

1. Функцију $f(x) = |x|(\pi - |x|)$ развити у Фуријеов ред на сегменту $[-\pi, \pi]$. На основу добијеног развоја наћи суме редова $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

2. Наћи у облику степеног реда партикуларно рјешење диференцијалне једначине

$$x^2 y'' + x(x-3)y' + (4-x)y = 0.$$

Добијено рјешење изразити преко елементарних функција.

3. Функцијом $w = \frac{z-1}{z-2}$ пресликати појас $0 < \operatorname{Re} z < 1$.

4. Контурном интеграцијом израчунати интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x(x^2 + b^2)} dx, \quad (a, b \in \mathbb{R}, a, b > 0).$$

5. Ријешити систем диференцијалних једначина

$$-x'' + 3x' - 2x + y' - y = 0,$$

$$-x' + x - y'' + 5y' - 4y = 0,$$

$$x(0) = x'(0) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

1. Интеграцијом помоћу степенних редова наћи опште рјешење диференцијалне једначине $(1-x)y' + y = 1+x$, $y(0) = 0$. Добијено рјешење изразити преко елементарних функција.

2. Ријешити систем диференцијалних једначина

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 3x - 2y - z, \\ \dot{y} &= 3x - 4y - 3z, \\ \dot{z} &= 2x - 4y.\end{aligned}$$

3. Одредити аналитичку функцију $f(z) = u + iv$ чији имагинарни дио има облик

$$v = \frac{x}{x^2 + (y-1)^2}.$$

4. Функцијом $w = \frac{\sin z}{e^{iz}}$ пресликати област $\frac{\pi}{6} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{4}$.

5. Функцију $f(x) = \frac{1}{5 + 4 \cos x}$ развити у Фуријеов ред.

6. Ријешити систем диференцијалних једначина

$$\begin{aligned}x'' - 3x' + 2x + y' - y &= 0, \\ x' - x - y'' + 5y' - 4y &= 0, \\ x(0) = x'(0) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) &= 0.\end{aligned}$$

ДРУГИ КОЛОКВИЈУМ: задаци 3, 4, 5, 6

ИСПИТ: задаци 1, 2, 4, 5, 6

1. Наћи суму реда $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + n - 2}$.
2. Нека је $-1 < \alpha < 1$. Функцију $f(x) = \cos \alpha x$ развити у Фуријеов ред на сегменту $[-\pi, \pi]$. На основу добијеног развоја наћи суму реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 - n^2}$.
3. Функцијом $w = \operatorname{th} z$ пресликати област $-\frac{\pi}{4} < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{4}$.
4. Контурном интеграцијом израчунати интеграл $\int_0^{2\pi} \frac{\cos x}{(a - \cos x)^2} dx$, ($a \in \mathbb{R}$, $a > 1$).
5. Ријешити систем интегралних једначина

$$x(t) = e^t + \int_0^t x(u) du - \int_0^t e^{t-u} y(u) du,$$
$$y(t) = -t - \int_0^t (t-u)x(u) du + \int_0^t y(u) du.$$

6. Одредити ону интегралну површ парцијалне једначине

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - x^2 - y^2$$

која садржи криву $y = -2$, $z = x - x^2$.

ДРУГИ КОЛОКВИЈУМ: задаци 3, 4, 5, 6
ИСПИТ: задаци 1, 2, 3, 4, 5

1. Испитати конвергенцију и наћи суму реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2} \frac{x^n}{n!}$.

2. Функцију

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ако је } |x| \leq \pi/2, \\ \pi \operatorname{sign} x - x, & \text{ако је } \pi/2 \leq |x| \leq \pi \end{cases}$$

развијати у Фуријеов ред на сегменту $[-\pi, \pi]$. На основу добијеног развоја наћи суму реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$.

3. Функцијом $\omega = \frac{iz^2 + 2z + 3i}{z^2 - 2iz - 1}$ пресликати област $|z-i| < 2$, $-\frac{5\pi}{6} < \arg(z-i) < -\frac{\pi}{2}$.

4. Наћи аналитичку функцију $f(z) = u + iv$, ако је $f(0) = 2$, а имагинарни дио функције има облик $v = 2 \cos x \operatorname{ch} y - x^2 + y^2$.

