_2 = C_1 \ln \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} + C_2. \quad (5)$$

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = 0, \quad R_o(r) = \frac{C_3}{r} + C_4. \quad (6)$$

Пошто угао θ узима вриједности $[0, \pi]$ константа C_1 мора бити једнака нули, у супротном би потенцијал био бесконачан. Рјешење (6) описује поље наелектрисане кугле. Наша кугла је диелектрична те је константа C_3 такође једнака нули. Тако партикуларно рјешење за потенцијал поприма облик:

$$\varphi_1(r, \psi) = R_o T_o = D_1. \quad (7)$$

Узмимо сад једначину (3) уз претпоставку да је $n \neq 0$:

$$-\frac{1}{T \sin \psi} \frac{dT}{d\psi} \left(\sin \psi \frac{dT}{d\psi} \right) = n, \Rightarrow \frac{d^2 T}{d\psi^2} + \frac{1}{\tan \psi} \frac{dT}{d\psi} + nT = 0. \quad (8)$$

Ову диференцијалну једначину називају Лежандровом и она даје зависност потенцијала од угла ψ . Да бисмо одредили у којем облику треба потражити партикуларни интеграл ове једначине, задржимо пажњу на граничним условима. Z-осу смо поставили у правцу поља E_o а координантни почетак је у центру диелектричне лопте.

Посматрајмо дио простора у коме се не осјећа утицај диелектрика на хомогено поље. Тамо ће бити:

$$E_o = E_z = -\frac{d\varphi_o}{dz}, \quad (9)$$

гдје је са φ_o означен потенцијал хомогеног поља довољно далеко од диелектричне кугле:

$$\varphi_o = -\int E \cdot dz = -E_o z + A_o = -E_o \cdot r \cdot \cos \psi + A_o. \quad (10)$$

Овај гранични услов показује да потенцијал зависи од $\cos \psi$, зато је практично потражити партикуларно рјешење Лежандрове једначине у облику:

$$T(\psi) = C_5 \cos \psi. \quad (11)$$

Уврстимо ово у једначину (8):

$$-C_5 \cos \psi - C_5 \cos \psi + n \cdot C_5 \cos \psi = 0 \Rightarrow n = 2. \quad (12)$$

Одавде слиједи да константа n треба да има вриједност 2. Тако једначина (6) примима облик:

$$\frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + 2 \frac{r}{R} \frac{dR}{dr} = 2. \quad (13)$$

Ова једначина се рјешава Ојлеровом смјеном:

$$R(r) = C_6 \cdot r^n, \quad (14)$$

што након уврштавања у (13) даје $n(n-1)+2n=2$. Одавде добијамо $n_1=1$ и $n_2=-2$. Коначно имамо:

$$R(r) = C_7 r + C_8 r^{-2}. \quad (15)$$

Множењем рјешења (11) и (15) добијамо:

$$\varphi_2(r, \psi) = \left(D_2 r + \frac{D_3}{r^2} \right) \cdot \cos \psi. \quad (16)$$

Сабирањем партикуларних рјешења (7) и (16) добијамо:

$$\varphi(r, \psi) = \varphi_1 + \varphi_2 = D_1 + \left(D_2 r + \frac{D_3}{r^2} \right) \cos \psi. \quad (17)$$

Коначно добијамо облик рјешења за потенцијал за унутрашњу и спољашњу област:

$$\varphi_i(r, \psi) = C_1 + \left(C_2 r + \frac{C_3}{r^2} \right) \cos \psi, \quad (18)$$

$$\varphi_e(r, \psi) = D_1 + \left(D_2 r + \frac{D_3}{r^2} \right) \cos \psi. \quad (19)$$

Константа C_3 мора бити нула, иначе би потенцијал у центру лопте био бесконачан. У бесконачности, потенцијал не може да се разликује од потенцијала хомогеног поља φ_o те су: $D_1 = A_o$ и $D_2 = -E_o$. Посљедње двије једначине, након овога, имају облик:

$$\varphi_i(r, \psi) = C_1 + C_2 \cdot r \cdot \cos \psi, \quad (20)$$

$$\varphi_e(r, \psi) = A_o - E_o r \cos \psi + \frac{D_3}{r^2} \cos \psi. \quad (21)$$