5. Помоћу контурне интеграције израчунати интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^4 + 1)^2}$$

6. Примјеном Лапласове трансформације ријешити једначину

$$\int_0^t e^{2(t-\tau)} f(\tau) d\tau = t^2 e^t.$$

ДРУГИ КОЛОКВИЈУМ: задаци 3, 4, 5, 6
ИСПИТ: задаци 1, 2, 3, 5, 6

1. Наћи суму реда $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2 - 1}$.
2. Функцију $f(x) = (\cos x)\text{sign } x$ развити у Фуријеов ред на интервалу $[-\pi, \pi]$. На основу добијеног развоја наћи суму реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(4n^2 - 1)^2}$.
3. Функцијом $\omega = i \frac{z^4 + 1}{z^4 - 1}$ пресликати област $|z| < 1$, $0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$.

4. Помоћу контурне интеграције израчунати интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1)\cos 5x}{x^2 - 2x + 5} dx.$$

5. Примјеном Лапласове трансформације ријешити систем једначина

$$f(t) = 2 - \int_0^t (t-\tau)f(\tau)d\tau - 4 \int_0^t g(\tau)d\tau,$$

$$g(t) = 1 - \int_0^t f(\tau)d\tau - \int_0^t (t-\tau)g(\tau)d\tau.$$

1. У Фуријеов ред на сегменту $[-\pi, \pi]$ развити функцију

$$f(x) = \begin{cases} \sin 2x, & \text{ако је } |x| \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{ако је } \frac{\pi}{2} \leq |x| \leq \pi. \end{cases}$$

На основу добијеног развоја наћи суму реда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4n^2 + 4n - 3}$.

2. Интеграцијом помоћу степених редова ријешити диференцијалну једначину

$$(1 + x^2)y'' + xy' - y = 0,$$

па затим добијено рјешење изразити преко елементарних функција.

3. Одредити опште рјешење система диференцијалних једначина

$$\begin{aligned} \dot{x} &= z, \\ \dot{y} &= x + y, \\ \dot{z} &= x + y + z. \end{aligned}$$

4. Помоћу контурне интеграције израчунати интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \frac{\sin x}{x} dx.$$

5. Примјеном Лапласове трансформације ријешити диференцијалну једначину

$$tx''' + 2x'' + x' + (t - 1)x = 0,$$

$$x(0) = 1, x'(0) = -1, x''(0) = 1.$$

Математика 3

14.05.2016.

1. Испитати конвергенцију и наћи суму реда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{2n(2n-1)}.$$

2. Функцију $f(x) = \frac{1}{5 + 4 \cos x}$ развити у Фуријеов ред.

3. Дата је функција $\omega = \frac{z-i}{z+i} e^{i\alpha}$, ГТБЕ је α реалан број.

а) Функцијом ω преликати горњу полураван $\text{Im} > 0$.

б) Одредити параметар α тако да $z = 1$ буде фиксна тачка функције ω .

4. Израчунати интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{1 + x^2 + x^4} dx.$$

5. Примјеном Лапласове трансформације ријешити диференцијалну једначину

$$\ddot{y} + 4y = \sin^2 t, \quad y(0) = \dot{y}(0) = 0.$$

Математика 3

15.04.2016.

1. Функцију $f(x) = (\pi^2 - x^2)^2$ развити у Фуријеов ред у интервалу $[-\pi, \pi]$. На основу добијеног развоја наћи суму реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4}$.
2. а) Показати да је функција $y = (\arcsin x)^2$ партикуларно рјешење диференцијалне једначине $(1 - x^2)y'' - xy' = 2$, $y(0) = y'(0) = 0$.
б) Развити функцију $y = (\arcsin x)^2$ у степени ред у околини тачке $x = 0$.
3. а) Наћи билинеарну функцију ω која тачку ∞ пресликава у координатни почетак, координатни почетак у 1, а 1 у ∞ .
б) На који скуп тачака функција $\omega_1 = z\omega$ пресликава област $|z - \frac{4}{3}| < \frac{2}{3}$?

4. Помоћу контурне интеграције израчунати интеграл $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 4)} dx$.

5. Ријешити интегралну једначину $f(x) = \sin x + 2 \int_0^x \cos(x - u)f(u)du$.

6. Одредити ону интегралну површ парцијалне једначине

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + 2y \frac{\partial z}{\partial y} = z + x$$

која садржи криву $y = x^3$, $z = x^2 - 1$.

ДРУГИ КОЛОКВИЈУМ: задаци 3, 4, 5, 6
ИСПИТ: задаци 1, 2, 3, 4, 5

Математика 3

15.02.2016.

1. Испитати конвергенцију и наћи суму реда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{4n^2 - 1}.$$

2. Функцију $f(x) = x(\pi - |x|)$ развити у Фуријеов ред на сегменту $[-\pi, \pi]$. На основу добијеног развоја наћи суму редова

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^6}.$$

3. Наћи аналитичку функцију $f(x) = u + iv$ чији имагинарни дио има облик $v = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, гдје је φ два пута диференцијабилна функција.

4. Функцијом $\omega = \frac{e^{-z} + i}{e^{-z} - i}$ пресликати област $0 < \text{Im } z < \frac{\pi}{2}$.

5. Помоћу контурне интеграције израчунати интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{(x^2 + 4x + 13)^2}.$$

6. Примјеном Лапласове трансформације ријешити систем диференцијалних једначина

$$\begin{aligned} \dot{x} + 9\dot{y} + x &= 2e^{-3t}, \\ 5\dot{y} + \dot{x} - y &= 3e^{-3t}, \\ x(0) &= -5, \quad y(0) = 0. \end{aligned}$$

ДРУГИ КОЛОКВИЈУМ: задаци 3, 4, 5, 6

ИСПИТ: задаци 1, 2, 4, 5, 6

1. Испитати конвергенцију редова $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-2}{n+2}\right)^{n(n+1)}$ и $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n}$.
2. Испитати конвергенцију и наћи суму реда: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{4n^2-1} x^{2n}$.
3. Функцију $f(x) = |\sin x|$ развити у Фуријеов ред на сегменту $[-\pi, \pi]$. На основу добијеног развоја наћи суму реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{16n^2-1}$.
4. Ријешити систем диференцијалних једначина

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x + 2y + t, \\ \dot{y} &= 2x + y + t.\end{aligned}$$

5. а) Наћи билинеарну функцију ω која тачку 1 пресликава у координатни почетак, тачку -2 у тачку $3i$, а праву $\operatorname{Re} z = 0$ на јединичну кружницу.
б) На који скуп тачака се јединични круг пресликава функцијом $\ln \omega$?

6. Помоћу контурне интеграције израчунати интеграл $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^6}$.

7. Примјеном Лапласове трансформације ријешити систем диференцијалних једначина

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2\dot{y} - 2x &= 0, & \ddot{y} - 2\dot{x} - 2y &= 0, \\ x(0) = 0, \dot{x}(0) &= 1, & y(0) = 0, \dot{y}(0) &= 0.\end{aligned}$$

8. Одредити ону интегралну површ парцијалне једначине

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - xy$$

која садржи криву $x = 2, z = y^2 + 1$.

ПРВИ КОЛОКВИЈУМ: задаци 1, 2, 3, 4
ДРУГИ КОЛОКВИЈУМ: задаци 5, 6, 7, 8
ИСПИТ: задаци 2, 3, 5, 6, 7

Математика 3

29.01.2016.

1. Функцију $f(x) = \operatorname{sgn} x \cos x$ развити у Фуријеов ред на сегменту $[-\pi, \pi]$. На основу добијеног развоја наћи суму реда $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{4(2n+1)^2-1}$.

2. Наћи у облику степеног реда рјешење диференцијалне једначине

$$(1-x^2)y'' - 4xy' - 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1,$$

па затим добијено рјешење изразити преко елементарних функција.

3. а) Наћи $|\sin z|$ ако је $z = \pi + i \ln(2 + \sqrt{5})$.

б) Одредити аналитичку функцију $f(z) = f(x + iy) = u + iv$ ако њен реални дио има облик $u = 2 \sin x \operatorname{ch} y - x$.

4. Функцијом $w = \left(\frac{1 - e^{3z}}{1 + e^{3z}}\right)^3$ пресликати област $\operatorname{Re} z < 0, 0 < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{3}$.