Гранични услови за $r = a$ су:

$$\varphi_i = \varphi_e \quad \text{и} \quad \varepsilon_r \frac{\partial \varphi_i}{\partial r} = \frac{\partial \varphi_e}{\partial r}. \quad (22)$$

Из ових граничних услова добија се:

$$C_1 = A_o, \quad C_2 = -\frac{1}{\varepsilon_r} \left(E_o + 2 \frac{D_3}{a^3} \right), \quad D_3 = E_o \cdot a^3 \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}. \quad (23)$$

Коначно:

$$\varphi_{i_i}(r, \psi) = A_o - \frac{3E_o}{\varepsilon_r + 2} \cdot r \cdot \cos \psi, \quad (24)$$

$$\varphi_e(r, \psi) = A_o + \left(\frac{a^3}{r^3} \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} - 1 \right) E_o r \cos \psi. \quad (25)$$

Када се у добијено рјешење за унутрашњу област $r \cdot \cos \theta$ замијени са координатом z , израз (24) поприма облик:

$$\varphi_i(z) = A_o - \frac{3E_o}{\varepsilon_r + 2} \cdot z. \quad (26)$$

Поље у унутрашњој области непосредно слиједи као:

$$E_i = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{3E_o}{\varepsilon_r + 2} = \text{const.} \quad (28)$$

Дакле, поље унутар диелектричне лопте је хомогено и у правцу поља E_o .

Спољашње поље има двије компоненте:

$$\mathbf{E}(r, \psi) = -\text{grad} \varphi(r, \psi) = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} \hat{\psi}, \Rightarrow$$

$$E_r = -\frac{\partial \varphi_e}{\partial r} = \left(1 + \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} \frac{2a^3}{r^3} \right) \cdot E_o \cos \psi. \quad (29)$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_e}{\partial \theta} = \left(\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} \cdot \frac{a^3}{r^3} \right) \cdot E_o \sin \psi. \quad (30)$$

Примјер 1.58

Користећи интегрални облик Пуасонове једначине, односно Гринов интеграл, извести одговарајући облик једначине за случај да су површине које су граница области V еквипотенцијалне површине, нпр. површине проводника, [205].

Рјешење:

Општени облик Гриноа интеграла могуће је написати у облику:

$$\varphi_M = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r})}{R} dV + \sum_k \frac{1}{4\pi} \oint_{S_k} \left[\frac{1}{R} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n_k} - \varphi \cdot \frac{\partial}{\partial n_k} \left(\frac{1}{R} \right) \right] \cdot d\mathbf{S}_k. \quad (1)$$

По претпоставци, површине S_k су еквипотенцијалне па облик (1) можемо написати као:

$$\varphi_M = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r})}{R} dV + \sum_k \frac{1}{4\pi} \oint_{S_k} \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n_k} \cdot d\mathbf{S}_k - \sum_k \frac{\varphi_k}{4\pi} \oint_{S_k} \frac{\partial}{\partial n_k} \left(\frac{1}{R} \right) \cdot d\mathbf{S}_k \quad (2)$$

гдје су $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_N$ потенцијали површина $S_1, S_2, S_3, \dots, S_N$. Други интеграл у претходној релацији је Гаусов интеграл, за који важи:

$$\oint_{S_k} \frac{\partial}{\partial n_k} \left(\frac{1}{R} \right) \cdot dS_k = - \oint_{S_k} \frac{\cos(\mathbf{r}_{MN}, \mathbf{n}_N)}{R^2} dS_N = \begin{cases} 0, & M \notin V, M \notin S \\ -2\pi, & M \in S \\ -4\pi, & M \in V \end{cases} \quad (3)$$

Нека је тачка M унутрашња тачка области ограничене површином S_1 . Она је тада вањска тачка свим осталим површинама S_k , те из (2) имамо:

$$\varphi_M = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r})}{R} dV + \sum_k \frac{1}{4\pi} \oint_{S_k} \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n_k} \cdot d\mathbf{S}_k + \varphi_1. \quad (4)$$

Ако је тачка M изван области V , онда је она вањска за све површине S_k , те из (2) коначно имамо интегрални облик Пуасонове једначине за случај када су границе области еквипотенцијалне, односно проводне површине:

$$\varphi_M = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r})}{R} dV + \sum_k \frac{1}{4\pi} \oint_{S_k} \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n_k} \cdot d\mathbf{S}_k. \quad (5)$$

—*—