5. Помоћу контурне интеграције израчунати интеграл $\int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x}{2 + \cos x} dx$.

6. Ријешити интегралну једначину $f(t) = t + 2 \int_0^t (u - \sin u) f(t-u) du$.

ДРУГИ КОЛОКВИЈУМ: задаци 3, 4, 5, 6

ИСПИТ: задаци 1, 2, 3, 5, 6

Математика 3

ПРВИ КОЛОКВИЈУМ, 30.11.2015.

1. а) Одредити парцијалну суму, испитати конвергенцију и наћи суму реда

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots$$

- б) Одредити да ли конвергира ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{(a + \sqrt{1})(a + \sqrt{2}) \cdots (a + \sqrt{n})} \quad (a > 0).$$

2. Функцију $f(x) = (\pi - |x|) \operatorname{sign} x$ развити у Фуријеов ред на сегменту $[-\pi, \pi]$. На основу добијеног развоја наћи суме редова $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

3. Наћи у облику степеног реда рјешење диференцијалне једначине

$$xy'' + 2y' + xy = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0,$$

па затим добијено рјешење изразити преко елементарних функција.

4. Ријешити систем диференцијалних једначина

$$\dot{x} = -4x - 2y + \frac{2}{e^t - 1},$$

$$\dot{y} = 6x + 3y - \frac{3}{e^t - 1}.$$

Математика 3

16.11.2015.

1. Функцију $f(x) = \max\{\sin x, 0\}$ развити у Фуријеов ред, па затим наћи суму реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1}.$$

2. Одредити у облику степеног реда опште рјешење диференцијалне једначине

$$x^2 y'' - x(x + 3)y' + (x + 4)y = 0,$$

па затим добијено рјешење приказати у облику елементарних функција.

3. Функцијом $w = \frac{\sin z}{e^{iz}}$ пресликати област $\frac{\pi}{6} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{4}$.

4. Израчунати интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin x}{x^4 + 5x^2 + 4} dx.$$

5. Ријешити интегралну једначину

$$f(t) = t + 2 - 2 \cos t - \int_0^t (t - u)f(u)du.$$

1. Функцију $f(x) = x \sin x$ развити у Фуријеов ред у интервалу $[-\pi, \pi]$. Користећи добијени развој, наћи суму реда $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - 1}$.

2. Интеграцијом помоћу степених редова ријешити диференцијалну једначину

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0,$$

а затим њено рјешење изразити преко елементарних функција.

3. Функцијом $w = \operatorname{ctg} z$ прсликати област $D = \{z : 0 < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{4}\}$.

4. Израчунати интеграл

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{(a - \cos x)^2} dx, \quad |a| > 1.$$

5. Ријешити систем интегралних једначина

$$f(x) = 2x - \int_0^x (x-t)f(t)dt + \int_0^x g(t)dt,$$

$$g(x) = -2 - 4 \int_0^x f(t)dt + 3 \int_0^x (x-t)g(t)dt.$$

Математика 3

05.10.2015.

1. Испитати конвергенцију и наћи суму реда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{4n^2-1} x^{2n}$.

2. Функцију $f(x) = x(\pi - |x|)$ развити у Фуријеов ред у интервалу $[-\pi, \pi]$. Користећи добијени развој, наћи суме редова

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^6}.$$

3. Функцијом $w = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2$ пресликати полукруг $|z| < 1, \operatorname{Im} z < 0$.

4. Израчунати интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\cos ax + \sin ax)}{x^2 + 4x + 13} dx \quad (a > 0)$.

5. Примјеном Лапласове трансформације ријешити систем диференцијалних једначина

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \dot{y} + x &= e^t, & \dot{y} + \dot{x} &= 1, \\ x(0) = 1, \dot{x}(0) &= 0, & y(0) = -1, \dot{y}(0) &= 2. \end{aligned}$$

1. У Фуријеов ред на сегменту $[-\pi, \pi]$ развити функцију

$$f(x) = \begin{cases} \sin 2x, & \text{ако је } |x| \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{ако је } \frac{\pi}{2} \leq |x| \leq \pi. \end{cases}$$

На основу добијеног развоја наћи суму реда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4n^2 + 4n - 3}$.

2. Интеграцијом помоћу степених редова ријешити диференцијалну једначину

$$(1 + x^2)y'' + xy' - y = 0,$$

па затим добијено рјешење изразити преко елементарних функција.

3. Наћи билинеарну функцију која имагинарну осу пресликава у јединичну кружницу, тачку 1 у координатни почетак, а координатни почетак у тачку i .

4. Функцијом $w = \frac{z}{z-1}$ прсликати троугао $0 < \operatorname{Re} z < \operatorname{Im} z < 1$.

5. Израчунати интеграл $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x(x^2 + 4)^2} dx$.

6. Ријешити интегралну једначину

$$\int_0^x \left(t - \frac{t^3}{3}\right) f(x-t) dt = \sin^2 \frac{x}{2}.$$

ДРУГИ КОЛОКВИЈУМ: задаци 3, 4, 5, 6

ИСПИТ: задаци 1, 2, 4, 5, 6

1. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-2}{n+2} \right)^{n(n+1)}$.

2. Наћи суму реда: $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2 - 1}$.

3. Наћи у облику степеног реда рјешење диференцијалне једначине

$$(x - x^2)y'' - 3y' + 2y = 0,$$

па затим добијено рјешење изразити преко елементарних функција.

4. Ријешити систем диференцијалних једначина

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x - y - z, \\ \dot{y} &= x + y, \\ \dot{z} &= 3x + z.\end{aligned}$$

5. Наћи билинеарну функцију која имагинарну осу пресликава у јединичну кружницу, тачку 1 у координатни почетак, а координатни почетак у тачку i .

6. Функцијом $w = e^{\frac{\pi(z-1)}{z-1-i}}$ пресликати област $D = \{z : |z - i| > 1, \operatorname{Re} z < 1\}$

7. Развити функцију $f(x) = \frac{1}{2 + \cos x}$ у Фуријеов ред на сегменту $[-\pi, \pi]$.

8. Ријешити диференцијалну једначину

$$x'' + tx' + (t - 1)x = 0,$$

$$y(0) = 1, y'(0) = -1.$$

ПРВИ КОЛОКВИЈУМ: задаци 1, 2, 3, 4

ДРУГИ КОЛОКВИЈУМ: задаци 5, 6, 7, 8

ИСПИТ: задаци 2, 4, 6, 7, 8

1. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1) \cdots (a+n-1)b(b+1) \cdots (b+n-1)}{n! c(c+1) \cdots (c+n-1)}$.
2. Функцију $f(x) = (\pi^2 - x^2)^2$ развити у Фуријеов ред на сегменту $[-\pi, \pi]$. На основу добијеног развоја наћи суму реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^4}$.

3. Наћи у облику степеног реда рјешење диференцијалне једначине

$$(x - x^2)y'' - 3y' + 2y = 0,$$

па затим добијено рјешење изразити преко елементарних функција.

4. Ријешити систем диференцијалних једначина

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2x - y + 2z, \\ \dot{y} &= x + 2z, \\ \dot{z} &= -2x + y - z.\end{aligned}$$

5. Одредити аналитичку функцију $f(z) = u + iv$, ако је $u = e^x(x \cos y - y \sin y)$ и $f(0) = 0$.

6. Функцијом $w = \frac{1}{a - e^{-iz}}$ пресликати област $D = \{z : 0 < \text{Im } z < \ln a, 0 < \text{Re } z < \pi\}$.

7. Израчунати интеграл $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3x}{1 - 2a \cos x + a^2} dx, |a| \neq 1$.

8. Примјеном Лапласове трансформације ријешити систем интегралних једначина

$$x(t) = t + \int_0^t e^{-(t-u)} x(u) du + \int_0^t (t-u)y(u) du,$$

$$y(t) = 1 + \int_0^t \text{sh}(t-u)x(u) du - \int_0^t e^{t-u} y(u) du.$$

ПРВИ КОЛОКВИЈУМ: задаци 1, 2, 3, 4

ДРУГИ КОЛОКВИЈУМ: задаци 5, 6, 7, 8

ИСПИТ: задаци 2, 3, 6, 7, 8

1. Испитати конвергенцију и наћи суму реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2} \frac{x^n}{n!}$.

2. Функцију

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ако је } |x| \leq \pi/2, \\ \pi \operatorname{sign} x - x, & \text{ако је } \pi/2 \leq |x| \leq \pi \end{cases}$$

развијати у Фуријеов ред на сегменту $[-\pi, \pi]$. На основу добијеног развоја наћи суму

реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$.

3. Наћи у облику степеног реда рјешење диференцијалне једначине

$$x^2 y'' - x^2 y' + (x-2)y = 0,$$

па затим добијено рјешење изразити преко елементарних функција.

4. Ријешити систем диференцијалних једначина

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2x - y + 2z, \\ \dot{y} &= x + 2z, \\ \dot{z} &= -2x + y - z. \end{aligned}$$

5. Одредити аналитичку функцију $f(z) = u + iv$, ако је $u = \ln(x^2 + y^2) + x - 2y$.

6. Одредити које услове треба испуне реалне константе a, b и c да би пресликавањем $w = \frac{z+a}{bz+c}$ кружница $|z|=1$ прелазила у праву $\operatorname{Re} w = 2$.

7. Израчунати интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2 + 4x + 13)^2} dx$.

8. Примјеном Лапласове трансформације ријешити интегралну једначину

$$\int_0^x (x-t)^2 \phi(t) dt = 2\phi(x) - 2e^{-x}.$$

ПРВИ КОЛОКВИЈУМ: задаци 1, 2, 3, 4

ДРУГИ КОЛОКВИЈУМ: задаци 5, 6, 7, 8

ИСПИТ: задаци 2, 3, 6, 7, 8

1. Наћи суму реда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{n!}$.

2. Функцију $f(x)$ дефинисану са

$$f(x) = \begin{cases} |x + \pi/2| - \pi/2, & \text{за } -\pi \leq x \leq 0, \\ \pi/2 - |x - \pi/2|, & \text{за } 0 \leq x \leq \pi, \end{cases}$$

развијати у Фуријеов ред. На основу добијеног развоја наћи суме редова

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}.$$

3. Развијати у ред по степенима x функцију $\ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

4. Ријешити систем диференцијалних једначина

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2x + y + 2e^t, \\ \dot{y} &= x + 2y - 3e^{4t}. \end{aligned}$$

5. Одредити аналитичку функцију $f(z)$ ако је $u = x^2 - y^2 + 5x + y - \frac{y}{x^2 + y^2}$.

6. Функцијом $w = \frac{z + 2i}{2iz - 1}$ пресликати област $D = \{z : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$.

7. Израчунати интеграл $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x(x^2 + 4x + 5)} dx$.

8. Примјеном Лапласове трансформације ријешити диференцијалну једначину

$$\begin{aligned} xy''' + 2y'' + y' + (x-1)y &= 0, \\ y(0) = 1, y'(0) = -1, y''(0) &= 1. \end{aligned}$$

ПРВИ КОЛОКВИЈУМ: задаци 1, 2, 3, 4

ДРУГИ КОЛОКВИЈУМ: задаци 5, 6, 7, 8

ИСПИТ: задаци 1, 2, 6, 7, 8

1. Испитати конвергенцију и наћи суму реда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{2n+1} x^{2n}$.
2. Функцију $f(x) = e^x$ развити у Фуријеов ред на сегменту $[-\pi, \pi]$. На основу добијеног развоја наћи суме редова:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}.$$

3. Интеграцијом помоћу степених редова наћи опште рјешење диференцијалне једначине $y'' + y = 0$.
4. Ријешити систем диференцијалних једначина

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x - z, \\ \dot{y} &= -6x + 2y + 6z, \\ \dot{z} &= 4x - y - 4z.\end{aligned}$$

5. Одредити аналитичку функцију $f(z) = u + iv$ чији је реални дио $u = \varphi(x^2 + y^2)$.
6. Функцијом $w = \frac{e^{-z} + i}{e^{-z} - i}$ пресликати област $D = \{z : 0 \leq \text{Im } z \leq \frac{\pi}{2}\}$.

7. Израчунати интеграл $\int_{|z|=3} z \frac{\sin z}{z^2 - 7z + 10} dz$.

8. Ријешити интегрално-диференцијалну једначину

$$16 \int_0^x y(x-t) \sin 2t dt + y''(x) + 2y'(x) - 4y(x) = 0,$$

$$y(0) = 1, y'(0) = -4.$$

ПРВИ КОЛОКВИЈУМ: задаци 1, 2, 3, 4

ДРУГИ КОЛОКВИЈУМ: задаци 5, 6, 7, 8

ПИСМЕНИ ИСПИТ ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ: задаци 2, 4, 6, 7, 8

ПИСМЕНИ ИСПИТ МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ: задаци 2, 3, 4, 5, 7

1. Наћи суму реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{2^n}$.
2. Функцију $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin x) + \operatorname{sgn}(\cos x)$ развити у Фуријеов ред у интервалу $[-\pi, \pi]$.
На основу добијеног развоја наћи суму реда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.
3. Интеграцијом помоћу степених редова наћи опште рјешење диференцијалне једначине $(1+x^2)y'' + xy' - y = 0$. Добијено рјешење изразити преко елементарних функција.
4. Ријешити систем диференцијалних једначина

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2x - y + 2z, \\ \dot{y} &= x + 2z, \\ \dot{z} &= -2x + y - z.\end{aligned}$$

5. Одредити аналитичку функцију $f(z) = u + iv$ чији је имагинарни дио $v = \ln[x^2 + (y-1)^2]$.
6. Функцијом $w = \frac{i}{z-i}$ прсликати област $D = \{z : |z-4i| < 3, |z-i| < 1\}$.
7. Израчунати интеграл $\int_{|z-1|=1} z \operatorname{tg} \pi z dz$.
8. Ријешити систем диференцијалних једначина

$$\begin{aligned}x'' - 3x' + 2x + y' - y &= 0, \\ x' - x - y'' + 5y' - 4y &= 0, \\ x(0) = x'(0) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) &= 0.\end{aligned}$$

ПРВИ КОЛОКВИЈУМ: задаци 1, 2, 3, 4
ДРУГИ КОЛОКВИЈУМ: задаци 5, 6, 7, 8
ПИСМЕНИ ИСПИТ: задаци 2, 3, 6, 7, 8

1. Функцију $f(x) = |x + \frac{\pi}{2}| - 2|x| + |x - \frac{\pi}{2}|$ развити у Фуријеов ред у интервалу $[-\pi, \pi]$.
На основу добијеног развоја наћи суму реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

2. Интеграцијом помоћу степених редова наћи опште рјешење диференцијалне једначине $(1-x)y' + y = 1+x$. Добијено рјешење изразити преко елементарних функција.
3. Одредити аналитичку функцију $f(z) = u + iv$ чији имагинарни дио има облик

$$v = \frac{x}{x^2 + (y-1)^2}.$$

4. Функцијом $w = \frac{\sin z}{e^{iz}}$ преликати област $\frac{\pi}{6} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{4}$.

5. Израчунати интеграл $\int_0^{\pi} \frac{\sin x \sin kx}{1 - 2a \cos x + a^2} dx$ ($a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $|a| < 1$).

6. Ријешити интегралну једначину

$$f(x) = e^{2x} + \cos 3x + \int_0^x \sin(x-t)f(t)dt.$$

Математика 3

ПРВИ КОЛОКВИЈУМ, 01.12.2014.

1. Испитати конвергенцију и наћи суму реда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2 + 1}{(2n)!} x^{2n}$.

2. Функцију $f(x) = \cos \frac{x}{6}$ развити у Фуријеов ред на интервалу $[-\pi, \pi]$.
На основу добијеног развоја наћи суме редова:

а) $\frac{1}{5 \cdot 7} - \frac{1}{11 \cdot 13} + \frac{1}{17 \cdot 19} - \frac{1}{23 \cdot 25} + \dots$,

б) $\frac{1}{11 \cdot 13} - \frac{1}{23 \cdot 25} + \frac{1}{35 \cdot 37} - \frac{1}{47 \cdot 49} + \dots$.

3. Одредити у облику степеног реда рјешење диференцијалне једначине

$$y'' + 2xy' + 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2,$$

па затим добијено рјешење приказати помоћу елементарних функција.

4. Ријешити систем диференцијалних једначина

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 3x - 2y - z, \\ \dot{y} &= 3x - 4y - 3z, \\ \dot{z} &= 2x - 4y. \end{aligned}$$

1. Функцију $f(x) = x^2 |\sin x|$ развити у Фуријеов ред у интервалу $[-\pi, \pi]$.

2. Одредити у облику степеног реда опште рјешење диференцијалне једначине

$$x^2 y'' - x(x+3)y' + (x+4)y = 0,$$

па затим добијено рјешење приказати у облику елементарних функција.

3. Одредити аналитичку функцију $w = f(z)$ која угао $\frac{\pi}{6} < \arg z < \frac{\pi}{3}$ пресликава на јединични круг.

4. Израчунати интеграл $\int_0^{\infty} \frac{\sin 3x}{(1+x^2) \sin x} dx$.

5. Примјеном Лапласове трансформације ријешити систем диференцијалних једначина

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \dot{y} + x &= e^t, & \ddot{y} + \dot{x} &= 1, \\ x(0) &= 1, \dot{x}(0) = 0, & y(0) &= -1, \dot{y}(0) = 2. \end{aligned}$$

1. Наћи суму реда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n^2 + 3)x^{2n}}{n!}$.

2. Функцију $f(x) = (\pi^2 - x^2)^2$ развити у Фуријеов ред у интервалу $[-\pi, \pi]$.
На основу добијеног развоја наћи суму реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4}.$$

3. Функцијом $w = \frac{z}{z-1}$ пресликати област $\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{2}$.

4. Израчунати интеграл $\int_0^{\pi} \frac{1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x}{5 + 4 \cos x} dx$.

5. Ријешити систем диференцијалних једначина

$$x' + 7x - y = 0,$$

$$y' + 2x + 5y = 0,$$

$$x(0) = 1, y(0) = 1.$$

1. Наћи суму реда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n^2 + 3)x^{2n}}{n!}$.

2. Функцију $f(x) = (\pi^2 - x^2)^2$ развити у Фуријеов ред у интервалу $[-\pi, \pi]$.
На основу добијеног развоја наћи суму реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4}.$$

3. Функцијом $w = \frac{z}{z-1}$ пресликати област $\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{2}$.

4. Израчунати интеграл $\int_0^{\pi} \frac{1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x}{5 + 4 \cos x} dx$.

5. Ријешити систем диференцијалних једначина

$$x' + 7x - y = 0,$$

$$y' + 2x + 5y = 0,$$

$$x(0) = 1, y(0) = 1.$$

1. Наћи суму реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2} \frac{x^n}{n!}$.

2. Функцију $f(x) = x \sin x$ развити у Фуријеов ред на интервалу $(-\pi, \pi)$.
Који се нумерички ред добија за $x = \pi$ и колика је његова сума?

3. а) Показати да је функција $y = (\arcsin x)^2$ рјешење диференцијалне једначине

$$(1 - x^2)y'' - xy' = 2, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

б) Користећи резултат под а), или на неки други начин, развити функцију $y = (\arcsin x)^2$ у степени ред у околини тачке $x = 0$.

4. Ријешити систем диференцијалних једначина

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 3x - y + z, \\ \dot{y} &= x + y + z, \\ \dot{z} &= 4x - y + 4z. \end{aligned}$$

5. Одредити аналитичку функцију $f(z) = u + iv$ чији реални дио има облик $u = \varphi(x^2 - y^2)$, гдје је φ два пута диференцијабилна функција.

6. Функцијом $w = \operatorname{th} z$ пресликати област $-\frac{\pi}{4} < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{4}$.

7. Израчунати интеграл $\int_0^{2\pi} \frac{\cos x}{(a - \cos x)^2} dx \quad (a > 1)$.

8. Ријешити систем интегралних једначина

$$\begin{aligned} x(t) &= e^t + \int_0^t x(u) du + \int_0^t e^{t-u} y(u) du, \\ y(t) &= -t - \int_0^t (t-u)x(u) du + \int_0^t y(u) du. \end{aligned}$$

ПРВИ КОЛОКВИЈУМ: задаци 1, 2, 3, 4

ДРУГИ КОЛОКВИЈУМ: задаци 5, 6, 7, 8

ПИСМЕНИ ИСПИТ: задаци 1, 2, 6, 7, 8